奇数の調和数の予想について

知識友輔*　大野泰生**

On the conjecture for odd harmonic number

Yusuke CHISHIKI * and Yasuo OHNO **

Ore conjectured that there exists no odd harmonic number except for 1. In this paper, it is proved that every nontrivial odd harmonic number , if it exists, is divisible by a prime number greater than 11. This result gives a supporting evidence for the conjecture.

Key words : Harmonic numbers, Perfect numbers, Cyclotomic numbers

"奇数の完全数は存在しないだろう."という有名な予想がある.このことに関してOreは調和数(*harmonic number*)という概念を導入し,"1以外の奇数の調和数は存在しないだろう."と予想した.全ての完全数は調和数であることから冒頭の予想よりOreの予想の方が強い主張である.今回は,奇数の調和数 n が存在するならば,その最大素因子は13以上であることを証明する.

歴史的には,Kronecker[1), Sylvester[2)]らの研究によって円分数の理論が構成され,完全数の研究を動機としてOre[3)]により調和数が導入された.調和数はこれまでにCallan[4)], Garcia[5)], Goto[6)], Goto-Okeya[7)], Goto-Shibata[8)], Kanold[9)], Shibata[10)]らによって研究されている.完全数とは自分自身を除く約数の総和が自分自身に等しい自然数のことであり,紀元前より様々な場面で用いられてきた数である.完全数は,6, 28を始めとして現在までに約40個知られているがそれらは全て偶数の完全数であり奇数のものは見つかっていない.全ての完全数は調和数であることから調和数を研究することが完全数を研究することに繋がるのである.

自然数 n に対して, $\sigma(n)$ を n の約数の総和, $\tau(n)$ を n の約数の個数とし, $H(n)$ を n の約数の調和平均とすると,

$$H(n) = \frac{n \cdot \tau(n)}{\sigma(n)}$$

と表せる.

定義 1 $H(n) \in \mathbf{Z}$ を満たす自然数 n を調和数という.

奇数の調和数を構成しうる素因数について,これまでにわかっている最新の事実は,次のShibataの定理である.

定理 1 [(10)]
e_1, e_2, e_3 を0以上の整数とする, $n = 3^{e_1} \cdot 5^{e_2} \cdot 7^{e_3}$ の形の調和数 $(n \neq 1)$ は存在しない.

今回,我々はShibataの定理の素因子を11まで拡張させ次の結果を得た.

平成17年6月10日受理
* 総合理工学研究科理学専攻
** 理学科

主定理

奇数の調和数 n $(n \neq 1)$ が存在するならば,その最大素因子は13以上である.
すなわち, e_1, e_2, e_3, e_4 を0以上の整数として, $n = 3^{e_1} \cdot 5^{e_2} \cdot 7^{e_3} \cdot 11^{e_4}$ の形である調和数 $(n \neq 1)$ は存在しない.

証明に入る前に, まず調和平均 $H(n)$ を円分数を用いて書き表し, 次に証明に使う定理・補題を挙げる.

定義 2 1の原始 n 乗根全体を根に持つモニックな多項式

$$\Phi_n(x) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ (j,n)=1}} (x - \zeta_n^j) \qquad \zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

を円分多項式といい, 円分多項式に整数を代入して得られる数を円分数という.
例

$$\begin{aligned}
\Phi_1(x) &= x - 1 \\
\Phi_2(x) &= x + 1 \\
\Phi_3(x) &= (x - \frac{-1+\sqrt{3}i}{2})(x - \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}) \\
&= x^2 + x + 1
\end{aligned}$$

p が素数のとき

$$\Phi_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1 = \frac{x^p - 1}{x - 1}$$

一般に $n \geq 1$ のとき $\quad x^n - 1 = \prod_{\substack{d|n \\ d \geq 1}} \Phi_d(x)$ が成り立つ.

よって, $p^{e+1} - 1 = \prod_{d|(e+1)} \Phi_d(p)$ なので,

$$\begin{aligned}
\sigma(p^e) &= p^e + p^{e-1} + \cdots + 1 = \frac{p^{e+1} - 1}{p - 1} \\
&= \frac{\prod_{d|(e+1)} \Phi_d(p)}{\Phi_1(p)} = \prod_{\substack{d|(e+1) \\ d \neq 1}} \Phi_d(p)
\end{aligned}$$

従って,

$$H(p^e) = \frac{p^e \cdot \tau(p^e)}{\sigma(p^e)} = \frac{p^e \cdot \tau(p^e)}{\prod_{\substack{d|(e+1) \\ d \neq 1}} \Phi_d(p)} \qquad (1)$$

調和数 n や調和平均 $H(n)$ に対して, 以下のような定理が知られている.

定理 2 [(5)] 奇数の調和数 n は, mod 4 で 3 の素数の奇数ベキ乗を含まない.

定理 3 [(3)] p^α (p : 素数, $\alpha \in \mathbf{N}$) は調和数でない.

定理 4 [(4), (12)] p, q が相異なる素数とするとき, $p^\alpha \cdot q^\beta$ $(\alpha,\ \beta \in \mathbf{N})$ の形で調和数であるのは, 偶数の完全数しかない.

ここで, $ord_p(a)$ を $a \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times$ の位数を表すとすると,

補題 1 [(13)] n を割らない素数 p と, $a \in \mathbf{Z}$ に対して,

$$p \mid \Phi_n(a) \iff ord(a) = n \pmod{p}$$

系 1 [(1), (2)] $p \mid \Phi_n(a) \Longrightarrow p \mid n$ または $p \equiv 1 \pmod{n}$

系の p に関して, $p \mid n$ であるとき p を分岐する素数と呼び, $p \equiv 1 \pmod{n}$ であるとき p を分解する素数と呼ぶことにする.

補題 2 [(11)] 円分数 $\Phi_n(a)$ は, 以下の例外を除き, 少なくとも1つ分解する素数を含む. 例外となるのは, $n = 6,\ a = 2$ のとき

$$\Phi_6(2) = 2^2 - 2 + 1 = 3.$$

および素数 p に対して
$n = 2,\ a = 2^p - 1$ (メルセンヌ素数) のとき

$$\Phi_2(2^p - 1) = (2^p - 1) + 1 = 2^p$$

である.

以上の定理・補題を用いて主定理を証明する.

主定理の証明

(1) より $n = 3^{e_1} \cdot 5^{e_2} \cdot 7^{e_3} \cdot 11^{e_4}$ の調和平均 $H(n)$ は,

$$H(n) = \frac{3^{e_1} \cdot (e_1+1)}{\prod_{\substack{d|(e_1+1)\\ d\neq 1}} \Phi_d(3)} \cdot \frac{5^{e_2} \cdot (e_2+1)}{\prod_{\substack{d|(e_2+1)\\ d\neq 1}} \Phi_d(5)} \cdot \frac{7^{e_3} \cdot (e_3+1)}{\prod_{\substack{d|(e_3+1)\\ d\neq 1}} \Phi_d(7)} \cdot \frac{11^{e_4} \cdot (e_4+1)}{\prod_{\substack{d|(e_4+1)\\ d\neq 1}} \Phi_d(11)} \tag{2}$$

と書ける. 前半では, $H(n) \in \mathbf{Z}$ とするとき, (e_1+1), (e_2+1), (e_3+1), (e_4+1) の最大素因子を 5 以下に抑えられることを示す.

まず, $H(n) \in \mathbf{Z}$ として (e_1+1) の最大素因子を p_1 (≥ 7) と仮定する. このとき, $p_1 \mid (e_1+1)$ より $\prod_{\substack{d|(e_1+1)\\ d\neq 1}} \Phi_d(3)$ は $\Phi_{p_1}(3)$ を因子に持つ.
$\Phi_{p_1}(3)$ は分解する素数を持つので, それを q_1 とすると系 1 より

$$q_1 \mid \Phi_{p_1}(3)\ ,\quad q_1 \equiv 1 \pmod{p_1}\ .$$

すなわち,

$$\exists\, q_1 \geq 2p_1 + 1 \geq 15\ .$$

よって, q_1 は $q_1 \mid (e_2+1)$, $q_1 \mid (e_3+1)$, $q_1 \mid (e_4+1)$ のいずれかでなければならない. $q_1 \mid (e_2+1)$ とし, (もし $q_1 \mid (e_3+1)$, $q_1 \mid (e_4+1)$ としてもまったく同じようにできる.) (e_2+1) の最大素因子を p_2 とすると

$$p_2 \mid (e_2+1)\ ,\ p_2 \geq q_1$$

となる. すると, $\prod_{\substack{d|(e_2+1)\\ d\neq 1}} \Phi_d(5)$ は $\Phi_{p_2}(5)$ を因子に持つ.

$\Phi_{p_2}(5)$ は分解する素数を持つので, それを q_2 とすると

$$q_2 \mid \Phi_{p_2}(5)\ ,\quad q_2 \equiv 1 \pmod{p_2}\ .$$

すなわち,

$$\exists\, q_2 > p_2 \quad \text{s.t. } q_2 \mid \Phi_{p_2}(5).$$

よって, $q_2 \mid (e_3+1)$ か $q_2 \mid (e_4+1)$ でなければならない. $q_2 \mid (e_3+1)$ とし, (e_3+1) の最大素因子を p_3 とすると

$$p_3 \mid (e_3+1)\ ,\ p_3 \geq q_2$$

となる. すると, $\prod_{\substack{d|(e_3+1)\\ d\neq 1}} \Phi_d(7)$ は $\Phi_{p_3}(7)$ を因子に持つ.
$\Phi_{p_3}(7)$ は分解する素数を持つので, それを q_3 とすると

$$q_3 \mid \Phi_{p_3}(7)\ ,\quad q_3 \equiv 1 \pmod{p_3}\ .$$

すなわち,

$$\exists\, q_3 > p_3 \quad \text{s.t. } q_3 \mid \Phi_{p_3}(7)\ .$$

すると, $q_3 \mid (e_4+1)$ しかないので p_4 を (e_4+1) の最大素因子とすると

$$p_4 \mid (e_4+1)\ ,\ p_4 \geq q_3$$

となる. まったく同様にして,

$$\exists\, q_4 > p_4 \quad \text{s.t. } q_4 \mid \Phi_{p_4}(11)\ .$$

ここで, $q_4 > p_4 \geq q_3 > p_3 \geq q_2 > p_2 \geq q_1 \geq 2p_1 + 1 \geq 15$ であり, $(e_1+1) \cdot (e_2+1) \cdot (e_3+1) \cdot (e_4+1)$ の最大の素因子は p_4 である. 従って, 分母の q_4 は分子でキャンセルされず $H(n) \in \mathbf{Z}$ に矛盾する. よって, (e_1+1) の最大素因子は 5 以下でなくてはならない. また, (e_2+1), (e_3+1), (e_4+1) についてもまったく同様にできる. この結果, (e_1+1), (e_2+1), (e_3+1), (e_4+1) は 5 以下の素因子のべきで表すことができる.
定理 2 より e_1, e_3, e_4 は偶数でなければならないので

$e_1+1=3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}$, $e_2+1=2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\gamma_2}$, $e_3+1=3^{\beta_3}\cdot 5^{\gamma_3}$, $e_4+1=3^{\beta_4}\cdot 5^{\gamma_4}$
と書ける. 従って, (2) にこれらを代入すると

$$H(n)=$$

$$\frac{3^{3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}-1}\cdot 3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}}{\prod_{\substack{d|3^{\beta_1}\cdot 5^{\gamma_1}\\ d\neq 1}}\Phi_d(3)}\cdot\frac{5^{2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\gamma_2}-1}\cdot 2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\gamma_2}}{\prod_{\substack{d|2^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}\cdot 5^{\gamma_2}\\ d\neq 1}}\Phi_d(5)}$$

$$\cdot\frac{7^{3^{\beta_3}\cdot 5^{\gamma_3}-1}\cdot 3^{\beta_3}\cdot 5^{\gamma_3}}{\prod_{\substack{d|3^{\beta_3}\cdot 5^{\gamma_3}\\ d\neq 1}}\Phi_d(7)}\cdot\frac{11^{3^{\beta_4}\cdot 5^{\gamma_4}-1}\cdot 3^{\beta_4}\cdot 5^{\gamma_4}}{\prod_{\substack{d|3^{\beta_4}\cdot 5^{\gamma_4}\\ d\neq 1}}\Phi_d(11)}.$$

ここで, $H(n)\in\mathbf{Z}$ を満たすように β_1, γ_1, $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2,\beta_3,\gamma_3,\beta_4,\gamma_4$ の範囲を定める.

$\beta_1\geq 1$ のとき, $\Phi_3(3)=3^2+3+1=13$ より分子ではキャンセルできないので $H(n)\in\mathbf{Z}$ を満たさない. よって $\beta_1=0$.
$\gamma_1\geq 2$ のとき,$\Phi_{5^2}(3)=3^{20}+3^{15}+3^{10}+3^5+1=3501192601=8951\cdot 391151$ より $\gamma_1\leq 1$.
$\alpha_2\geq 2$ のとき, $\Phi_{2^2}(5)=5^2+1=2\cdot 13$ より $\alpha_2\leq 1$.
$\beta_2\geq 1$ のとき, $\Phi_3(5)=5^2+5+1=31$ より $\beta_2=0$.
$\gamma_2\geq 1$ のとき, $\Phi_5(5)=\dfrac{5^5-1}{5-1}=781=71\cdot 11$ より $\gamma_2=0$.
$\beta_3\geq 1$ のとき, $\Phi_3(7)=7^2+7+1=57=3\cdot 19$ より $\beta_2=0$.
$\gamma_3\geq 1$ のとき, $\Phi_5(7)=\dfrac{7^5-1}{7-1}=2801$ より $\gamma_3=0$.
$\beta_4\geq 1$ のとき, $\Phi_3(11)=11^2+11+1=133=7\cdot 19$ より $\beta_4=0$.
$\gamma_4\geq 1$ のとき, $\Phi_5(11)=\dfrac{11^5-1}{11-1}=5\cdot 3221$ より $\gamma_4=0$.

従って, $\gamma_1\leq 1$, $\alpha_2\leq 1$ のときを調べればよい. $\gamma_1=1$, $\alpha_2=0$ or $\gamma_1=0$, $\alpha_2=1$ のとき, 定理 3 より $H(p^a)\notin\mathbf{Z}$ であるから n は調和数でない. $\gamma_1=1$, $\alpha_2=1$ のとき, 定理 4 より $H(p^a\cdot q^b)\in\mathbf{Z}$ であるためには $p^a\cdot q^b$ が偶数の完全数でなくてはならない. よって, $\gamma_1=1$, $\alpha_2=1$ のときも n は調和数でない.
故に,e_1,e_2,e_3,e_4 を 0 以上の整数とする, $n=3^{e_1}\cdot 5^{e_2}\cdot 7^{e_3}\cdot 11^{e_4}$ の形の調和数 $(n\neq 1)$ は存在しない.

謝辞

この研究にあたり興味深い問題を提示し, 数多くの貴重な助言をして下さった東京理科大学の後藤丈志先生に深く感謝申し上げます.

参考文献

1) L.Kronecker, *Über die arithmetischen Sätze, welchi Lejeune Dirichlet in seiner Breslauer Habilitationsschrift entwickelt hat., Monatsber. Preuβ. Akad. Wiss., Berlin*, 1888, 417 – 423.

2) J.J.Sylvester, *On certain ternary cubic form equations. Excurs A. On the divisors of cyclotomic functions, Amer. J. Math.*, **2** (1879), 357 – 380.

3) O.Ore, *On the averages of the divisors of a number, Amer. Math. Monthly* **55** (1984), 615 – 619.

4) D.Callan, *Solution to Problem* 6616, *Amer. Math. Monthly* **99** (1992), 783 – 789.

5) M.Garcia, *On numbers with integral harmonic mean, Amer. Math. Monthly* **61** (1954), 89 – 96

6) T.Goto, *An upper bound for harmonic numbers, preprint.*

7) T.Goto and K.Okeya, *All harmonic numbers less than* 10^{12}.
All numbers whose positive divisors have integral harmonic mean up to 1000, *preprint.*

8) T.Goto and S.Shibata, *All numbers whose positive divisors have integral harmonic mean up to* 300. *Math. Comp.* **73** (2004), *no.* 245, 475 − 491.

9) H.J.Kanold, *Über das harmonische Mittel der Teiler einer natürlichen Zahl.* (*German*) *Math. Ann.* **133** (1957), 371 − 374.

10) 柴田 直：『調和数と半整数調和数について』九州大学大学院 平成14年度修士論文 (2003).

11) A.S.Bang, *Taltheoretiske Undersφgelser, Tidsskrift Math.*, **5 IV** (1886), 70 − 80, 130 − 137.

12) C.Pomerance, *On a problem of Ore: Harmonic numbers (unpublished typescript), Notices Amer. Math. Soc.*, **20** (1973), *A*-648.

13) L.C.Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields, second ed., Grad. Texts in Math.* 83, *Springer, New York,* 1997.