ある3次体の Hilbert Modular 形式について

菊田俊幸*, 長岡昇勇**

On Hilbert Modular Forms for a Cubic Number Field

Toshiyuki KIKUTA* and Shoyu NAGAOKA**

This paper concerns the study of the ring of Hilbert modular forms for a certain totally real cubic number field.The main tool of the study is the Fourier expansion of the Eisenstein series for the Hilbert modular group.

Key words: Hilbert modular forms, Fourier coefficients of automorphic forms

1. 序文

楕円 modular 形式の理論は既に古典的であるが, その多変数化の歴史は 100 年に満たない. Hilbert は 20 世紀初め, 今日彼の名前が冠せられている多変数の modular 形式を定義した. この理論は Blumenthal によって発展させられ楕円 modular 形式について得られている諸結果の一般化が試みられている.

楕円 modular 群の代わりに n 次総実体 K に対する Hilbert modular 群とよばれるものを考え, 複素上半平面 $\mathbf{H}$ の n 個の直積集合 $\mathbf{H}^n$ に作用させる. Hilbert modular 形式とは, それに対する保型性をもつ関数として定義されるものである.

総実体 K が実 2 次体の場合には様々な研究がなされ, 例えば判別式が小さい場合には, modular 形式のなす次数付環が決定されている.

しかしながら, 次数 n が 3 以上の場合にはほとんど結果が得られていない. この論文ではある 3 次体の Eisenstein 級数の Fourier 係数の具体例や, それらを diagonal に制限して得られる楕円 modular 形式との関係を得ることができた. さらに, これらの Hilbert modular 形式のなす次数付環の生成元の一部を具体的に構成することができた.

既に得られている次元公式によれば, 次数付環の構造を決定するためには, 他にいくつかの生成元が必要となることが分かる. これらの生成元を具体的に構成することはこれからの課題であろう.

2. 3次体の Hilbert modular 形式

$\zeta = e^{2\pi i/7}$, $K = \mathbf{Q}(\zeta+\zeta^{-1})$ とし, $\mathbf{o}$ を K の整数環とする. K は類数が 1, 判別式が 7^2 の総実な 3 次体となる.

$\rho_1 = \zeta+\zeta^{-1}$, $\rho_2 = \zeta^2+\zeta^{-2}$, $\rho_3 = \zeta^3+\zeta^{-3}$ とおく. ρ_1 の三つの共役は ρ_1, ρ_2, ρ_3 であり, これらは全て K に含まれる. したがって K から $\mathbf{R}$ への三つの埋め込み $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ は全て K の $\mathbf{Q}$ 上自己同型を与える. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ をそれぞれ $\varphi_1(\rho_1) = \rho_1, \varphi_2(\rho_1) = \rho_2, \varphi_3(\rho_1) = \rho_3$ となるものとする.

平成18年6月24日受理
* 大学院総合理工学研究科
** 理学科

このときガロア群 $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ は

$$\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}) = \{\varphi_1 = \varphi_2^3 = e, \varphi_2, \varphi_3 = \varphi_2^2\}$$

となる. よって拡大 $K/\mathbf{Q}$ は巡回拡大となる.

$\mathbf{H}$ を複素上半平面とする. $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})^3$ は各成分ごとの 1 次分数変換によって $\mathbf{H}^3$ に作用する. $z \in \mathbf{H}$, $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ に対して $Mz = (az+b)/(cz+d)$ とおく. $\varphi_j \in \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$, $x \in K$ に対して $\varphi_j(x) = x^{(j)}$ と表すことにする. このとき $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2,K)$ に対して $M^{(j)} = \left(\begin{smallmatrix} a^{(j)} & b^{(j)} \\ c^{(j)} & d^{(j)} \end{smallmatrix}\right)$ と定義する. すると $z \in \mathbf{H}$, $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2,K)$ に対して, $Mz = (M^{(1)}z_1, M^{(2)}z_2, M^{(3)}z_3)$ により $\mathrm{SL}(2,K)$ は $\mathbf{H}^3$ に作用する.

$\Gamma_K = \mathrm{SL}(2,\mathbf{o})$ とおく. Γ_K は K の Hilbert modular 群とよばれる. 単射準同型写像

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}(2,K) & \hookrightarrow & \mathrm{SL}(2,\mathbf{R})^3 \\ M & \mapsto & (M^{(1)}, M^{(2)}, M^{(3)}) \end{array}$$

によって Γ_K を $\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})^3$ の離散部分群とみなせる. したがって, Γ_K は $\mathbf{H}^3$ に不連続に作用する.

$g \in K$, $z = (z_1, z_2, z_3)$ に対して

$$gz = (g^{(1)}z_1, g^{(2)}z_2, g^{(3)}z_3)$$
$$N(z) = z_1z_2z_3$$
$$Tr(z) = z_1+z_2+z_3$$

と表す.

定義 1. $\mathbf{H}^3$ で定義された正則関数 F が Γ_K に関する weight $2k$ $(k \in \mathbf{Z})$ の Hilbert modular 形式であるとは F が次の条件をみたすことを言う.

任意の $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_K$ に対して

$$F(Mz) = N(cz+d)^{2k}F(z)$$

が成り立つ.

Hilbert modular 形式は楕円 modular 形式の場合と同様に, 次のような Fourier 展開をもつ [1).

命題 1. $\mathbf{d}$ を共役差積とする． F が Γ_K に関する Hilbert modular 形式ならば F は

$$F(z) = a_0 + \sum_{g \in \mathbf{d}^{-1},\ g^{(j)} > 0} a_g e^{2\pi i Tr(gz)}$$

と一意的に Fourier 展開される．

そして cusp 形式についても，楕円 modular 形式の場合と同様に定義される [1]．

定義 2. Γ_K に関する Hilbert modular 形式 F が cusp 形式であるとは，命題 1 で与えられた Fourier 係数の定数項 a_0 が 0 となることを言う．

Hilbert modular 形式の構成の仕方として，次のような定理が知られている [2]．

定理 1 (Eisenstein 級数). k を偶数とする．$z \in \mathbf{H}^3$ に対して

$$E_{k,K}(z) = 1 + \omega_k \sum_{g \in \mathbf{d}^{-1}, g^{(j)} > 0} \sigma_{k-1}(g) e^{2\pi i Tr(gz)}$$

$$\omega_k = \frac{1}{\zeta_K(k)} \left(\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \right)^3 7^2$$

とすると，$E_{k,K}$ は Γ_K に関する weight k の Hilbert modular 形式をなす．

ここで，$\sigma_{k-1}(g) = \sum_{(h) \supset (g)\mathbf{d}} (\mathcal{N}(h))^{k-1}$, $\zeta_K(s)$ は K の Dedekind ζ 関数，$\mathcal{N}(h)$ は単項 ideal (h) の norm である．

3. Eisenstein 級数の Fourier 係数

Eisenstein 級数の Fourier 係数を計算する．

ω_k については E.Z.Goren の論文 [3] の 374 頁に計算されていたのでそれを参考にした．

$$\omega_2 = -2^3 \cdot 3 \cdot 7,\ \omega_4 = \frac{2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{79},$$
$$\omega_6 = -\frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 7}{7393},\ \omega_8 = \frac{2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{142490119},$$
$$\omega_{10} = -\frac{2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}{1141452324871},$$
$$\omega_{12} = -\frac{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13}{691 \cdot 10903 \cdot 278995143079}.$$

整数環 $\mathbf{o}$ の整数基として ρ_1, ρ_2, ρ_3 がとれる．すなわち $\mathbf{o} = \rho_1 \mathbf{Z} + \rho_2 \mathbf{Z} + \rho_3 \mathbf{Z}$ と書ける．共役差積 $\mathbf{d}$ に対して

$$\mathbf{d}^{-1} = \frac{\mathbf{o}}{(\rho_1 - 2)^2}$$

が成り立つ．したがって

$$g = \frac{f}{(\rho_1 - 2)^2} \in \frac{\mathbf{o}}{(\rho_1 - 2)^2} = \mathbf{d}^{-1}$$
$$f = a\rho_1 + b\rho_2 + c\rho_3 \quad (a, b, c \in \mathbf{Z})$$

とおけば，$\sigma_{k-1}(g)$ については

$$\begin{aligned}\sigma_{k-1}(g) &= \sum_{(h) \supset (g)\mathbf{d}} (\mathcal{N}(h))^{k-1} \\ &= \sum_{(h) \supset (f)} (\mathcal{N}(h))^{k-1} = \sum_{(h) | (f)} (Nh)^{k-1}\end{aligned}$$

と変形される．よって $\sigma_{k-1}(g)$ は f の約数の norm が分かれば計算することができる．

$$\begin{aligned}Nf &= (a+b+c)^3 - 7(a^2c + ab^2 + abc + bc^2) \\ Tr(g) &= 2a - b - 3c\end{aligned}$$

が成り立つ．

総正な g を trace の小さい順に a, b, c の辞書式順序で並べると表 1 のようになる．

そして Eisenstein 級数の Fourier 係数を計算すると表 3 のようになる．

4. Diagonal への制限

楕円 modular 群を Γ_1 とする．weight k の楕円 modular 形式全体の集合を $M_k(\Gamma_1)$ と表し，weight k の Γ_K に関する Hilbert modular 形式全体の集合を $M_k(\Gamma_K)$ と表す．$M_k(\Gamma_K)$ と $M_k(\Gamma_1)$ はともに $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間をなす．$k \in \mathbf{Z}$ を 4 以上の偶数とし，$z \in \mathbf{H}$ に対して $q = e^{2\pi i z}$ とする．このとき

$$E_k(z) = \frac{1}{2\zeta(k)} \sum_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2 - (0,0)} \frac{1}{(mz+n)^k}$$

$$\Delta(z) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}$$

とおくと $E_k \in M_k(\Gamma_1), \Delta \in M_{12}(\Gamma_1)$ となり

$$\bigoplus_{k \in 6\mathbf{Z}} M_k(\Gamma_1) = \mathbf{C}[E_6, \Delta]$$

となることが知られている [4]．E_6, Δ を Fourier 展開すると次のようになる．

$$\begin{aligned}E_6 &= 1 - 504q - 16632q^2 - 122976q^3 - \cdots \\ \Delta &= q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + \cdots.\end{aligned}$$

$z \in \mathbf{H}$, $F \in M_k(\Gamma_K)$ に対して $\mathbf{D}$ を $\mathbf{D}(F)(z) = F((z,z,z))$ と定義する．$M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_1$ とすると

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(F)(Mz) &= F((Mz, Mz, Mz)) \\ &= N(cz+d)^k F((z,z,z)) \\ &= (cz+d)^{3k} \mathbf{D}(F)(z)\end{aligned}$$

となる．また $g(z,z,z) = (g^{(1)}z, g^{(2)}z, g^{(3)}z)$ であるから

$$\begin{aligned}Tr(g(z,z,z)) &= g^{(1)}z + g^{(2)}z + g^{(3)}z \\ &= (g^{(1)} + g^{(2)} + g^{(3)})z \\ &= Tr(g)z\end{aligned}$$

したがって, 命題1より

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(F)(z) &= F((z,z,z))\\ &= a_0 + \sum_{g\in\mathbf{d}^{-1},g^{(j)}>0} a_g e^{2\pi i Tr(g(z,z,z))}\\ &= a_0 + \sum_{g\in\mathbf{d}^{-1},g^{(j)}>0} a_g e^{2\pi i Tr(g)z}\end{aligned}$$

$g\in\mathbf{d}^{-1}$, $g^{(j)}>0$ $(j=1,2,3)$ のとき $Tr(g)\in\mathbf{N}$ であるから

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z},\ a_n := \sum_{Tr(g)=n} a_g$$

と表せる. よって $\mathbf{D}(F)(z)\in M_{3k}(\Gamma_1)$ が成り立つ. この性質により, $\mathbf{D}(E_{k,K})$ は weight が 6 の倍数の楕円 modular 形式になる. したがって $\mathbf{D}(E_{k,K})$ は E_6 と Δ で表されるはずである. そこで $\mathbf{D}(E_{k,K})$ が E_6 と Δ でどのように表されるか調べる.

上の議論から, 表3で与えられた Fourier 係数において, g の trace が等しいものを全て加えれば, $E_{k,K}$ を diagonal に制限してできる楕円 modular 形式の Fourier 係数を求めることができるということが分かる. この方法で $\mathbf{D}(E_{k,K})$ の Fourier 係数を求め, E_6, Δ の係数と比較することによって次の結果が得られる.

命題 2.

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(E_{2,K}) &= E_6\\ \mathbf{D}(E_{4,K}) &= E_6^2 + \frac{84672}{79}\Delta\\ \mathbf{D}(E_{6,K}) &= E_6^3 + \frac{11176704}{7393}E_6\Delta\\ \mathbf{D}(E_{8,K}) &= E_6^4 + \frac{287260089984}{142490119}E_6^2\Delta\\ &\quad + \frac{89425320800256}{142490119}\Delta^2\\ \mathbf{D}(E_{10,K}) &= E_6^5 + \frac{2876459858669376}{1141452324871}E_6^3\Delta\\ &\quad + \frac{1613634221540081664}{1141452324871}E_6\Delta^2\end{aligned}$$

が成り立つ.

証明 一番目の等式 $\mathbf{D}(E_{2,K})=E_6$ が成り立つことは, $\mathbf{D}(E_{2,K})$ の定数項が 1 であることから明らかである.

二番目の等式について, $\mathbf{D}(E_{4,K})$ の weight は 12 であり, 定数項が 1 であるから $\mathbf{D}(E_{4,K})=E_6^2+\alpha\Delta$ とおく. 表3より

$$\mathbf{D}(E_{4,K}) = 1 + 3\cdot\frac{1680}{79}q + \cdots.$$

一方

$$E_6^2 + \alpha\Delta = 1 + (\alpha - 1008)q + \cdots$$

であるから係数を比較して, $\alpha-1008=1680/79$ から $\alpha=84672/79$ が得られる.

以下同様にして命題の全ての等式が示される.

5. 生成元の一部の構成

以下, 次数付環 $\bigoplus_{k\in 2\mathbf{Z}} M_k(\Gamma_K)$ の生成元の一部の構成を試みる.

命題 3.

$$\begin{aligned}F_4 &= \frac{79}{28224}(E_{4,K} - E_{2,K}^2)\\ F_6 &= -\frac{7393}{82978560}E_{6,K} + \frac{869}{6914880}E_{2,K}E_{4,K}\\ &\quad -\frac{607}{16595712}E_{2,K}^3\\ F_8 &= -\frac{142490119}{1018502553600}E_{8,K}\\ &\quad +\frac{29815969}{178237946880}E_{2,K}E_{6,K}\\ &\quad -\frac{44798293}{356475893760}E_{2,K}^2E_{4,K}\\ &\quad +\frac{222625}{10185025536}E_{2,K}^4 + \frac{544920433}{7129517875200}E_{4,K}^2\end{aligned}$$

とおくと $F_4\in M_4(\Gamma_K), F_6\in M_6(\Gamma_K), F_8\in M_8(\Gamma_K)$ となり, これらは cusp 形式となる. そして

$$\mathbf{D}(F_4)=3\Delta,\ \mathbf{D}(F_6)=0,\ \mathbf{D}(F_8)=0$$

が成り立つ.

証明 F_4, F_6, F_8 の Fourier 係数を計算すると表2のようになる. 表より定数項が 0 であるから cusp 形式になることが分かる. 命題の後半は diagonal 写像 $\mathbf{D}$ が加法的かつ乗法的であることと命題2により

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(F_4) &= \frac{79}{28224}(\mathbf{D}(E_{4,K}) - \mathbf{D}(E_{2,K})^2)\\ &= \frac{79}{28224}(E_6^2 + \frac{84672}{79}\Delta - E_6^2)\\ &= \frac{79}{28224}\cdot\frac{84672}{79}\Delta\\ &= 3\Delta\end{aligned}$$

を得る.

以下同様にして示される.

そして次の定理が得られる.

定理 2. $E_{2,K}$, F_4, F_6, F_8 は代数的独立である.

証明 $e(x)=e^{2\pi i x}$ とおき,

$$X = e\left(-\left(\frac{\rho_1}{(\rho_1-2)^2}z_1 + \frac{\rho_2}{(\rho_2-2)^2}z_2 + \frac{\rho_3}{(\rho_3-2)^2}z_3\right)\right)$$
$$Y = e\left(-\left(\frac{\rho_2}{(\rho_1-2)^2}z_1 + \frac{\rho_3}{(\rho_2-2)^2}z_2 + \frac{\rho_1}{(\rho_3-2)^2}z_3\right)\right)$$
$$Z = e\left(-\left(\frac{\rho_3}{(\rho_1-2)^2}z_1 + \frac{\rho_1}{(\rho_2-2)^2}z_2 + \frac{\rho_2}{(\rho_3-2)^2}z_3\right)\right)$$

とおくと

$$g = \frac{a\rho_1 + b\rho_2 + c\rho_3}{(\rho_1-2)^2}\in\mathbf{d}^{-1}\quad (a,b,c\in\mathbf{Z})$$

に対して

$$e(Tr(gz)) = X^{-a}Y^{-b}Z^{-c}$$

となる. したがって表 2, 表 3 の Fourier 係数を見ると

$$\begin{aligned} E_{2,K} &= 1 - 168e(Tr(g_1 z)) + \cdots \\ &= 1 - 168X^2Y^2Z + \cdots \\ F_4 &= e(Tr(g_1 z)) + e(Tr(g_2 z)) + \cdots \\ &= X^2Y^2Z + X^3YZ^2 + \cdots \\ F_6 &= e(Tr(g_6 z)) - 2e(Tr(g_7 z)) + \cdots \\ &= X^3Y^2Z^2 - 2X^4Y^4Z^2 + \cdots \\ F_8 &= e(Tr(g_7 z)) - e(Tr(g_8 z)) + \cdots \\ &= X^4Y^4Z^2 - X^5Y^3Z^3 + \cdots \end{aligned}$$

と表されることが分かる.

さて, 示すべきことは $\sum \gamma_{wxyz} E_2^w F_4^x F_6^y F_8^z = 0$ ならば $\gamma_{wxyz} = 0$ となることであるが, weight が異なる 0 でない modular 形式同士を加えても 0 になることはない. したがって

$$\sum_{2w+4x+6y+8z=k} \gamma_{wxyz} E_2^w F_4^x F_6^y F_8^z = 0 \text{ ならば}$$

$\gamma_{wxyz} = 0$ となることを示せばよい.

上で定義した記号 X, Y, Z を用いると

$$\begin{aligned} &\sum_{2w+4x+6y+8z=k} \gamma_{wxyz} E_{2,K}^w F_4^x F_6^y F_8^z \\ &= \gamma_{wxyz}(X^{2x+3y+4z}Y^{2x+2y+4z}Z^{x+2y+2z} + \cdots) \\ &+ \gamma_{w'x'y'z'}(X^{2x'+3y'+4z'}Y^{2x'+2y'+4z'}Z^{x'+2y'+2z'} \\ &+ \cdots) + \cdots \end{aligned} \tag{1}$$

と表される. ここで, 式 (1) の括弧の中を trace の小さい順に a, b, c の辞書式順序で並べ替えることにする. この順序は modular 形式同士の積によって先頭項の順序を変えない. $E_{2,K}$, F_4, F_6, F_8 は元々この順序で並べていたから, 再び式 (1) のように表される.

括弧の中の先頭項で等しいものが存在するとしたら

$$\begin{aligned} &X^{2x+3y+4z}Y^{2x+2y+4z}Z^{x+2y+2z} \\ &= X^{2x'+3y'+4z'}Y^{2x'+2y'+4z'}Z^{x'+2y'+2z'} \end{aligned}$$

となる. weight が等しいから

$$2w + 4x + 6y + 8z = 2w' + 4x' + 6y' + 8z'$$

となる. したがって

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 2x' + 3y' + 4z' \\ 2x + 2y + 4z = 2x' + 2y' + 4z' \\ x + 2y + 2z = x' + 2y' + 2z' \\ 2w + 4x + 6y + 8z = 2w' + 4x' + 6y' + 8z' \end{cases}$$

をみたす. これより

$$w = w', y = y', x + 2z = x' + 2z' \tag{2}$$

が導かれる. (1) の括弧の個数は有限個であって, その中の先頭項が等しいものを全て加えると 0 にならなければならない. よって, 係数を簡単に $\gamma_1, \cdots, \gamma_m$ と表すことにすれば

$$\gamma_1 E_{2,K}^{w_1} F_4^{x_1} F_6^{y_1} F_8^{z_1} + \cdots + \gamma_m E_{2,K}^{w_m} F_4^{x_m} F_6^{y_m} F_8^{z_m} = 0$$

となる. (2) により

$$E_{2,K}^{w_1} F_6^{y_1}(\gamma_1 F_4^{x_1} F_8^{z_1} + \cdots + \gamma_m F_4^{x_m} F_8^{z_m}) = 0$$

と表せるから

$$\gamma_1 F_4^{x_1} F_8^{z_1} + \cdots + \gamma_m F_4^{x_m} F_8^{z_m} = 0$$

となる.

ここで $z_1 > z_2 > \cdots > z_m = 0$ としてよい. もし $z_m \neq 0$ なら $F_8^{z_m}$ でくくればよい. したがって

$$\gamma_1 F_4^{x_1} F_8^{z_1} + \cdots + \gamma_{m-1} F_4^{x_{m-1}} F_8^{z_m - 1} = -\gamma_m F_4^{x_m}$$

となるが, 命題 3 により $\mathbf{D}$(左辺)= 0, $\mathbf{D}$(右辺)= $-\gamma_m (3\Delta)^{x_m}$ であるから $\gamma_m = 0$ となる. 以下同様にして $\gamma_j = 0$ $(j = 1, \cdots, m)$ を得る.

全ての括弧の中の先頭項が異なるようになるまでこの議論を繰り返す. 残った括弧の先頭項のうちで, trace の小さい順に a, b, c の辞書式順序で先頭にくるものを選ぶ. 並べ方によりその項と等しいものは, 他のどの括弧の中にも現れない. したがって, その括弧の係数は 0 でなければならない. 以下, 帰納的に全ての係数が 0 となる.

3 次体の場合, 代数的独立なものは四つしかないことが知られている. このことから Γ_K の Hilbert modular 形式は, これら $E_{2,K}$, F_4, F_6, F_8 と代数的関係があるということが分かったことになる. 同時に $E_{2,K}, F_4, F_6, F_8$ は Hilbert modular 形式のなす次数付環の生成元の一部となることが分かった.

しかし Thomas and Vasquez の論文 [5] の 151 頁の公式によれば

$$\begin{aligned} \mu_G(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \dim M_{2k}(\Gamma_K) t^k \\ &= \frac{(1+t^4+3t^5+5t^6+4t^7+3t^8+3t^9+3t^{10}+2t^{11}-2t^{13}+t^{14})}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)(1-t^7)} \\ &= 1 + t + 2t^2 + 3t^3 + 5t^4 + 9t^5 + 17t^6 + 27t^7 + 41t^8 \\ &\quad + 60t^9 + 83t^{10} + 111t^{11} + 146t^{12} + 186t^{13} + 236t^{14} \\ &\quad + \cdots \end{aligned}$$

となることが知られている. したがって次数付環 $\bigoplus_{k \in 2\mathbf{Z}} M_k(\Gamma_K)$ の生成元の個数はかなり多いことが伺える.

参考文献

1) E.Freitag, Hilbert modular forms, Springer Verlag, 1990.
2) 土井公二, 三宅敏恒, 保型形式と整数論, 紀伊国屋書店, 1976.
3) E.Z.Goren, J.Number Theory, **90**(2001), 341 − 375.
4) J.-P. セール, 数論講義 (彌永健一訳), 岩波書店, 1979.
5) E.Thomas and A.T. Vasquez, *Compositio Math.*, **48**(1983),139 − 165.

表 1

$Tr(g)=1$				
g	a	b	c	Nf
g_1	−2	−2	−1	1
g_2	−3	−1	−2	1
g_3	−5	−2	−3	1

$Tr(g)=2$				
g	a	b	c	Nf
g_4	−1	−1	−1	1
g_5	−2	−3	−1	1
g_6	−3	−2	−2	7
g_7	−4	−4	−2	8
g_8	−5	−3	−3	13
g_9	−5	−6	−2	1
g_{10}	−6	−2	−4	8
g_{11}	−6	−5	−3	7
g_{12}	−7	−4	−4	13
g_{13}	−8	−3	−5	13
g_{14}	−9	−2	−6	1
g_{15}	−9	−5	−5	1
g_{16}	−10	−4	−6	8
g_{17}	−11	−3	−7	7
g_{18}	−14	−3	−9	1

$Tr(g)=3$				
g	a	b	c	Nf
g_{19}	−2	−1	−2	1
g_{20}	−3	−3	−2	13
g_{21}	−4	−2	−3	13
g_{22}	−4	−5	−2	13
g_{23}	−5	−4	−3	29
g_{24}	−5	−7	−2	7
g_{25}	−6	−3	−4	29
g_{26}	−6	−6	−3	27
g_{27}	−6	−9	−2	1
g_{28}	−7	−2	−5	7
g_{29}	−7	−5	−4	41
g_{30}	−7	−8	−3	13
g_{31}	−8	−4	−5	43
g_{32}	−8	−7	−4	29
g_{33}	−9	−3	−6	27
g_{34}	−9	−6	−5	43
g_{35}	−10	−5	−6	49
g_{36}	−10	−8	−5	13
g_{37}	−11	−4	−7	41
g_{38}	−11	−7	−6	29
g_{39}	−12	−3	−8	13
g_{40}	−12	−6	−7	41
g_{41}	−13	−5	−8	43
g_{42}	−14	−4	−9	29
g_{43}	−14	−7	−8	13
g_{44}	−15	−6	−9	27
g_{45}	−16	−5	−10	29
g_{46}	−17	−4	−11	13
g_{47}	−18	−6	−11	7
g_{48}	−19	−5	−12	13
g_{49}	−22	−5	−14	1

表 2 : F_4, F_6, F_8 の Fourier 係数

$g \diagdown a_g$	F_2 の係数	F_4 の係数	F_8 の係数
g_0	0	0	0
g_1	1	0	0
g_2	1	0	0
g_3	1	0	0
g_4	1	0	0
g_5	1	0	0
g_6	28	1	0
g_7	−40	−2	1
g_8	−14	1	−1
g_9	1	0	0
g_{10}	−40	−2	1
g_{11}	28	1	0
g_{12}	−14	1	−1
g_{13}	−14	1	−1
g_{14}	1	0	0
g_{15}	1	0	0
g_{16}	−40	−2	1
g_{17}	28	1	0
g_{18}	1	0	0
g_{19}	1	0	0
g_{20}	−14	1	−1
g_{21}	−14	1	−1
g_{22}	−14	1	−1
g_{23}	58	−25	100
g_{24}	28	1	0
g_{25}	58	−25	100
g_{26}	−224	23	−107
g_{27}	1	0	0
g_{28}	28	1	0
g_{29}	350	31	32
g_{30}	−14	48	−1
g_{31}	−124	48	−199
g_{32}	58	−25	100
g_{33}	−224	23	−107
g_{34}	−124	48	−199
g_{35}	441	−168	231
g_{36}	−14	1	−1
g_{37}	350	31	32
g_{38}	58	−25	100
g_{39}	−14	1	−1
g_{40}	350	31	32
g_{41}	−124	48	−199
g_{42}	58	−25	100
g_{43}	−14	1	−1
g_{44}	58	23	−107
g_{45}	58	−25	−100
g_{46}	−14	1	−1
g_{47}	28	1	0
g_{48}	−14	1	−1
g_{49}	1	0	0

表 3 : $E_{k,K}$ の Fourier 係数 $a_k(g)$

$g \diagdown a_k(g)$	$a_2(g)$	$a_4(g)$	$a_6(g)$	$a_8(g)$	$a_{10}(g)$	$a_{12}(g)$
g_1	-168	$\frac{1680}{79}$	$-\frac{504}{7393}$	$\frac{3360}{142490119}$	$-\frac{1848}{1141452324871}$	$\frac{65520}{2101941875088322867}$
g_2	-168	$\frac{1680}{79}$	$-\frac{504}{7393}$	$\frac{3360}{142490119}$	$-\frac{1848}{1141452324871}$	$\frac{65520}{2101941875088322867}$
g_3	-168	$\frac{1680}{79}$	$-\frac{504}{7393}$	$\frac{3360}{142490119}$	$-\frac{1848}{1141452324871}$	$\frac{65520}{2101941875088322867}$
g_4	-168	$\frac{1680}{79}$	$-\frac{504}{7393}$	$\frac{3360}{142490119}$	$-\frac{1848}{1141452324871}$	$\frac{65520}{2101941875088322867}$
g_5	-168	$\frac{1680}{79}$	$-\frac{504}{7393}$	$\frac{3360}{142490119}$	$-\frac{1848}{1141452324871}$	$\frac{65520}{2101941875088322867}$
g_6	-1344	$\frac{577920}{79}$	$-\frac{8471232}{7393}$	$\frac{2767107840}{142490119}$	$-\frac{74573467584}{1141452324871}$	$\frac{129554448266889}{2101941875088322867}$
g_7	-1512	$\frac{861840}{79}$	$-\frac{16515576}{7393}$	$\frac{7046434080}{142490119}$	$-\frac{24803436319}{1141452324871}$	$\frac{562812514533360}{2101941875088322867}$
g_8	-2352	$\frac{3692640}{79}$	$-\frac{187132176}{7393}$	$\frac{210835020480}{142490119}$	$-\frac{19597114843152}{1141452324871}$	$\frac{117422349017369760}{2101941875088322867}$
g_9	-168	$\frac{1680}{79}$	$-\frac{504}{7393}$	$\frac{3360}{142490119}$	$-\frac{1848}{1141452324871}$	$\frac{65520}{2101941875088322867}$
g_{10}	-1512	$\frac{861840}{79}$	$-\frac{16515576}{7393}$	$\frac{7046434080}{142490119}$	$-\frac{248034363192}{1141452324871}$	$\frac{562812514533360}{2101941875088322867}$
g_{11}	-1344	$\frac{577920}{79}$	$-\frac{8471232}{7393}$	$\frac{2767107840}{142490119}$	$-\frac{74573467584}{1141452324871}$	$\frac{129554448266880}{2101941875088322867}$
g_{12}	-2352	$\frac{3692640}{79}$	$-\frac{187132176}{7393}$	$\frac{210835020480}{142490119}$	$-\frac{19597114843152}{1141452324871}$	$\frac{117422349017369760}{2101941875088322867}$
g_{13}	-2352	$\frac{3692640}{79}$	$-\frac{187132176}{7393}$	$\frac{210835020480}{142490119}$	$-\frac{19597114843152}{1141452324871}$	$\frac{117422349017369760}{2101941875088322867}$
g_{14}	-168	$\frac{1680}{79}$	$-\frac{504}{7393}$	$\frac{3360}{142490119}$	$-\frac{1848}{1141452324871}$	$\frac{65520}{2101941875088322867}$
g_{15}	-168	$\frac{1680}{79}$	$-\frac{504}{7393}$	$\frac{3360}{142490119}$	$-\frac{1848}{1141452324871}$	$\frac{65520}{2101941875088322867}$
g_{16}	-1512	$\frac{861840}{79}$	$-\frac{16515576}{7393}$	$\frac{7046434080}{142490119}$	$-\frac{248034363192}{1141452324871}$	$\frac{562812514533360}{2101941875088322867}$
g_{17}	-1344	$\frac{577920}{79}$	$-\frac{8471232}{7393}$	$\frac{2767107840}{142490119}$	$-\frac{74573467584}{1141452324871}$	$\frac{129554448266880}{2101941875088322867}$
g_{18}	-168	$\frac{1680}{79}$	$-\frac{504}{7393}$	$\frac{3360}{142490119}$	$-\frac{1848}{1141452324871}$	$\frac{65520}{2101941875088322867}$
g_{19}	-168	$\frac{1680}{79}$	$-\frac{504}{7393}$	$\frac{3360}{142490119}$	$-\frac{1848}{1141452324871}$	$\frac{65520}{2101941875088322867}$
g_{20}	-2352	$\frac{3692640}{79}$	$-\frac{187132176}{7393}$	$\frac{210835020480}{142490119}$	$-\frac{19597114843152}{1141452324871}$	$\frac{117422349017369760}{2101941875088322867}$
g_{21}	-2352	$\frac{3692640}{79}$	$-\frac{187132176}{7393}$	$\frac{210835020480}{142490119}$	$-\frac{19597114843152}{1141452324871}$	$\frac{117422349017369760}{2101941875088322867}$
g_{22}	-2352	$\frac{3692640}{79}$	$-\frac{187132176}{7393}$	$\frac{210835020480}{142490119}$	$-\frac{19597114843152}{1141452324871}$	$\frac{117422349017369760}{2101941875088322867}$
g_{23}	-5040	$\frac{40975200}{79}$	$-\frac{10337619600}{7393}$	$\frac{57959584401600}{142490119}$	$-\frac{26809205763407760}{1141452324871}$	$\frac{799377399849045981600}{2101941875088322867}$
g_{24}	-1344	$\frac{577920}{79}$	$-\frac{8471232}{7393}$	$\frac{2767107840}{142490119}$	$-\frac{74573467584}{1141452324871}$	$\frac{129554448266880}{2101941875088322867}$
g_{25}	-5040	$\frac{40975200}{79}$	$-\frac{10337619600}{7393}$	$\frac{57959584401600}{142490119}$	$-\frac{26809205763407760}{1141452324871}$	$\frac{799377399849045981600}{2101941875088322867}$
g_{26}	-4704	$\frac{33069120}{79}$	$-\frac{7231849632}{7393}$	$\frac{35146786765440}{142490119}$	$-\frac{14092104152257824}{1141452324871}$	$\frac{364229648320717932480}{2101941875088322867}$
g_{27}	-168	$\frac{1680}{79}$	$-\frac{504}{7393}$	$\frac{3360}{142490119}$	$-\frac{1848}{1141452324871}$	$\frac{65520}{2101941875088322867}$
g_{28}	-1344	$\frac{577920}{79}$	$-\frac{8471232}{7393}$	$\frac{2767107840}{142490119}$	$-\frac{74573467584}{1141452324871}$	$\frac{129554448266880}{2101941875088322867}$
g_{29}	-7056	$\frac{115788960}{79}$	$-\frac{58391525808}{7393}$	$\frac{654374360243520}{142490119}$	$-\frac{605001814760041776}{1141452324871}$	$\frac{36057558158048597919840}{2101941875088322867}$
g_{30}	-2352	$\frac{3692640}{79}$	$-\frac{187132176}{7393}$	$\frac{210835020480}{142490119}$	$-\frac{19597114843152}{1141452324871}$	$\frac{117422349017369760}{2101941875088322867}$
g_{31}	-7392	$\frac{133573440}{79}$	$-\frac{74092255776}{7393}$	$\frac{913310533322880}{142490119}$	$-\frac{928791146859287712}{1141452324871}$	$\frac{60887325810154511828160}{2101941875088322867}$
g_{32}	-5040	$\frac{40975200}{79}$	$-\frac{10337619600}{7393}$	$\frac{57959584401600}{142490119}$	$-\frac{26809205763407760}{1141452324871}$	$\frac{799377399849045981600}{2101941875088322867}$
g_{33}	-4704	$\frac{33069120}{79}$	$-\frac{7231849632}{7393}$	$\frac{35146786765440}{142490119}$	$-\frac{14092104152257824}{1141452324871}$	$\frac{364229648320717932480}{2101941875088322867}$
g_{34}	-7392	$\frac{133573440}{79}$	$-\frac{74092255776}{7393}$	$\frac{913310533322880}{142490119}$	$-\frac{928791146859287712}{1141452324871}$	$\frac{60887325810154511828160}{2101941875088322867}$
g_{35}	-9576	$\frac{198228240}{79}$	$-\frac{142375996728}{7393}$	$\frac{2278832291880480}{142490119}$	$-\frac{3009308403511977336}{1141452324871}$	$\frac{256171475232711825237360}{2101941875088322867}$
g_{36}	-2352	$\frac{3692640}{79}$	$-\frac{187132176}{7393}$	$\frac{210835020480}{142490119}$	$-\frac{19597114843152}{1141452324871}$	$\frac{117422349017369760}{2101941875088322867}$
g_{37}	-7056	$\frac{115788960}{79}$	$-\frac{58391525808}{7393}$	$\frac{654374360243520}{142490119}$	$-\frac{605001814760041776}{1141452324871}$	$\frac{36057558158048597919840}{2101941875088322867}$
g_{38}	-5040	$\frac{40975200}{79}$	$-\frac{10337619600}{7393}$	$\frac{57959584401600}{142490119}$	$-\frac{26809205763407760}{1141452324871}$	$\frac{799377399849045981600}{2101941875088322867}$
g_{39}	-2352	$\frac{3692640}{79}$	$-\frac{187132176}{7393}$	$\frac{210835020480}{142490119}$	$-\frac{19597114843152}{1141452324871}$	$\frac{117422349017369760}{2101941875088322867}$
g_{40}	-7056	$\frac{115788960}{79}$	$-\frac{58391525808}{7393}$	$\frac{654374360243520}{142490119}$	$-\frac{605001814760041776}{1141452324871}$	$\frac{36057558158048597919840}{2101941875088322867}$
g_{41}	-7392	$\frac{133573440}{79}$	$-\frac{74092255776}{7393}$	$\frac{913310533322880}{142490119}$	$-\frac{928791146859287712}{1141452324871}$	$\frac{60887325810154511828160}{2101941875088322867}$
g_{42}	-5040	$\frac{40975200}{79}$	$-\frac{10337619600}{7393}$	$\frac{57959584401600}{142490119}$	$-\frac{26809205763407760}{1141452324871}$	$\frac{799377399849045981600}{2101941875088322867}$
g_{43}	-2352	$\frac{3692640}{79}$	$-\frac{187132176}{7393}$	$\frac{210835020480}{142490119}$	$-\frac{19597114843152}{1141452324871}$	$\frac{117422349017369760}{2101941875088322867}$
g_{44}	-4704	$\frac{33069120}{79}$	$-\frac{7231849632}{7393}$	$\frac{35146786765440}{142490119}$	$-\frac{14092104152257824}{1141452324871}$	$\frac{364229648320717932480}{2101941875088322867}$
g_{45}	-5040	$\frac{40975200}{79}$	$-\frac{10337619600}{7393}$	$\frac{57959584401600}{142490119}$	$-\frac{26809205763407760}{1141452324871}$	$\frac{799377399849045981600}{2101941875088322867}$
g_{46}	-2352	$\frac{3692640}{79}$	$-\frac{187132176}{7393}$	$\frac{210835020480}{142490119}$	$-\frac{19597114843152}{1141452324871}$	$\frac{117422349017369760}{2101941875088322867}$
g_{47}	-1344	$\frac{577920}{79}$	$-\frac{8471232}{7393}$	$\frac{2767107840}{142490119}$	$-\frac{74573467584}{1141452324871}$	$\frac{129554448266880}{2101941875088322867}$
g_{48}	-2352	$\frac{3692640}{79}$	$-\frac{187132176}{7393}$	$\frac{210835020480}{142490119}$	$-\frac{19597114843152}{1141452324871}$	$\frac{117422349017369760}{2101941875088322867}$
g_{49}	-168	$\frac{1680}{79}$	$-\frac{504}{7393}$	$\frac{3360}{142490119}$	$-\frac{1848}{1141452324871}$	$\frac{65520}{2101941875088322867}$