

近似的理想重点サンプリング・シミュレーション法に基づく 構造破損確率推定法

米澤政昭*, 奥田昇也**, 小林宏彰***

Structural Failure Probability Estimation Based on Quasi Ideal Importance Sampling Simulation

Masaaki YONEZAWA*, Shoya OKUDA** and Hiroaki KOBAYASHI***

This paper describes a quasi ideal importance sampling simulation combined with the conditional expectation method in a simulation-based structural reliability estimation. The marginal probability densities of a quasi ideal importance sampling are constructed numerically. The ranges of the basic random variables are split into several segments and the conditional failure probabilities are calculated at the center of the respective segments and the conditional failure probabilities are determined and the structural failure probability is evaluated approximately by a piecewise integration. The marginal densities of the quasi ideal importance sampling are so determined as to be proportional to the conditional failure probabilities at the respective segments and the structural failure probability evaluated approximately.

As the numerical examples, the quasi ideal importance sampling simulations combined with the conditional expectation are executed to estimate the failure probabilities of structures with various limit state functions and the results are compared with those estimated by other simulation approaches. The proposed method gives the failure probability estimations accurately with shorter processing time.

Key word: Structural failure probability, Conditional expectation, Importance sampling, Variance reduction.

1. 序論

構造システムの信頼性解析は、経験による決定論的な取り扱いがなされてきたが、大規模な構造システムに対しては、十分な対応が出来ない。そこで、Freudenthal[1]は構造システムに関わる各要因の不確実性を考慮し、確率論に基づいて構造システムの信頼性解析を行うことを提案した。確率論的手法では、構造システムに働く外部荷重や部材強度は確定値ではなく、統計的変動をもつ確率変数として定義し、構造システムの応答等を数理的にモデル化して取り扱う。

構造破損確率は、構造システムが安全状態か破損状態かを判定するために、モデル化して導入される限界状態関数が負となる確率として評価される。しかし、構造破損確率を求める積分は、一般に多重積分で表され、解析的にその解を厳密に求めることは困難である場合が多いため、破損確率を算定する近似的手法が多く開発されて

平成19年6月29日受理

* 機械工学科

** 近畿大学工業高等専門学校総合システム工学科

*** 大学院総合理工学研究科メカニクス系工学専攻

きた。

FOSM法やAFOSM法などの線形化近似法[2]は、簡易な方法であるが、限界状態関数の線形性が高い場合には、破損確率の評価に無視の出来ない誤差が生じる。一方、シミュレーション法は、複雑な解析の手法を必要とせず、近似による誤差を伴わない点で、有効であると考えられる。最も一般的な原始的モンテカルロ・シミュレーションでは、限界状態関数が既知であれば、破損確率の推定を厳密に取り扱うことができる。しかし、構造システムの破損確率は一般に微小な値であるので、精度よい推定量を得るためには、非常に多くのサンプル数を必要とし、計算時間が膨大になるという問題が生じる。

シミュレーション法を適用する場合には、少ないサンプル数で精度のよい破損確率の推定が可能であること、生成サンプルが有効に破損確率算出に活用されるようにすることが重要となる。

少ないサンプルで効率的にシミュレーションを行うための方法として分散減少法が提案されてきた[3-11]。その中の1つに重点サンプリング法がある[8]。重点サンプリング法は、破損に寄与する最も重要な座標点（通常、設計点座標とよばれる）の近傍に、より多くのサンプル

を集中して生成し、破損確率を求める方法である。重点サンプリング法では、サンプル生成密度となる関数をどのように決定するかが問題となる。

本研究では、基本確率変数が正規分布に従う場合について、条件付期待値法に基づくシミュレーションを適用した構造破損確率の推定法を取り扱う。一般に、条件付期待値法に基づくシミュレーションでは、生成サンプルが全て、破損確率推定計算に活用されるという利点がある。さらに、理想的なサンプル生成関数を重点サンプリング密度関数として近似的に構成し、重点サンプリング法を条件付期待値法に結合して適用し、シミュレーションの効率を高めることを提案する。

種々の計算例により、原始的モンテカルロ・シミュレーション(MCS と略記する)、条件付期待値法のみに基づくシミュレーション法(CE と略記する)、理想的なサンプル生成関数を近似的に構成し、重点サンプリング密度関数とする重点サンプリングを結合した条件付期待値法に基づくシミュレーション法(AI-ICE と略記する)による破損確率の推定量の精度、その分散減少効果について比較検討する。

2. シミュレーションによる破損確率推定

2.1 構造破損確率の定義

k 次元の確率変数ベクトル $\mathbf{U}=(U_1, U_2, \dots, U_k)^T$ を、互いに統計的に独立で時間に依存しない標準化された確率変数とし、その結合確率密度関数を $f_U(\mathbf{U})$ とすると、一般に構造システムの破損確率 P_f は次式の積分で与えられる。

$$P_f = \text{prob} \left[\bigcup_{j=1}^m (g_{U_j}(\mathbf{U}) \leq 0) \right] = \int_{D_f} f_U(\mathbf{U}) d\mathbf{U} \quad (1)$$

ここで、 $g_{U_j}(\mathbf{U})$ は、 j 番目の破損モードに対する限界状態関数 ($j=1, 2, \dots, m$)、 D_f は構造システムの破損領域である。

$$D_f = \left\{ \mathbf{U} \mid \bigcup_{j=1}^m (g_{U_j}(\mathbf{U}) \leq 0) \right\} \quad (2)$$

システムが破損状態にあるかどうかを判別する指標関数 $I_{D_f}[\cdot]$ を次のように定義する。

$$I_{D_f}[\mathbf{U}] = \begin{cases} 1: & \mathbf{U} \in D_f \\ 0: & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

この指標関数 $I_{D_f}[\cdot]$ を式(1)に導入すると、破損確率積分式は次式で表され、式(4)は確率密度関数 $f_U(\mathbf{u})$ に関する $I_{D_f}[\cdot]$ の期待値として表される。

$$P_f = \int_{all \mathbf{u}} I_{D_f}[\mathbf{u}] f_U(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = E_f [I_{D_f}[\mathbf{u}]] \quad (4)$$

モンテカルロ・シミュレーションによる破損確率の推定量は、基本確率変数の結合確率密度関数 $f_U(\mathbf{U})$ に従うサンプル $\mathbf{u}^{(i)}$ ($i=1, 2, \dots, N$) を生成して、次式を用いて求められる。

$$\hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_f^{(i)}, \quad P_f^{(i)} = I_{D_f}[\mathbf{u}^{(i)}] \quad (5)$$

ここで、 N はシミュレーションの総サンプル数を表す。また、破損確率の推定量の分散およびその変動係数は、次式により求められる。

$$\text{Var}[\hat{P}_f] = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (P_f^{(i)} - \hat{P}_f)^2 \quad (6)$$

$$\text{C\hat{o}v}[\hat{P}_f] = \sqrt{\text{Var}[\hat{P}_f]} / \hat{P}_f \quad (7)$$

以上のシミュレーションにおけるサンプル生成は、基本確率変数 \mathbf{U} の全定義域にわたるので、構造破損確率のような小さい値を精度よく推定するには、非常に多くのサンプルを必要とするという問題がある。これは破損に寄与しないサンプルが多く生成されるためである。次にこの問題に対処する方法について考える。

2.2 条件付期待値法に基づく破損確率の推定

標準化された基本確率変数 \mathbf{U} について任意の l 番目の確率変数 U_l に着目し、これを制御変数とする。この制御変数を除く $k-1$ 個の変数をサンプリング変数として $\mathbf{U}_S=(U_1, U_2, \dots, U_{l-1}, U_{l+1}, \dots, U_k)^T$ とおく。

確率変数 \mathbf{U}_S のある実現値ベクトル \mathbf{u}_S に対応する限界状態曲面上の点として制御変数 u_l を求め、その点より破損領域内の累積確率を条件付破損確率 $P_f(u_l | \mathbf{u}_S)$ として計算すると、構造破損確率は次式のように $f_{U_S}(\mathbf{U}_S)$ に関する $P_f(u_l | \mathbf{u}_S)$ の期待値で表される [12,13]。

$$\begin{aligned} P_f &= \text{prob}[g_U(\mathbf{U}) \leq 0] = \int_{D_f} f_U(\mathbf{U}) d\mathbf{U} \\ &= \int_{all \mathbf{u}_S} P_f(u_l | \mathbf{u}_S) f_{U_S}(\mathbf{u}_S) d\mathbf{u}_S \\ &= E_{f_{U_S}} [P_f(u_l | \mathbf{u}_S)] \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 $f_{U_l}(u_l)$ は確率変数 u_l の確率密度関数、 $f_{U_S}(\mathbf{u}_S)$ は確率変数 \mathbf{U}_S の結合確率密度関数、 $P_f(u_l | \mathbf{u}_S)$ は $\mathbf{U}_S=\mathbf{u}_S$ に対応する制御変数 u_l に対して限界状態関数が負となる条件付破損確率である。

シミュレーション計算過程では、式(8)の期待値を標本平均から求める。すなわち、 $f_{U_S}(\mathbf{u}_S)$ に従うサンプリング変数ベクトル $\mathbf{u}_S^{(i)}$ を生成し、これに対応する限界状態曲面上の点となる制御変数 $u_l^{(i)}$ を求め、その点を基準に破損領域内の累積確率を条件付破損確率 $P_f(u_l^{(i)} | \mathbf{u}_S^{(i)})$ とすると、構造破損確率の推定量とその分散は次式で与えられる。

$$\hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_f(u_l^{(i)} | \mathbf{u}_S^{(i)}) \quad (9)$$

$$\text{Var}[\hat{P}_f] = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (P_f(u_l^{(i)} | \mathbf{u}_S^{(i)}) - \hat{P}_f)^2 \quad (10)$$

以下に、条件付期待値法に基づくシミュレーションによる破損確率の推定法について述べる。限界状態関数が2変数(2次元)の単一破損モードの場合について考える。

あるサンプリング変数 $u_1^{(i)}$ に対する限界状態曲面上の制御変数 $u_2^{(i)}$ を $g_U(u_2^{(i)} | u_1^{(i)})=0$ から求め、その点より破損領域内の累積確率を条件付破損確率として求める。

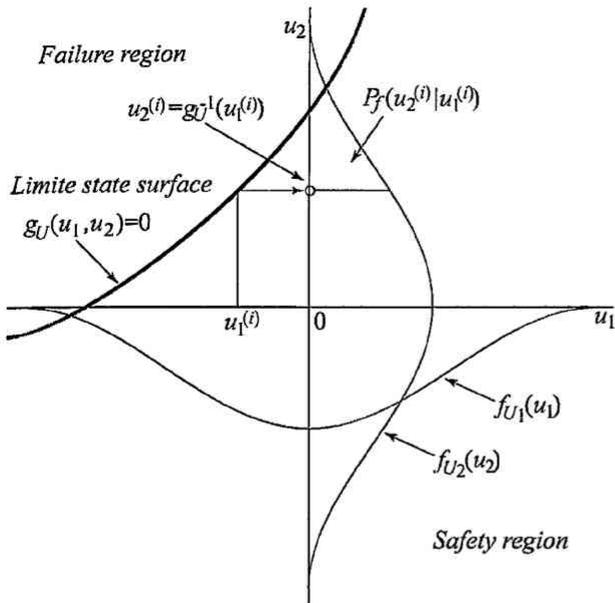


Fig. 1 A conditional failure probability for a sample variable $u_1^{(i)}$

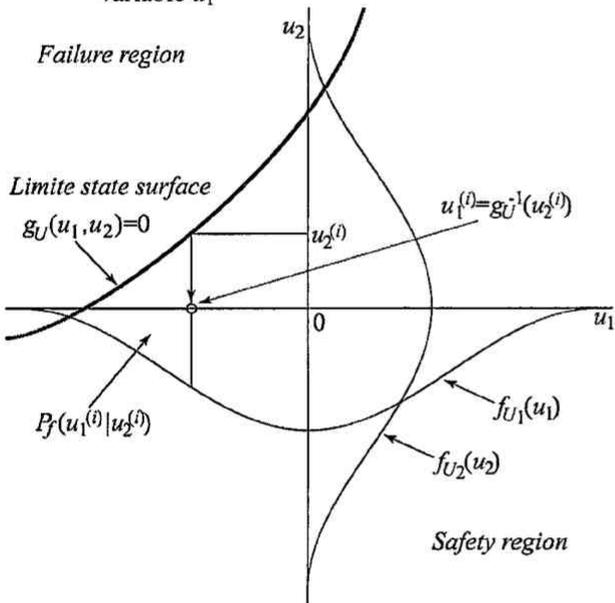


Fig. 2 A conditional failure probability for a sample variable $u_2^{(i)}$

条件付破損確率を求める際に、 $U_2=u_2^{(i)}$ を積分範囲の下
 下限値とする上側確率を採るか、積分範囲の上限値とする
 下側確率を採るかの判定は、次の方法で行う。破損領域
 は限界状態関数式 $g_U(u_1, u_2) \leq 0$ であるから、制御変数 u_2
 とサンプリング変数 u_1 を左辺と右辺にわけ、その大小関
 係によって以下のように判定する。

- i) $u_2 \leq g_U^{-1}(u_1)$ の場合、下側確率
- ii) $u_2 \geq g_U^{-1}(u_1)$ の場合、上側確率

同じ限界状態関数に対して制御変数をそれぞれ u_2, u_1 と
 した場合の条件付破損確率を Fig. 1, Fig. 2 に示す。た
 だし、 $g_U(u_1, u_2) \leq 0$ のとき $u_2 \geq g_U^{-1}(u_1)$ を満たすものとし、
 これは同時に $u_1 \leq g_U^{-1}(u_2)$ を満たすことをも意味する。

Fig. 1, Fig. 2 は、 $u_2^{(i)}$ を積分範囲の下
 下限値とする上側確率、 $u_1^{(i)}$ を上
 限値とする下側確率が、それぞれ条件付破
 損確率となる。条件付期待値法に基づくシミュレーショ

ンでは、サンプルは全て破損確率計算に利用される。

2.3 重点サンプリングを結合した条件付期待値法に基
 づく破損確率の推定

条件付期待値法に基づくシミュレーションでは、生成
 サンプルは全て破損確率計算に利用されるが、破損確率
 推定に最も寄与する領域にサンプルを集中して生成すれ
 ば、より効率的な分散減少効果が得られると考えられる。
 そこで、式(8)に重点サンプリング密度関数 $h_{US}(u_S)$ を導
 入する。これによって破損確率は、 $P_f(u_1|u_S)f_{US}(u_S)/h_{US}(u_S)$
 の重点サンプリング密度関数 $h_{US}(u_S)$ に関する期待値で
 表される。

$$\begin{aligned}
 P_f &= \int_{all u_S} P_f(u_1 | u_S) f_{US}(u_S) du_S \\
 &= \int_{all u_S} P_f(u_1 | u_S) \frac{f_{US}(u_S)}{h_{US}(u_S)} h_{US}(u_S) du_S \quad (11) \\
 &= E_{h_{US}} \left[P_f(u_1 | u_S) \frac{f_{US}(u_S)}{h_{US}(u_S)} \right]
 \end{aligned}$$

構造破損確率の推定量と分散は次式で求められる。

$$\hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ P_f(u_1^{(i)} | u_S^{(i)}) \frac{f_{US}(u_S^{(i)})}{h_{US}(u_S^{(i)})} \right\} \quad (12)$$

$$\text{Var}[\hat{P}_f] = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \left\{ P_f(u_1^{(i)} | u_S^{(i)}) \frac{f_{US}(u_S^{(i)})}{h_{US}(u_S^{(i)})} - \hat{P}_f \right\}^2 \quad (13)$$

重点サンプリング密度関数に従うサンプルに対する条
 件付破損確率の概念図を Fig. 3 に示す。この場合計算式
 は式(12)から解るように、破損確率の推定量を求める標
 本値の各項に、修正項 $f_{U1}(u_1^{(i)})/h_{U1}(u_1^{(i)})$ を乗じたもの
 となる。

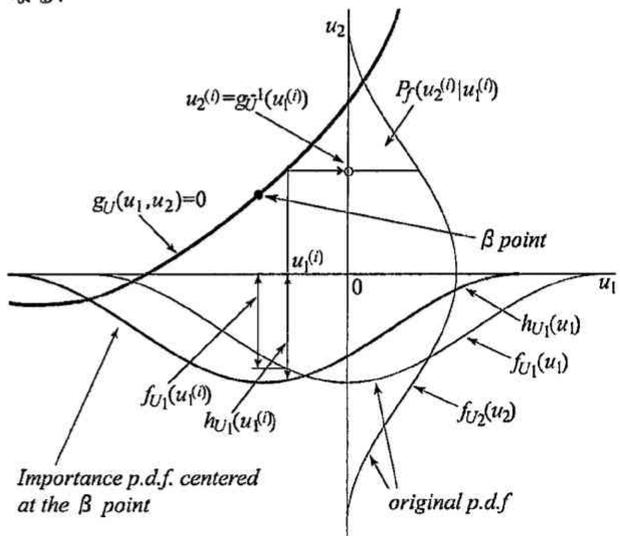


Fig. 3 A conditional failure probability for a sample
 variable $u_1^{(i)}$ generated by an ordinary
 importance sampling p. d. f. centered at the β
 point of u_2 .

2.4 近似的理想重点サンプリングを結合した条件付期待値に基づく破損確率の推定

式(11)において、重点サンプリング密度関数 $h_{US}(u_S)$ を式(14)のように構成すると、式(11)は P_f そのものの期待値となり、式(12)による破損確率の推定量はサンプルの数に関わらず、常に真の P_f を与える。

$$h_{US}(u_S) = \frac{P_f(u_l | u_S) f_{US}(u_S)}{P_f} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} P_f &= \int_{\text{all } u_S} P_f(u_l | u_S) \frac{f_{US}(u_S)}{h_{US}(u_S)} h_{US}(u_S) du_S \\ &= E_{h_{US}} \left[P_f(u_l | u_S) \frac{f_{US}(u_S)}{h_{US}(u_S)} \right] \\ &= E_{h_{US}} [P_f] \end{aligned} \quad (15)$$

しかし、式(14)は今求めようとしている未知の破損確率 P_f を含んでいるので、これをサンプリング密度関数として構成することは不可能である。式(11)からわかるように、式(14)の分子の条件付破損確率と確率密度関数の積の全領域の積分は、破損確率を与える。そこで、本研究では、条件付破損確率と確率密度関数の積の区分積分によって破損確率の近似値を求め、離散的に重点サンプリング密度を構成することを考える(これを以下では、近似的理想重点サンプリング密度という)。

破損確率を推定するシミュレーション過程に入る前に、準備段階として、近似的理想重点サンプリング密度の分布を調べる。各基本確率変数の定義域を一定区間幅 Δu で m 個に分割し、各区間中点における式(14)の分子を構成する条件付破損確率と確率密度関数の積の値に基づいて、近似的理想重点サンプリング密度 $h_{AI}(u_S)$ の分布を離散的に決定するという方法をとる。

基本確率変数は互いに独立であると仮定すると、近似的理想重点サンプリング密度は、制御変数 u_1 を除く、サンプリング変数の周辺密度 $h_{AI_j}(u_j)$ ($j=1, 2, \dots, l-1, l+1, \dots, k$) の積で与えられる。

$$h_{AI}(u_S) \Delta u = \prod_{j=1, j \neq l}^k \{ h_{AI_j}(u_j) \Delta u \} \quad (16)$$

以下では、準備段階で近似的理想重点サンプリング周辺密度分布を離散的に決定し、それに基づいて、重点サンプリング・シミュレーションを実施し、破損確率を推定する手順を示す。説明を簡単にするために、確率変数 u_1, u_2, u_3 の3変数の問題を考える。

3変数のうち、 u_3 を制御変数とし、サンプリング変数 u_1, u_2 の範囲を $[-5.0 \sim 5.0]$ 、分割数を $m=10$ とし、各分割区間の中点座標を $(u_1^{(p)}, u_2^{(q)})$ ($p=1, 2, \dots, 10$), ($q=1, 2, \dots, 10$) とする。近似的理想重点サンプリング密度の点 $(u_1^{(p)}, u_2^{(q)})$ における確率は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} & h_{AI}(u_1^{(p)}, u_2^{(q)}) \Delta u^2 \\ &= \frac{P_f(u_3 | (u_1^{(p)}, u_2^{(q)})) f_{US}(u_1^{(p)}, u_2^{(q)}) \Delta u^2}{\sum_{p=1}^{10} \sum_{q=1}^{10} \{ P_f(u_3 | (u_1^{(p)}, u_2^{(q)})) f_{US}(u_1^{(p)}, u_2^{(q)}) \Delta u^2 \}} \end{aligned} \quad (17)$$

このとき、変数 u_1, u_2 に対する各周辺確率密度 $h_{AI1}(u_1)$, $h_{AI2}(u_2)$ の、点 $(u_1^{(p)}, u_2^{(q)})$ における確率は、 u_2, u_1 に関する区分積分によって、それぞれ次式で与えられる。

$$h_{AI1}(u_1^{(p)}) \Delta u = \sum_{q=1}^{10} \{ h_{AI}(u_1^{(p)}, u_2^{(q)}) \Delta u^2 \} \quad (18)$$

$$h_{AI2}(u_2^{(q)}) \Delta u = \sum_{p=1}^{10} \{ h_{AI}(u_1^{(p)}, u_2^{(q)}) \Delta u^2 \}$$

近似的理想重点サンプリング・シミュレーション法の手順は、次のとおりである。

Step 1 Fig. 4 に示すように、各区間中点における条件付破損確率 $P_f(u_3 | (u_1^{(p)}, u_2^{(q)}))$ と基本確率密度関数 $f_{US}(u_1^{(p)}, u_2^{(q)})$ の積を計算する。

Step 2 Fig. 5 に示すように、各区間中点における条件付破損確率と確率密度関数の積を計算する。(式(18)の分子)

$$P_f(u_3 | (u_1^{(p)}, u_2^{(q)})) f_{US}(u_1^{(p)}, u_2^{(q)}) \Delta u^2 \quad (19)$$

Step 3 式(17)の分母の値を式(19)の u_1, u_2 に関する2重区分積分によって求め、その値で式(19)を割り、さらに式(18)のように区分積分して、近似的理想重点サンプリング周辺密度構成する。ただし、Fig. 6 に示す各周辺密度の累積分布の面積 A_1, A_2 は1となる。

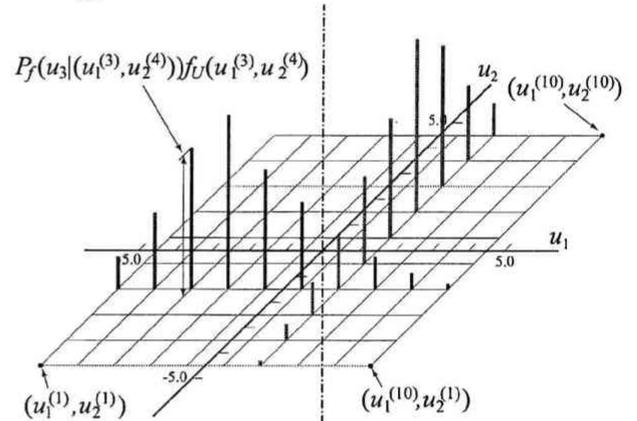


Fig. 4 The conditional failure probabilities multiplied by the probability densities at the mid-point of each segment.

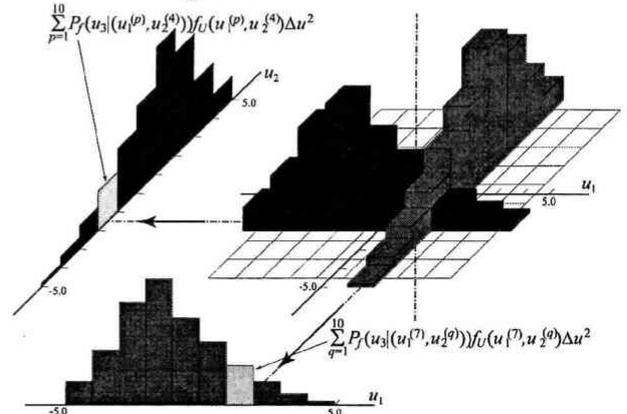


Fig. 5 An image of probability content at each segment and a histogram of marginal probability density distributions.

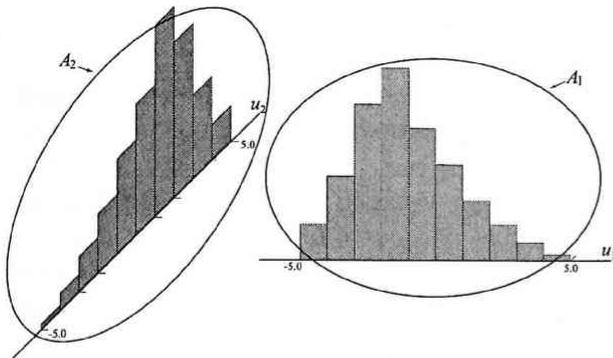


Fig. 6 A histogram of a quasi ideal marginal probability density distributions.

Step 4 構成された近似的理想重点サンプリング周辺密度の累積分布に逆関数法を適用し、重点サンプリングのサンプル生成を行う。

Step 5 生成したサンプルを用いて、式(12)により破損確率の推定量を求める。

3. シミュレーション計算例

提案手法の有効性を検討するために、以下に示す限界状態関数をもつ構造システムの破損確率について、種々のシミュレーションに基づく推定を行い、それぞれ破損確率の推定量の変動係数が $Cov \leq 0.01$ となるまでに要するサンプル数 N と所要時間 CPU, またそのときの破損確率の推定量 P_f を比較する。

標準正規分布に従う乱数は、一様乱数としては超天文学的周期をもち、すぐれた統計的性質をもつとされる Mersenne Twister(MT)乱数[17]を用いた Box-Müller 法[2]により変換して生成した。

計算例で、厳密解が与えられていない構造システムの場合、サンプル数 $N=10^9$ の原始的モンテカルロ・シミュレーションに基づく推定結果を厳密解とする。

3.1 問題の設定

数値計算例として、以下に示す限界状態関数(群)をもつ4種類の構造システムの信頼性解析を行う。各基本確率変数の統計的条件はそれぞれ示すとおりである。

Case 1

$$\begin{aligned}
 g(\mathbf{X}) &= X_1 X_2 - X_3 & (20) \\
 X_1 &: N(2,800, 350^2, 0.125) \\
 X_2 &: N(800, 40^2, 0.05) \\
 X_3 &: N(1,000,000, 200,000^2, 0.2) \\
 \beta &= 3.53 \\
 \text{Exact : } P_f &= 2.180 \times 10^{-4}
 \end{aligned}$$

Case 2

$$\begin{aligned}
 g_1(\mathbf{X}) &= 3.0769X_1 - X_2 + 13.461 \\
 g_2(\mathbf{X}) &= -2.2X_1 - X_2 + 11.7 \\
 g_3(\mathbf{X}) &= -4.3X_1 - X_2 + 20.5 & (21) \\
 X_1 &: N(0, 1^2), X_2 : N(0, 1^2) \\
 \beta_1 &= 4.161, \beta_2 = 4.841, \beta_3 = 4.644 \\
 \text{Exact : } P_f &= 1.761 \times 10^{-5}
 \end{aligned}$$

Case 3

$$\begin{aligned}
 g_1(\mathbf{M}, \mathbf{W}) &= 2M_1 + 2M_3 - 4.5W \\
 g_2(\mathbf{M}, \mathbf{W}) &= 2M_1 + M_2 + M_3 - 4.5W \\
 g_3(\mathbf{M}, \mathbf{W}) &= M_1 + M_2 + 2M_3 - 4.5W \\
 g_4(\mathbf{M}, \mathbf{W}) &= M_1 + 2M_2 + M_3 - 4.5W & (22) \\
 M_i &: N(134.9, 6.745^2, 0.05) \quad (i=1, 2, 3) \\
 W &: N(50, 15^2, 0.3) \\
 \text{Exact : } P_f &= 5.0612 \times 10^{-6}
 \end{aligned}$$

Case 4

$$\begin{aligned}
 g_1(\mathbf{X}) &= X_1^2 - 0.05X_2 - X_3X_4 + 7.55 \\
 g_2(\mathbf{X}) &= 0.03X_1X_4 - X_2X_3 + 7.2 \\
 g_3(\mathbf{X}) &= -X_1 - X_2 - X_3 - X_4 + 7.0 & (23) \\
 X_i &: N(0, 1^2) \quad (i=1, 2, 3, 4) \\
 \text{Exact : } P_f &= 3.6156 \times 10^{-4} \quad (\text{MCS with } N=10^8)
 \end{aligned}$$

3.2 結果と検討

Case 1 から Case 4 の破損条件に対して、各シミュレーション法で変動係数 $Cov \leq 0.01$ となるのに要したサンプル数 N , 破損確率の推定量 P_f , 所要時間 CPU を Table 1~4 に示す。ただし、サンプル数は、表記数値の 10^3 倍、 P_f は表記数字の 10^{-4} 倍から 10^{-6} 倍である。CPU はシミュレーション開始から終了までの時間(秒)である。

Table 1 Comparison of results for Case 1 ($Cov \leq 0.01$)

method	$N (\times 10^3)$	$P_f (\times 10^{-4})$	CPU(Sec)
MCS	45,854.0	2.18	61.296
CE	3,942.0	2.18	15.187
AI-ICE	2.0	2.11	0.015
Exact		2.18	

Table 2 Comparison of results for Case 2 ($Cov \leq 0.01$)

method	$N (\times 10^3)$	$P_f (\times 10^{-5})$	CPU(Sec)
MCS	567,267.0	1.76	602.406
CE	190,150.0	1.77	369.453
AI-ICE	8.0	1.68	0.031
Exact		1.76	

Table 3 Comparison of results for Case 3 ($Cov \leq 0.01$)

method	$N (\times 10^3)$	$P_f (\times 10^{-6})$	CPU(Sec)
MCS	1,961,999.0	5.10	3,415.859
CE	22.0	4.96	0.093
AI-ICE	3.0	4.95	0.015
Exact	1,000,000.0	5.03	1,792.484

Table 4 Comparison of results for Case 4 ($Cov \leq 0.01$)

method	$N (\times 10^3)$	$P_f (\times 10^{-4})$	CPU(Sec)
MCS	27,632.0	3.62	47.531
CE	10,288.0	3.63	41.609
AI-ICE	221.0	3.73	1.187
Exact	1,000,000.0	3.62	1,807.141

また、AI-ICE に関しては、重点サンプリング密度関数構成に要する時間も含み、サンプル数については、サンプル生成関数を作り終えてから発生させたサンプルの数であり、準備段階でサンプル生成関数構成のために 10 の変数乗のサンプルを必要とする。

Case 3, Case 4 については厳密解が与えられていないので、MCS による $N=10^9$ 回における破損確率の推定量を厳密解としたが、Case 3 については MCS において $\text{Cov} \leq 0.01$ となるのに必要なサンプル数が 10^9 を超えているため、厳密解よりも MCS の推定結果の方が厳密な破損確率に近いと考えられる。このようなことを起こさないために、通常は、MCS で必要なサンプル数よりも多くしたものを厳密解とするが、プログラムの int 型の変数では 10^{10} 以上の値を取扱えないので、このような結果となった。

Case 1 では、サンプル生成関数構成に必要なサンプル数 10^3 を考慮しても、約 1/4 のサンプル数で所定の精度を得られた。また、所要時間は 1/1000 秒程度となった。

Case 2 では、 $X_i (i=1, 2)$ は標準化されており、その破損領域は、Fig. 7 に示すとおりである。サンプル変数を X_1 とした場合、 $X_1=0$ 付近での条件付破損確率 $P_f(X_2|X_1)$ は極めて小さな値となる。そのため、制御変数を X_2 としたときの CE では、収束が遅くなることが想定される。しかし、このような場合においても、AI-ICE では理想的なサンプル生成関数を構成しているため、破損に最も寄与する領域にサンプルを集中させ、それによって比較的少ないサンプル数、所要時間で所定の精度を得ることができたと考えられる。

Case 3 は、サンプル数が MCS の約 $1/10^5$ で CE による推定ができたことから、CE の適用が有効な限界状態関数であったと考えられる。この場合、AI-ICE ではサンプル生成関数構成に 10^4 のサンプル数を必要とするので、CE の約 1/2 のサンプル数を必要としたが、所要時間では大きな差は認められなかった。

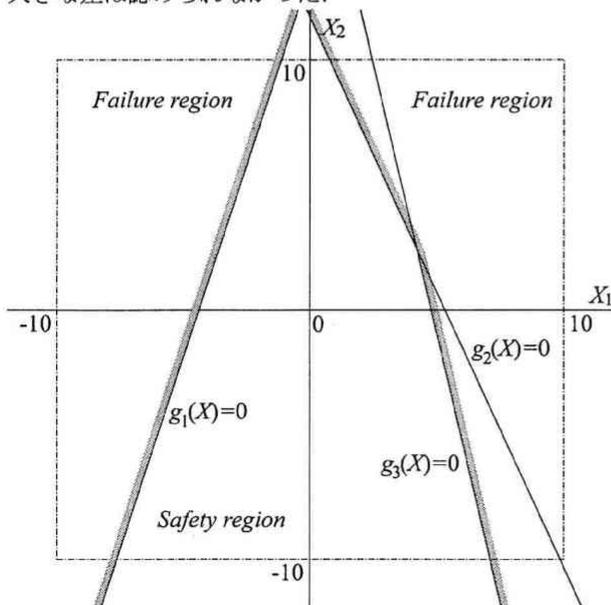


Fig. 7 Limit state surface for Case 2

4. 結論

シミュレーションに基づいて構造システムの破損確率推定を行う場合、条件付期待値法に基づくシミュレーションによる推定法では、大きな分散減少効果を得ることができなかった。この理由として、条件付期待値法に基づくシミュレーションによって生成されるサンプルは、全て破損確率に利用できるが、生成されるサンプルの分布は原始的モンテカルロ・シミュレーションと同じであり、破損確率に寄与する重要な領域へのサンプル生成とはならないことが原因である。そこで、本研究では条件付期待値に基づくシミュレーションに重点サンプリング法を導入し、サンプリング密度関数として近似的理想重点サンプリング密度関数を離散的に構成する手法を提案した。この結果、通常条件付期待値法に基づく推定法に比べて高い分散減少効果を得ることが出来た。しかし、重点サンプリング密度関数として理想的な密度関数を近似的に構成する準備段階で、サンプリング変数の範囲を広く、分割数を多くすれば、より理想的な密度関数に近づくが、そのためにはより多くの計算量が必要となり、重点サンプリング密度関数を構成するための計算時間が長くなる問題がある。そこで、サンプリング変数の範囲、分割数を変えることによって破損確率の推定量、所要時間がどのように変化するかを検討することが重要である。これは今後の課題である。

参考文献

- 1) M. Freudenthal, *Trans. ASCE*, **121** (1956) 1337.
- 2) A. H-S Ang and W. H. Tang, "Probability Concepts in Engineering Planning and Design," Vol. 2, *Decision Risk and Reliability*, John Wiley & Sons, New York (1984) 361.
- 3) G. I. Schuëller and R. Stix, *Structural Safety*, **4** (1987) 293.
- 4) R. Y. Rubinstein, "Simulation and The Monte Carlo Method," John Wiley & Sons (1981) 114.
- 5) U. Bourgund, W. Ouypornprasert, and P. H. W. Prenninger, *Report 19*, Institut für Mechanik, University of Innsbruck, Austria (1986).
- 6) B. M. Ayyub and A. Haldar, *Structural Safety and Reliability, Proceedings of International Conference of Structural Safety and Reliability*, **1** (1985) 17.
- 7) 米澤政昭, 奥田昇也, 朴永太, 日本経営工学会誌, **50** (2000) 408.
- 8) U. Bourgund and C. G. Bucher, *Report 8*, Institut für Mechanik, University of Innsbruck, Austria (1986).
- 9) 奥田昇也, 米澤政昭, 材料(日本材料学会誌), **44** (1995) 517.
- 10) 奥田昇也, 米澤政昭, 邵曉文, 室津義定, 日本機械学会論文集, **A-62** (1996) 2387.
- 11) 朴永太, 奥田昇也, 米澤政昭, 日本機械学会論文集, **A-66** (2000) 2136.

- 12) A. Karamchandani and C. A. Cornell, *Structural Safety*, 11 (1991) 59.
- 13) 奥田昇也, 米澤政昭, 日本機械学会関西支部定時総会講演会, (2006-3).
- 14) G. Fu and F. Moses, *Proceedings of the 1st International Federation of Information Processing WG7. 5 Working Conference*, Aalborg (1987) 141.
- 15) M. Yonezawa, S. Okuda and Y-T. Park, *Proceedings of the 8th International Federation of Information Processing WG7. 5 Working Conference*, Warsaw (1998) 337.
- 16) M. Yonezawa and S. Okuda, *J. School Sci. Eng. Kinki Univ.* **42** (2006) 53
- 17) M. Matsumoto and T. Nishimura, Mersenne Twister, A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo random number generator, *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulations* 8(1), (1998)3. Retrieved from the World Wide Web, <http://www.math.hiroshima-u.ac.jp/~m-mat/MT/mt.html>.