# 有限群の両側剰余類に属する $n$ 乗根について

佐藤 純二*, 淺井 恒信**

# On the $n$-th Roots of a Double Coset of a Finite Group

Junji SATO* and Tsunenobu ASAI**

Let $G$ be a finite group and $H$ a subgroup of $G$. Then for any elements $x$, $y$ of $G$ and an integer $n$, the number of elements of $HxH$ whose $n$-th power are contained in $HyH$ is divisible by the order of $H$.

**Key words:** Congruence, Finite group, Double coset

## 1 序

有限群に係わる合同式には, 部分群の個数に関する Sylow 型合同式や群における方程式の解の個数に関する Frobenius 型合同式の研究が数多くなされている. Frobenius 型合同式としては次の Frobenius の定理がよく知られている ([1] 参照).

**定理** (Frobenius) $G$ を有限群, $x$ を $G$ の任意の元とし, $n$ を任意の整数とする. このとき,

$$\#\{g \in G \mid g^n = x\} \equiv 0 \mod \gcd(|C_G(x)|, n)$$

が成り立つ.

また, Iwasaki 等により次のような Frobenius 型合同式の一種と考えられる合同式が知られている.

$G$ を有限群, $X$ を $G$ の部分集合としたとき, 任意の整数 $n$ に対して,

$$X^{\frac{1}{n}} := \{g \in G \mid g^n \in X\}$$

と集合 $X^{\frac{1}{n}}$ を定義する.

**定理** 1.1(Iwasaki [2]) $G$ を有限群, $H$ を $G$ の部分群とする. このとき,

$$|H^{\frac{1}{n}}| \equiv 0 \mod |H|$$

が成り立つ.

**定理** 1.2(Iwasaki, Chigira and Kamijo [3,4]) $G$ を有限群, $H$ を $G$ の部分群, $x$ を $G$ の任意の元とする. このとき,

$$|HxH \cap H^{\frac{1}{n}}| \equiv 0 \mod |H|$$

が成り立つ.

平成19年6月30日受理
* 大学院総合理工学研究科理学専攻
現在 大阪府立吹田高等学校非常勤講師
** 理学科

Iwasaki により, 定理 1.1 については群指標を用いた証明と置換群的な証明が, 定理 1.2 については置換群的な証明が知られている. Brauer は [1] において, 群上にある同値関係を定義し, それを用いて Frobenius の定理を証明している. その Brauer の手法を用いれば定理 1.1,1.2 も群論的に証明することができる. この論文では, Brauer の手法を用いることにより, 定理 1.1, 定理 1.2 の一般化である次の定理が成り立つことを示す.

**定理** 1.3 $G$ を有限群, $H$ を $G$ の部分群, $x$,$y$ を $G$ の任意の元とする. このとき,

$$|HxH \cap (HyH)^{\frac{1}{n}}| \equiv 0 \mod |H|$$

が成り立つ.

本論文の第 2 章では, Brauer によって考えられた同値類を $H$ 共役類の和集合として捉えなおし, Brauer の手法を考える. 第 3 章では, Iwasaki 型合同式 (定理 1.1,1.2,1.3) の証明と拡張を述べる. 最後に, 第 4 章で定理 1.3 の対称群などの具体的な例をあげる.

## 2 Brauer による手法について

ここでは, Brauer により [1] で導入された手法について紹介する. まず Brauer は群上に次の同値関係を定義している.

**定義** 2.1 $G$ を有限群, $H$ を $G$ の部分群とし, $x$,$y$ を $G$ の任意の元とする.
(i) 全ての整数 $r$ に対して $x^{-r}y^r \in H$ が成り立つ時, $x$ と $y$ は $H$ 同値と呼び, $x \approx_H y$ と表す.
(ii) $H$ のある元 $h$ が存在して, 全ての整数 $r$ に対して $x^{-r}hy^r \in H$ が成り立つ時, $x$ と $y$ は弱い $H$ 同値と呼び $x \approxeq_H y$ と表す.

**命題** 2.2 $G$ を有限群, $H$ を $G$ の部分群とし, $x$ を $G$ の任意の元とする. このとき, $\#\{y \in G \mid x \approxeq_H y\} = |H|$ が成り立つ.

弱い $H$ 同値類に関する命題 2.2 は Brauer の手法の中心的な役割をはたしている. Brauer の導入した弱い $h$ 同

値類を, ここでは $H$ 共役類の和集合で表せる弱い $H$ 共役類と捉えて Brauer の手法を考える.

**定義 2.3** $G$ を有限群, $H$ を $G$ の部分群とする. $G$ の元 $x$ に対して, $H$ の極大 $x$ 不変部分群 $\widetilde{H}_x$ を次のように定義する.

$$\widetilde{H}_x := \bigcap_{i\geq 0} {}^{x^i}H = H \cap {}^{x}H \cap {}^{x^2}H \cap \cdots$$

ここで, ${}^{x^i}H = x^iHx^{-i}$である.

ここで定義した$\widetilde{H}_x$について, 次のことが成り立つ.

**補題 2.4** (i) ${}^{x}\widetilde{H}_x = \widetilde{H}_x$
(ii) $\widetilde{H}_x$ は $H$ の部分群である.
(iii) $\widetilde{H}_x$ は $\widetilde{H}_{x^i}$ の部分群である. ($i$ は 任意の整数)
(iv) ${}^{h}\widetilde{H}_x = \widetilde{H}_{{}^{h}x}$ ($h$ は $H$ の任意の元)

**定義 2.5** $G$ を有限群, $H$ を $G$ の部分群とする. $G$ の任意の元 $x$ に対して, $H$ 共役類 $\mathcal{C}_x$ と弱い $H$ 共役類 $\widetilde{\mathcal{C}}_x$ を次のように定義する.

$$\mathcal{C}_x := \{hxh^{-1} \mid h \in H\}$$

$$\widetilde{\mathcal{C}}_x := \{hxah^{-1} \mid h \in H, a \in \widetilde{H}_x\}$$

ここで, $\{y \in G \mid x \approxeq_H y\} = \widetilde{\mathcal{C}}_x$ である. Brauer は $\approxeq_H$ の同値類を $\approx_H$ の和集合と捉えているが, $H$ 共役類の和集合と捉えることもできる. 一般にこれらは違う分割である. このとき, 次が成り立つ.

**補題 2.6** (i) $x \in \widetilde{\mathcal{C}}_x$
(ii) $\widetilde{\mathcal{C}}_x$ は両側剰余類 $HxH$ の部分集合である.
(iii) $\mathcal{C}_x$ は $\widetilde{\mathcal{C}}_x$ の部分集合である.
(iv) $\widetilde{\mathcal{C}}_x$ は $G$ の $H$ 共役類の和集合で分割できる.
(v) $\{\alpha^n \mid \alpha \in \widetilde{\mathcal{C}}_x\} \subseteq \widetilde{\mathcal{C}}_{x^n}$

**証明** (i),(ii),(iii),(iv) は自明な事柄である. (v) を証明する. $\alpha \in \widetilde{\mathcal{C}}_x$ とすると, ある $H$ の元 $h$ と $\widetilde{H}_x$ の元 $a$ を用いて, $\alpha = hxah^{-1}$ と書ける. このとき,

$$\begin{aligned}
\alpha^2 &= hxah^{-1}hxah^{-1} \\
&= hxxx^{-1}axah^{-1} \\
&\in hx^2\widetilde{H}_xh^{-1} \subseteq hx^2\widetilde{H}_{x^2}h^{-1} \subseteq \widetilde{\mathcal{C}}_{x^2} \\
\alpha^3 &= hxah^{-1}hxah^{-1}hxah^{-1} \\
&= hxx^2x^{-2}ax^2x^{-1}axah^{-1} \\
&\in hx^3\widetilde{H}_xh^{-1} \subseteq hx^3\widetilde{H}_{x^3}h^{-1} \subseteq \widetilde{\mathcal{C}}_{x^3}
\end{aligned}$$

以下同様に, $\{\alpha^n \mid \alpha \in \widetilde{\mathcal{C}}_x\} \subseteq \widetilde{\mathcal{C}}_{x^n}$ が成り立つ. □

**補題 2.7** $G$ を有限群, $H$ を $G$ の部分群とする.
(i) $G$ の任意の元 $x,y$ に対して, $\widetilde{\mathcal{C}}_x,\widetilde{\mathcal{C}}_y$ は, $\widetilde{\mathcal{C}}_x \cap \widetilde{\mathcal{C}}_y = \emptyset$ か $\widetilde{\mathcal{C}}_x = \widetilde{\mathcal{C}}_y$ のどちらか一方である.
(ii) $G$ の $H$ による両側剰余類は, 弱い $H$ 共役類の和集合で分割できる.

**証明** (i) を証明する. $\widetilde{\mathcal{C}}_x \cap \widetilde{\mathcal{C}}_y \neq \emptyset$ とすると, ある $H$ の元 $h,h'$ に対して, $hx\widetilde{H}_xh^{-1} \cap h'y\widetilde{H}_yh'^{-1} \neq \emptyset$ となる. $x' = {}^{h}x$, $y' = {}^{h'}y$ とおくと,

$$hx\widetilde{H}_xh^{-1} = {}^{h}x\widetilde{H}_{{}^{h}x} = x'\widetilde{H}_{x'}$$

$$h'y\widetilde{H}_yh'^{-1} = {}^{h'}y\widetilde{H}_{{}^{h'}y} = y'\widetilde{H}_{y'}$$

仮定より, $x'\widetilde{H}_{x'} \cap y'\widetilde{H}_{y'} \neq \emptyset$ である. $z$ を $x'\widetilde{H}_{x'} \cap y'\widetilde{H}_{y'}$ の元とすると, $z = xa$ ($a$ は $\widetilde{H}_{x'}$ の元) とすることができ,

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}_z &= H \cap {}^{z}H \cap {}^{z^2}H \cap \cdots \\
&= H \cap {}^{x'a}H \cap {}^{x'ax'a}H \cap \cdots \\
&= H \cap {}^{x'}H \cap {}^{x'^2}H \cap \cdots \\
&= \widetilde{H}_{x'}
\end{aligned}$$

同様にして, $\widetilde{H}_z = \widetilde{H}_{y'}$ も証明できる. よって, $\widetilde{H}_z = \widetilde{H}_{x'} = \widetilde{H}_{y'}$ である. これを用いると,

$$\begin{aligned}
z \in x'\widetilde{H}_{x'} \cap y'\widetilde{H}_{y'} &\Longrightarrow z \in x'\widetilde{H}_{x'} \cap y'\widetilde{H}_{x'} \\
&\Longrightarrow x'\widetilde{H}_{x'} = y'\widetilde{H}_{x'} = y'\widetilde{H}_{y'}
\end{aligned}$$

よって $\widetilde{\mathcal{C}}_x = \widetilde{\mathcal{C}}_y$ であり, (i) は成り立つ. (ii) は補題 2.6 と (i) より明らかである. □

**補題 2.8** $G$ を有限群, $H$ を $G$ の部分群, $x$ を $G$ の元, $h,h'$ を $H$ の元とする. このとき,

$$hx\widetilde{H}_xh^{-1} \cap h'x\widetilde{H}_xh'^{-1} \neq \emptyset \Longrightarrow h\widetilde{H}_x = h'\widetilde{H}_x$$

が成り立つ.

**証明** $a,b$ は $\widetilde{H}_x$ の元で,

$$hxah^{-1} = h'xbh'^{-1}$$

とする. $x^{-1}ax \in \widetilde{H}_x$ より $ax \in x\widetilde{H}_x$ であり, また,

$$xa = h^{-1}h'xb(h^{-1}h')^{-1} = h''xbh''^{-1} \quad (1)$$

となる. ここで, $h'' = h^{-1}h'$ である. $h'' \in \widetilde{H}_x$ がいえれば補題 2.8 は成り立つ. $h'' \in H$ は明かであり, (1) より,

$$h'' = xah''b^{-1}x^{-1} \in xHx^{-1} = {}^{x}H \quad (2)$$

(2) より,

$$h'' \in xa{}^{x}Hb^{-1}x^{-1} = x{}^{x}Hx^{-1} = {}^{x^2}H$$

以下同様にして $h'' \in \widetilde{H}_x$ を示すことができる. □

**命題 2.9** $G$ を有限群, $H$ を $G$ の部分群, $x$ を $G$ の任意の元とする. このとき,

$$|\widetilde{\mathcal{C}}_x| = |H|$$

が成り立つ.

**証明** まず $|hx\widetilde{H}_xh^{-1}| = |\widetilde{H}_x|$ である. 補題 2.8 より, $H$ の元 $h,h'$ に対して $hx\widetilde{H}_xh^{-1} \cap h'x\widetilde{H}_xh'^{-1} \neq \emptyset$ ならば $h\widetilde{H}_x = h'\widetilde{H}_x$ なので, $H/\widetilde{H}_x$ の代表系 $[H/\widetilde{H}_x]$ を用いて次のように表せる.

$$\begin{aligned}
|\widetilde{\mathcal{C}}_x| &= \sum_{h\in[H/\widetilde{H}_x]} |hx\widetilde{H}_xh^{-1}| \\
&= \sum_{h\in[H/\widetilde{H}_x]} |\widetilde{H}_x| \\
&= \frac{|H|}{|\widetilde{H}_x|} \times |\widetilde{H}_x| = |H|
\end{aligned}$$

□

補題 2.7 と命題 2.9 より次の定理が成り立つ.

**定理 2.10** $G$ を有限群, $H$ を $G$ の部分群, $x,y$ をそれぞれ $G$ の任意の元とする. このとき,

$$|\widetilde{\mathcal{C}}_x \cap \widetilde{\mathcal{C}}_y^{\frac{1}{n}}| = 0 \text{ or } |H|$$

が成り立つ.

## 3 Iwasaki 型合同式の証明と拡張

定理 2.10 は, 定理 1.1,1.2,1.3 の一般化となっている. ここでは, 定理 2.10 を用いて定理 1.3 を示す.

**定理 1.3 の証明** 補題 2.7 より, 有限群 $G$ の任意の元 $x,y$ に対して,

$$HxH = \widetilde{\mathcal{C}}_{x_1} \cup \widetilde{\mathcal{C}}_{x_2} \cup \cdots \cup \widetilde{\mathcal{C}}_{x_s}$$

$$HyH = \widetilde{\mathcal{C}}_{y_1} \cup \widetilde{\mathcal{C}}_{y_2} \cup \cdots \cup \widetilde{\mathcal{C}}_{y_t}$$

とできる. このとき

$$\begin{aligned} &|HxH \cap (HyH)^{\frac{1}{n}}| \\ &= |(\widetilde{\mathcal{C}}_{x_1} \cup \cdots \cup \widetilde{\mathcal{C}}_{x_s}) \cap (\widetilde{\mathcal{C}}_{y_1} \cup \cdots \cup \widetilde{\mathcal{C}}_{y_t})^{\frac{1}{n}}| \\ &= \sum_{i,j} |\widetilde{\mathcal{C}}_{x_i} \cap \widetilde{\mathcal{C}}_{y_j}^{\frac{1}{n}}| \end{aligned}$$

となる. よって定理 2.10 より定理 1.3 は成り立つ. □

$H$ が有限群 $G$ の正規部分群の時, $|H^{\frac{1}{n}}|$ に関する合同式ではなく, $|H^{\frac{1}{n}}|$ を次のように表せる.

$$\begin{aligned} |H^{\frac{1}{n}}| &= \#\{x \in G \mid x^n \in H\} \\ &= |H| \times \#\{xH \in G/H \mid (xH)^n = H\} \\ &= |H| \times \#\{xH \in G/H \mid \widetilde{\mathcal{C}}_{x^n} \subseteq \widetilde{\mathcal{C}}_1\}. \quad (3) \end{aligned}$$

ここで, $H$ が正規部分群という条件を除いて, $H$ を有限群 $G$ の任意の部分群とし, $G$ の弱い $H$ 共役類での分割を $G = \bigcup_{i=1}^{l} \widetilde{\mathcal{C}}_{x_i}$ とすれば,

$$\begin{aligned} |H^{\frac{1}{n}}| &= \#\{x \in G \mid x^n \in H\} \\ &= |H| \times \#\{x_i \mid \widetilde{\mathcal{C}}_{x_i{}^n} \subseteq \widetilde{\mathcal{C}}_1\} \quad (4) \end{aligned}$$

となる. 弱い $H$ 共役類という言葉を用いれば, $H$ が正規部分群という条件を除いた一般の場合にも同様な記述ができる. また, 上條 [4] で (3) の一般化である次の補題が示されている.

**補題 3.1** $G$ を有限群, $H$ を $G$ の部分群, $K$ を $G$ の正規部分群とし, $\overline{G} := G/K$, $\overline{H} := H/K$ とする. このとき,

$$|H^{\frac{1}{n}}| = |K| \times \#\{\overline{x} \in \overline{G} \mid \overline{x}^n \in \overline{H}\}$$

が成り立つ.

弱い $K$ 共役類という言葉を用いれば, 上の補題は次のように一般化できる.

**補題 3.2** $G$ を有限群, $H$ を $G$ の部分群, $K$ を $H$ の部分群とする. $G$ と $H$ の弱い $K$ 共役類での分割を

$$G = \bigcup_{i=1}^{s} \widetilde{\mathcal{D}}_{x_i}, \quad H = \bigcup_{i=1}^{t} \widetilde{\mathcal{D}}_{x_i} \ (t \le s)$$

とし, $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \cdots, x_s\}$, $\mathcal{Y} = \{x_1, x_2, \cdots, x_t\}$ とする. このとき,

$$|H^{\frac{1}{n}}| = |K| \times \#\{x_i \in \mathcal{X} \mid \widetilde{\mathcal{D}}_{x_i^n} \subseteq \widetilde{\mathcal{D}}_{x_j} \ ({}^{\exists}x_j \in \mathcal{Y})\}$$

が成り立つ.

(4) は補題 3.2 で $H = K$ の場合である.

## 4 例

定理 1.3 について具体的な例を上げる.

**例 1** $G$ を 5 次対称群 $S_5 = S_{\{1,2,3,4,5\}}$, $H$ を 4 次交代群 $A_4 = A_{\{1,2,3,4\}}$ とする. ここで, $|A_4| = 12$ であり, $S_5$ は次のように両側分解する.

$$S_5 = X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3$$

ここで, $X_0 = A_4$, $X_1 = A_4(12)A_4$, $X_2 = A_4(15)A_4$, $X_3 = A_4(125)A_4$ である.

$$Y_i = X_i^{\frac{1}{n}}$$

とおく. 以下, $|X_i \cap Y_j|$ を $n$ の値より表にする.

| $(n=1)$ | $X_0$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $Y_0$ | 12 | 0 | 0 | 0 |
| $Y_1$ | 0 | 12 | 0 | 0 |
| $Y_2$ | 0 | 0 | 48 | 0 |
| $Y_3$ | 0 | 0 | 0 | 48 |

| $(n=2)$ | $X_0$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $Y_0$ | 12 | 12 | 12 | 12 |
| $Y_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $Y_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $Y_3$ | 0 | 0 | 36 | 36 |

| $(n=3)$ | $X_0$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $Y_0$ | 12 | 0 | 0 | 12 |
| $Y_1$ | 0 | 12 | 12 | 0 |
| $Y_2$ | 0 | 0 | 36 | 0 |
| $Y_3$ | 0 | 0 | 0 | 36 |

| $(n=4)$ | $X_0$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $Y_0$ | 12 | 12 | 36 | 12 |
| $Y_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $Y_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $Y_3$ | 0 | 0 | 12 | 36 |

| $(n=5)$ | $X_0$ | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $Y_0$ | 12 | 0 | 0 | 24 |
| $Y_1$ | 0 | 12 | 0 | 0 |
| $Y_2$ | 0 | 0 | 48 | 0 |
| $Y_3$ | 0 | 0 | 0 | 24 |

**例 2** $G$ を 5 次対称群 $S_5 = S_{\{1,2,3,4,5\}}$, $H = \{1, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ とする．ここで，$|H| = 6$ であり，$S_5$ は次のように両側分解する．

$$S_5 = H_0 \cup H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 \cup H_5 \cup H_6$$

ここで，$H_0 = H$, $H_1 = H(14)H$, $H_2 = H(15)H$, $H_3 = H(45)H$, $H_4 = H(14)(25)H$, $H_5 = H(145)H$, $H_6 = H(154)H$ である．

$$I_i = H_i^{\frac{1}{n}}$$

とおく．以下，$|H_i \cap I_j|$ を $n$ の値により表にする．

| $(n=1)$ | $H_0$ | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ | $H_4$ | $H_5$ | $H_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_0$ | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $I_1$ | 0 | 18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $I_2$ | 0 | 0 | 18 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $I_3$ | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 |
| $I_4$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 36 | 0 | 0 |
| $I_5$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 18 | 0 |
| $I_6$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 18 |

| $(n=2)$ | $H_0$ | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ | $H_4$ | $H_5$ | $H_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_0$ | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 0 | 0 |
| $I_1$ | 0 | 12 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 |
| $I_2$ | 0 | 0 | 12 | 0 | 6 | 0 | 0 |
| $I_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 |
| $I_4$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 12 | 12 |
| $I_5$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 6 |
| $I_6$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 6 | 0 |

| $(n=3)$ | $H_0$ | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ | $H_4$ | $H_5$ | $H_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_0$ | 6 | 6 | 6 | 0 | 0 | 6 | 6 |
| $I_1$ | 0 | 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $I_2$ | 0 | 0 | 12 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $I_3$ | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 |
| $I_4$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 12 | 6 | 6 |
| $I_5$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 12 | 0 | 6 |
| $I_6$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 12 | 6 | 0 |

| $(n=4)$ | $H_0$ | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ | $H_4$ | $H_5$ | $H_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_0$ | 6 | 12 | 12 | 6 | 12 | 6 | 6 |
| $I_1$ | 0 | 6 | 6 | 0 | 6 | 0 | 0 |
| $I_2$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 |
| $I_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $I_4$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 12 | 0 | 0 |
| $I_5$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 6 |
| $I_6$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 6 |

| $(n=5)$ | $H_0$ | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ | $H_4$ | $H_5$ | $H_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_0$ | 6 | 0 | 0 | 0 | 12 | 6 | 6 |
| $I_1$ | 0 | 18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $I_2$ | 0 | 0 | 18 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $I_3$ | 0 | 0 | 0 | 6 | 0 | 0 | 0 |
| $I_4$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 24 | 0 | 0 |
| $I_5$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 6 |
| $I_6$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 6 | 6 |

## 参考文献

1) R.Brauer, "On a Theorem of Frobenius", American Mathematical Monthly, **76**(1969), 12 – 15.
2) S.Iwasaki, "A Note on the nth Roots Ratio of a Subgroup of a Finite Group", Jounal of Algebra, **78**(1982), 460 – 474.
3) S.Iwasaki, personal letter, 2006.
4) 上條 亮「有限群の Frobenius 型合同式について」，平成 17 年度近畿大学修士論文.