

## 結び目の円周数による特徴付け

小畑久美\*, 佐久間一浩\*\*

## Characterization of a knot via a circular number

Kumi KOBATA\* and Kazuhiro SAKUMA\*\*

A spatial embedding of a graph  $G$  is a realization of  $G$  into the 3-dimensional Euclidean space  $\mathbb{R}^3$ . J. H. Conway and C. McA. Gordon proved that every spatial embedding of the complete graph with 7 vertices contains a nontrivial knot. A linear spatial embedding of a graph into  $\mathbb{R}^3$  is an embedding which maps each edge to a single straight line segment. In this paper, we actually construct a linear spatial embedding of the complete graph with  $2n-1$  (or  $2n$ ) vertices which contains the torus knot  $T(2n-5, 2)$  ( $n \geq 4$ ). A circular spatial embedding of a graph into  $\mathbb{R}^3$  is an embedding which maps each edge to a round arc. We define the circular number of a knot as the minimal number of round arcs in  $\mathbb{R}^3$  among such embeddings of the knot. Then we have relations between a circular number and other invariants. We also show that a knot has circular number 3 if and only if the knot is a trefoil knot, and the figure-eight knot has circular number 4.

Key words: knot, spatial graph, complete graph, circular number

## 1. 序文

グラフ  $G$  とは 1 次元単体的複体であり, 0 次元単体と 1 次元単体をそれぞれ頂点と辺とよぶ. 特に,  $(n-1)$  次元単体の 1 次元スケルトンを  $n$  頂点完全グラフといい,  $K_n$  と表記する. 完全グラフ  $K_n$  はどの 2 頂点も辺で結ばれているグラフである. グラフ  $G$  の頂点の集合と辺の集合をそれぞれ  $V(G), E(G)$  と表記する. グラフ  $G$  の  $\mathbb{R}^3 (= \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\})$  への埋め込み  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$  を  $G$  の空間埋め込み,  $\mathbb{R}^3$  へ埋め込まれたグラフ  $f(G)$  を空間グラフとよぶ. グラフ  $G$  のサイクル  $C$  とは 2 つの連続した頂点  $v_i$  と  $v_{i+1}$  は辺  $v_i v_{i+1}$  により結ばれている  $G$  の相異なる頂点の巡回列  $\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$  である ( $i$  は  $n$  を法とする). リンクとは  $\mathbb{R}^3$  内の単純閉曲線の有限個の互いに素な和集合である. 特に, 1 成分のリンクを結び目とよぶ.  $G$  が空間埋め込み  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$  により  $\mathbb{R}^3$  に埋め込まれているとき,  $G$  の任意のサイクルの像は結び目であり,  $G$  の任意のサイクルの互いに素な和集合の像はリンクである. 任意の辺を  $\mathbb{R}^3$  内で直線にうつすグラフの空間埋め込みを線形埋め込みとよぶ. 単純グラフとは多重辺とループをもたないグラフである. 任意の単純グラフが空間埋め込みをもつことはよく知られている ([1] 参照).  $T(p, q)$  で,  $(p, q)$  型のトーラス結び目を表すとす ([2] 参照). この論文では, 線形埋め込み  $f^*: G \rightarrow \mathbb{R}^3$  を構成し, 次を示した.

命題 1. [9]  $n$  を  $n \geq 4$  の整数とすると,  $T(2n-5, 2)$  を含む  $K_{2n-1}$  と  $K_{2n}$  の線形埋め込みが存在する.

任意の辺が  $\mathbb{R}^3$  内で円弧にうつるグラフの空間埋め込みを円周型埋め込みとよぶ.  $K$  を結び目とする.  $K$  が  $n$  個

の円弧からなる円周型埋め込みを持つとし, そのような  $n$  の最小数を結び目  $K$  の円周数とよび,  $\text{Circ}(K)$  と表記する.

定理 1. [9]

- (1) 結び目  $K$  が三葉結び目であることと  $\text{Circ}(K) = 3$  であることは同値である.
- (2) 結び目  $K$  が 8 の字結び目ならば  $\text{Circ}(K) = 4$  である.

定理 1 (2) の逆の主張は一般には成り立たない (注 3 を参照).

この論文の構成は以下のようである: 2 節では,  $n$  頂点完全グラフの線形埋め込み  $f^*$  を定義し, 命題 1 の証明の概要を与える. 3 節において, 結び目の円周型埋め込みの性質を示し, 定理 1 を証明する. 4 節で, 今後の研究の課題について触れる.

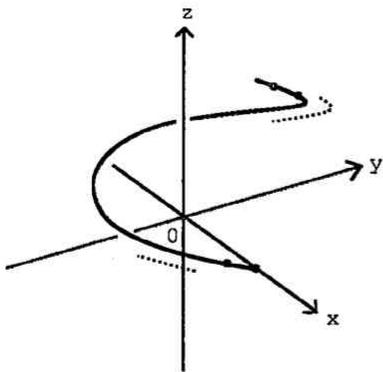
## 2. 線形埋め込み

Conway と Gordon は ([3] 参照) において, 完全グラフ  $K_7$  の任意の空間埋め込みは非自明な結び目を含むことを証明した. 彼らの結果をもう少し精密な言い方で表現すれば, “ $m=7$  かつ  $n \geq 3$  ならば,  $m$  頂点完全グラフ  $K_m$  の任意の空間埋め込みは最小交点数が  $n$  の結び目を含む.” そこで, この結果を  $m \geq 8$  もしくは,  $n \geq 4$  に拡張したいと考えた. そのために, 次のような埋め込みを構成した.  $K_n$  のすべての頂点が図 1 のように, 直線  $H := \{(\cos \theta, \sin \theta, 2\pi - \theta); 0 \leq \theta < 2\pi\}$  上にうつる線形埋め込み  $f^*: K_n \rightarrow \mathbb{R}^3$  を考える. この埋め込み  $f^*$  により, 命題 1 が成り立つことがわかる. 証明は帰納的にできる. グラフにどのような結び目やリンクが含まれているかは, グラフ理論の視点からも結び目理論の視点からも大変興味深いことである. 命題 1 の結果は Conway と

平成 20 年 6 月 21 日受理

\* 大学院総合理工学研究科理学専攻

\*\* 理学科

Figure 1: ら線  $H$ 

Gordon の結果に比べて、完全グラフの頂点数を増やすと最小交点数が 4 以上の結び目を含むことが分かる点において、Conway と Gordon の結果より優れていると考えられる。ただし、この結果は空間埋め込みを線形埋め込みに制限しているため、今後は任意の空間埋め込みでどのような結び目が含まれるかを調べたい。

### 3. 円周型埋め込み

線形埋め込みを任意の空間埋め込みに近づけるために考えたのが、この節で述べる円周型埋め込みである。線形埋め込みよりも円周型埋め込みの方が任意の埋め込みに近いと考えた理由は次の 2 点である。任意のグラフは円周型埋め込みをもつこと、線形埋め込みは 1 つの結び目を構成するために 6 辺必要だが、円周埋め込みは 3 辺で構成できることからである。完全グラフは多重辺を持たないため、3 辺で結び目を構成する。この節では、円周型埋め込みのいくつかの性質を示す。

**定義 1.**  $G$  をグラフとする。  $G$  の任意の辺  $e$  に対して、  $f(e) \subset l$  となる円弧  $l$  が存在する空間埋め込み  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$  を円周型埋め込みとよぶ。

任意のグラフは空間埋め込みを持つことは簡単に分かる。

**注 1.** イソトピック類で円周型埋め込みを持たない空間グラフは存在する。

次に、円周型埋め込みの性質を述べる。ここからは、結び目に制限する。

**定義 2.** 結び目を  $K$  とする。円周数  $\text{Circ}(K)$  とは  $K$  が  $n$  本の円弧の円周型埋め込みをもつような  $n$  の最小数と定義する。

ここで円周数と他の不変量を比較する。比較したい結び目の不変量は次の 4 つである。

**定義 3.** 結び目  $K$  のスティック数  $\text{st}(K)$  とは  $K$  が  $n$  本の直線の線形埋め込みをもつような  $n$  の最小数である。結び目  $K$  の弧指数  $\text{arc}(K)$  とは各シートに  $K$  の円弧が各 1 本ずつのるようにブック ([4][5] 参照) に埋め込むシートの最小数である。結び目  $K$  の最小交点数  $c(K)$  とは  $K$  のすべての正則射影の交点の最小数である。最後に向き付けられた結び目  $K$  に対して橋数  $b(K)$  を定義する。まず  $\mathbb{R}^3$  に直交座標系  $xyz$  を定める。次に  $K$  にイソトピックな結

び目  $K'$  を、その  $xy$  平面への投影であるダイアグラム  $D$  が一般の位置となるようにとる。このとき、制限  $z|K'$  を  $D$  上の高々 2 値の多価関数と見なすことができるが、一般の位置ということにより、この関数の極大点は 2 値点ではないものとしてよい。  $K'$  を取り替えて得られる極大点の数の最小数を  $K$  の橋数といい  $b(K)$  で表す。

明らかに、これらは結び目の整数値不変量である。スティック数は最小交点数が 10 個の結び目まではよく知られている。弧指数は最小交点数が 10 個の交代結び目について求められている ([6] 参照)。ここで交代結び目とはダイアグラム  $D$  に沿ってたどると上下交点が交互に現れるダイアグラムを持つ結び目である。また、  $\text{arc}(K) \leq c(K) + 2$  も示されている ([6] 参照)。例えば、  $K$  を三葉結び目 ( $c(K) = 3$ ) とすると、  $\text{st}(K) = 6$ ,  $\text{arc}(K) = 5$ ,  $b(K) = 2$  であり、  $K$  を 8 の字結び目 ( $c(K) = 4$ ) とすると、  $\text{st}(K) = 7$ ,  $\text{arc}(K) = 6$ ,  $b(K) = 2$  である。このとき、次が得られる。

**命題 2.** [9]

- (1)  $\text{Circ}(K) = 1 \iff K$  が自明な結び目。
- (2)  $\text{Circ}(K) \leq \text{st}(K)$ .
- (3)  $\text{Circ}(K) \leq \text{arc}(K)$ .
- (4)  $\text{Circ}(K) \leq c(K) + 2$ .
- (5)  $b(K) \leq 2 \text{Circ}(K)$ .

この命題は不変量の定義からほとんどただちにわかるものばかりだが、重要である。

**注 2.** 円周数の定義から、円周数が 2 になる結び目は存在しない。最近、G. T. Jin は素な結び目  $K$  が交代結び目でないこと、  $\text{arc}(K) \leq c(K)$  は必要十分であることを示した ([7] 参照)。したがって、素な結び目  $K$  が交代結び目でないなら  $\text{Circ}(K) \leq c(K)$  である。ここで、素な結び目とは他の結び目の連結和でかけない結び目のことである。

定理 1 を一部証明する。結び目  $K$  が三葉結び目ならば  $\text{Circ}(K) = 3$  であることを示す。

まず、結び目  $K$  を三葉結び目とする。図 2 のように円  $S$  を  $xy$  平面上にあって原点  $o$  を通るようにとる。同様に円  $T$  は  $zx$  平面上に、円  $W$  は  $yz$  平面に平行な平面上にそれぞれとる。そのとき、図 2 のように  $S, T, W$  は 3 点  $o, s_1, s_2$  で交わるようにとる。円  $S$  上にある  $o$  と  $s_1$

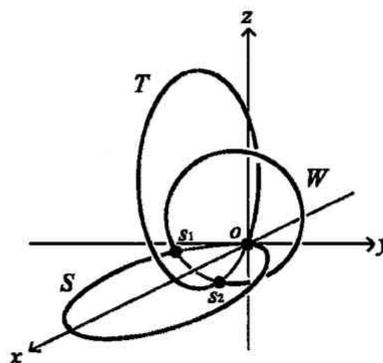


Figure 2: 三葉結び目の円周型埋め込み

をつなぐ図にあるような細線で描かれた弧を  $\overline{os_1}$  とする。

同様に、円  $T$  上にある  $o$  と  $s_2$  をつなぐ細線で描かれた弧を  $\overline{os_2}$ 、円  $W$  上にある  $s_1$  と  $s_2$  をつなぐ細線で描かれた弧を  $\overline{s_1s_2}$  とする。そのとき、

$$S \cup T \cup W - \{\overline{os_1}, \overline{os_2}, \overline{s_1s_2}\}$$

で構成される結び目は三葉結び目である。これより、 $\text{Circ}(K) \leq 3$  である。また、命題 2(1) と注 2 より  $\text{Circ}(K) \geq 3$  である。したがって、 $K$  が三葉結び目なら  $\text{Circ}(K) = 3$  である。

次に、結び目  $K$  が 8 の字結び目なら  $\text{Circ}(K) = 4$  であることを示す。

まず、結び目  $K$  を 8 の字結び目とする。図 3 のように円  $P$  を  $xy$  平面に原点  $o$  を通るようにとる。同様に円  $Q$  は  $yz$  平面に平行な平面に、円  $R$  は  $zx$  平面に平行な平面にそれぞれとる。そのとき、図 3 のように  $P, Q, R$  は 2 点  $t_2, t_3$  で交わるようにとる。図 3 のように原点  $o$  と  $R$

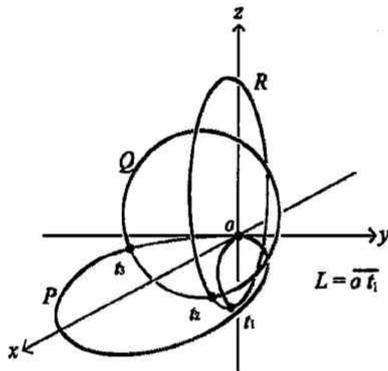


Figure 3: 8 の字結び目の円周型埋め込み

との交点  $t_1$  をとおる円弧  $L$  もとる。円  $R$  上で  $t_1$  と  $t_2$  をつなぐ図中では細い弧を  $\overline{t_1t_2}$  とする。同様に、円  $Q$  上で  $t_2$  と  $t_3$  をつなぐ細い弧を  $\overline{t_2t_3}$ 、円  $P$  上で  $o$  と  $t_3$  をつなぐ細い弧を  $\overline{ot_3}$  とする。そのとき、

$$P \cup Q \cup R \cup L - \{\overline{t_1t_2}, \overline{t_2t_3}, \overline{ot_3}\}$$

で構成される結び目は 8 の字結び目である。これより、 $\text{Circ}(K) \leq 4$  である。また、定理 1(1) より  $\text{Circ}(K) \geq 4$  である。したがって、 $K$  が 8 の字結び目なら  $\text{Circ}(K) = 4$  である。

最後に、円周型埋め込みを使ったもう 1 つの不変量を紹介する。

**定義 4.** 結び目を  $K$  とする。不変量  $u_m(K)$  は  $K$  を  $m$  本の円周型埋め込みに変形するために最小交点数を実現する正則射影の交差交換の最小数と定義する。

ここで、 $m$  が 2 以下なら  $u_m(K)$  は  $K$  の結び目解消数と等しくなる。この意味で、 $u_m(K)$  は結び目解消数の一般化になっているといえる。定理 1 から次の系を得る。

**系 1.** 結び目  $K$  が三葉結び目なら、 $m \leq 2$  のとき  $u_m(K) = 1$ 、 $m \geq 3$  のとき  $u_m(K) = 0$  である。

**注 3.** 円周数は一般的に連結和に関して加法的ではない。例えば、三葉結び目  $K$  とその鏡像  $K^*$  の連結和に対して、 $\text{Circ}(K \# K^*) = 4$  が得られる。実際、図 4 より 4 本の円弧の円周型埋め込みをもつ。一方、定理 1(1) より三葉結び目とその鏡像の円周数はどちらも 3 であることより、 $\text{Circ}(K) + \text{Circ}(K^*) = 6$  である。よって、加法的ではないことが分かる。また、このことから定理 1 の逆の主張“円周数が 4 になる結び目は 8 の字結び目である”は成り立たないことがわかる。しかし、円周数が 4 になる‘素な結び目’は 8 の字結び目であろう、と予想している。

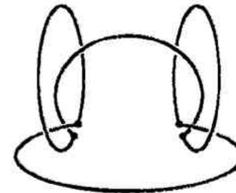


Figure 4: 三葉結び目とその鏡像の連結和の円周型埋め込み

#### 4. 今後の問題

今後の問題は、次の 2 つが主な問題である。

**問題 1.** 完全グラフに内蔵する結び目、そして特に内蔵する結び目を特定できる不変量と完全グラフの頂点数の関係を調べる。

**問題 2.** 円周数に対する結び目の分類と他の結び目の不変量との関係。

完全グラフの結び目の内蔵に関する問題 (問題 1) を調べるために円周型埋め込み (問題 2) を考察する。さらに、結び目から一般の空間グラフへの拡張を試みる方法を取る。そのためにまず調べたいこととして、例えば次の 5 点がある。

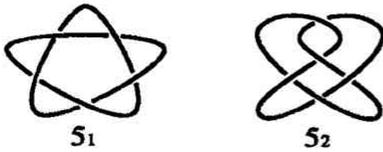
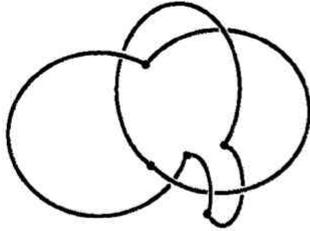
- (1) 最小交点数が 5 の結び目の円周数の決定。
- (2) 円周数と超橋数の関係。
- (3) 円周数の弧指数での上からの評価。
- (4) 円周数が最小交点数以下になることの証明。
- (5) 円周数の決定。

ここで  $K$  の超橋数とは、 $K'$  を  $K$  にイソトピー同値な  $\mathbb{R}^3$  に埋め込まれた結び目とし、 $z$  を高さ関数の方向を表す単位ベクトル、 $b_z(K')$  を軸  $\mathbb{R}_z$  への  $K'$  の直交射影の極大点の個数とするとき、

$$\text{sb}(K) := \min_{K' \sim K} \{ \max_{z \in S^2} b_z(K') \}$$

で定義される不変量である。この不変量の研究は始められたばかりであるが、G. T. Jin ([8] 参照) をはじめ盛んに行われている。また、1 つ目の問題は図 5 の 2 つの結び目  $5_1$  結び目と  $5_2$  結び目について考えればよい。円周数が 4 か 5 であることは図 6 より  $\text{Circ}(5_1) \leq 5$  が分かる。定理 1 より  $\text{Circ}(5_1) \geq 4$  なので、 $5_1$  結び目の円周数は 4 か 5 であることが分かる。

**謝辞.** 本稿は [9] の結果が母体となっている。著者らは田中利史氏に特に感謝の意を表したい。

Figure 5:  $5_1$  結び目と  $5_2$  結び目Figure 6:  $5_1$  結び目の円周型埋め込み

### 参考文献

- [ 1 ] S. Negami, *Ramsey theorems for knots, links and spatial graphs*, Trans. Amer. Math. Soc. 324 (1991), no. 2, 527-541.
- [ 2 ] A. Kawachi, *A survey of knot theory*, Translated and revised from the 1990 Japanese original by the author. Birkhauser Verlag, Basel, 1996.
- [ 3 ] J. H. Conway; C. McA. Gordon, *Knots and links in Spatial graphs*, J. Graph Theory 7 (1983), no. 4, 445-453.
- [ 4 ] P. R. Cromwell; I. J. Nutt, *Embedding knots and links in an open book. II. Bounds on arc index*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 119 (1996), no. 2, 309-319.
- [ 5 ] P. R. Cromwell, *Arc presentations of knots and links*, Knot theory (Warsaw, 1995), 57-64, Banach Center Publ., 42, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1998.
- [ 6 ] Y. Bae; C.-Y. Park, *An upper bound of arc index of links*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 129 (2000), no. 3, 491-500.
- [ 7 ] G. T. Jin, *Prime knots with arc index up to 11 and an upper bound of arc index for non-alternating knots*, A plenary talk, The First east Asian School of Knots and Related topics, The University of Tokyo, January 21-24, 2008.
- [ 8 ] G. T. Jin, *Polygon indices and superbridge indices of torus knots and links*, J. Knot Theory Ramifications 6 (1997) 281-289.
- [ 9 ] K. Kobata, T. Tanaka, *A circular spatial embedding of a graph in Euclidean 3-space*, 投稿中