2次の Siegel modular 形式の間に成り立つ合同式について

長岡 昇勇*，中村 佳嗣**

On Congruences between Siegel Modular Forms of Degree 2

Shoyu NAGAOKA* and Yoshitsugu NAKAMURA**

J.-P. Serre developed the theory of p-adic modular forms. For example, he proved some congruence relation between elliptic modular forms. In this paper, a generalization to the case of Siegel modular forms is studied.

Key words: Siegel modular forms, Congruences for modular forms, p-adic modular forms

緒言

Serre は論文 [1] において，楕円 modular 形式の p 進理論を展開した．そこでは，modular 形式の間に成立する合同関係式の一般論が展開され，後に発展した p 進 modular 形式の理論や有限体上の modular 形式の理論の基礎となった．しかしながら，それらの結果の多変数化は十分になされたとは言い難い．この論説では，Serre が楕円 modular 形式の場合に示した事実の多変数化，すなわち Siegel modular 形式の場合への一般化を試みる．

成立が期待される事実は，第 2 節で「予想」として詳述されるが，出発点となる modular 形式が Eisenstein 級数の空間に含まれる場合には，既にいくつかの結果がある．この論説では，今まで得られていなかった cusp 形式の場合に，「予想」の成立を支持する数値例を与える．

「予想」で述べられている事実は次数が 1 の場合，すなわち Serre が示した場合は，ある種の modular 曲線の種数を与える公式とも関連しており，幾何学的意味をもっている．

§1 Siegel modular 形式とその Fourier 展開

1.1 記号と定義

n 次 Siegel 上半空間 $\boldsymbol{H}_n$ は

$$\boldsymbol{H}_n := \{Z = X + iY \in \mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{C}) \mid Y > 0\}$$

で定義される tube 型領域で，実 symplectic 群 $Sp_n(\boldsymbol{R}) :=$

$$\left\{M \in M_{2n}(\boldsymbol{R}) \mid {}^tMJ_nM = J_n, J_n = \left(\begin{smallmatrix} 0_n & -1_n \\ 1_n & 0_n \end{smallmatrix}\right)\right\}$$

が $\boldsymbol{H}_n$ に一般化された一次分数変換で作用する：

$$M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in Sp_n(\boldsymbol{R}), Z \in \boldsymbol{H}_n$$

$$\Longrightarrow M\langle Z\rangle = (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \in \boldsymbol{H}_n$$

ここで $A, B, C, D \in M_n(\boldsymbol{R})$ である．

n 次 Siegel modular 群 $\Gamma^{(n)}$ は

$$\Gamma^{(n)} = Sp_n(\boldsymbol{Z}) = Sp_n(\boldsymbol{R}) \cap M_{2n}(\boldsymbol{Z})$$

で定義される $Sp_n(\boldsymbol{R})$ の離散部分群である．その部分群 $\Gamma_0^{(n)}(N)$ を

$$\Gamma_0^{(n)}(N) = \left\{\begin{pmatrix} AB \\ CD \end{pmatrix} \in \Gamma^{(n)} \mid C \equiv 0_n \pmod N\right\}$$

で定義する．これは，レベル N の合同部分群と呼ばれるものである．

Γ を Siegel modular 群 $\Gamma^{(n)}$ の部分群とする．$\boldsymbol{H}_n$ 上の関数 f が 3 つの条件

(1) f は $\boldsymbol{H}_n$ 上正則，
(2) 任意の $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ に対して，

$$f(M\langle Z\rangle) = f((AZ+B)(CZ+D)^{-1}) = \det(CZ+D)^k f(Z),$$

(3) $n = 1$ のとき f は $i\infty$ で finite.

を満たすとき，f は Γ 上 weight k の n 次 **Siegel modular 形式**であるという．

1.2 Siegel modular 形式の Fourier 展開

以下で Γ として扱う群は，Siegel modular 群全体 $\Gamma^{(n)}$ の場合か合同部分群 $\Gamma_0^{(n)}(N)$ のいずれかの場合である．

$M_k(\Gamma)$ を Γ 上 weight k の Siegel modular 形式全体の成す $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間とする．すると $f \in M_k(\Gamma)$ は

$$f(Z) = \sum_{0 \leq T \in \Lambda_n} a_f(T) \exp[2\pi i\ \mathrm{tr}(TZ)]$$

の形の Fourier 展開を持つ．ここで，Λ_n は

$$\Lambda_n = \{T = (t_{ij}) \in \mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{Q}) \mid t_{ij}, 2t_{ij} \in \boldsymbol{Z}\}$$

で定義される格子である．さらに $\boldsymbol{C}$ の部分環 R に対して

$$M_k(\Gamma)_R = \{f \in M_k(\Gamma^{(n)}) \mid a_f(T) \in R\ (\forall T \in \Lambda_n)\}$$

平成２１年６月２６日受理
* 理学科
** 総合理工学研究科理学専攻

と定義しておく．これは R-加群をなしている．

$S_k(\Gamma)$ で Γ 上 weight k の n 次 cusp 形式全体の成す $M_k(\Gamma)$ の部分空間を表すものとし，$S_k(\Gamma)_R$ も同様に定義しておく．

1.3 Siegel Eisenstein 級数

後の議論において必要となる Siegel Eisenstein 級数の定義を与えておく．これは Siegel modular 形式の典型的な例を与えている．

部分群 $\Gamma_\infty^{(n)} \subset \Gamma^{(n)}$ を

$$\Gamma_\infty^{(n)} = \left\{ \begin{pmatrix} AB \\ CD \end{pmatrix} \in \Gamma^{(n)} \;\middle|\; C = O_n \right\}$$

で定義する．このとき n 次 weight k の Siegel Eisenstein 級数 $E_k^{(n)}(Z)$ を

$$E_k^{(n)}(Z) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ C & D \end{smallmatrix}\right):\Gamma_\infty^{(n)}\backslash\Gamma^{(n)}} \det(CZ+D)^{-k}$$

$$(Z \in \boldsymbol{H}, k > n+1 : \mathrm{even})$$

で定義する．ここで，C と D は $\Gamma^{(n)}$ を $\Gamma_\infty^{(n)}$ で割った剰余類の代表系の行列に対して，その下半ブロックの左右をそれぞれ動くものとする（これは，coprime symmetric pairs の unimdoular 同値類の代表系と呼ばれているものである）．このとき，$E_k^{(n)}$ は $\Gamma^{(n)}$ 上の Siegel modular 形式となること，すなわち $E_k^{(n)} \in M_k(\Gamma^{(n)})$ であることがわかる．さらにその Fourier 係数については，任意の $T \in \Lambda_n$ に対して，Fourier 係数 $a_{E_k^{(n)}}(T) \in \boldsymbol{Q}$ であることが示されている．すなわち

$$E_k^{(n)} \in M_k(\Gamma^{(n)})_{\boldsymbol{Q}}$$

である．$n = 1, 2$ の場合は，$a_{E_k^{(n)}}(T)$ の明示公式が簡明な形で与えられている．(「付録」参照)

§2 Serre の合同関係式について

前節までの準備のもとで，この論説の主題である「Serre の合同式」を述べることができる．それは次のものである．

Theorem (Serre [1]) $\boldsymbol{Z}_{(p)}$ を p 整な有理数全体のなす局所環とする．p を奇素数とするとき，任意の $f \in M_2(\Gamma_0^{(1)}(p))_{\boldsymbol{Z}_{(p)}}$ に対して，$g \in M_{p+1}(\Gamma^{(1)})_{\boldsymbol{Z}_{(p)}}$ で，合同式

$$f \equiv g \pmod p$$

を満たすものが存在する．

この Serre の結果を $n = 1$ の場合のものと解釈すると，一般的に次の事実の成立が予想される．

Conjecture
p を奇素数とする．任意の $F \in M_2(\Gamma_0^{(n)}(p))_{\boldsymbol{Z}_{(p)}}$ に対して，$G \in M_{p+1}(\Gamma^{(n)})_{\boldsymbol{Z}_{(p)}}$ で，合同式

$$F \equiv G \pmod p$$

を満たすものが存在する．

§3 知られている結果

ここでは，予想成立を支持する例で既に証明がなされている事実を 2 つ挙げる．

Example 1
$p > 3$ を $p \equiv 3 \pmod 4$ を満たす素数とし，自然数列 $\{k_m\}_{m=1}^\infty$ を

$$k_m = k_m(p) := 1 + \frac{p-1}{2}p^{m-1}$$

で定義する．

Theorem (Nagaoka [2]) 素数 p，数列 $\{k_m\}$ を上記の様にとる．次数 n，weight k の Siegel Eisenstein 級数 $E_k^{(n)}$ に対して，p 進極限

$$\tilde{E}_1^{(n)} := \lim_{m\to\infty} E_{k_m}^{(n)}$$

が存在し，$\tilde{E}_1^{(n)}$ は weight 1，$\Gamma_0^{(n)}(p)$ 上の Neben 型 $\chi_p = \left(\frac{*}{p}\right)$ (Legendre 記号) の modular 形式となる．すなわち

$$\tilde{E}_1^{(n)} \in M_1(\Gamma_0^{(n)}(p), \chi_p)_{\boldsymbol{Z}_{(p)}}$$

であり，さらに，$n = 2$ のとき，合同式

$$\tilde{E}_1^{(2)} \equiv E_{\frac{p+1}{2}}^{(2)} \pmod p$$

が成立する．

Corollary 定理の条件の下で $\tilde{E}_1^{(2)}$ の平方

$$\tilde{F}_2 := (\tilde{E}_1^{(2)})^2$$

は $M_2(\Gamma_0^{(2)}(p))_{\boldsymbol{Z}_{(p)}}$ の元となる．これについて

$$\tilde{F}_2 \equiv \left(E_{\frac{p+1}{2}}^{(2)}\right)^2 \pmod p$$

が成り立つ．

Corollary は，weight 2 の form $\tilde{F}_2 \in M_2(\Gamma_0^{(2)}(p))_{\boldsymbol{Z}_{(p)}}$ が $\Gamma^{(2)}$ 上の weight $p+1$ の form $\left(E_{\frac{p+1}{2}}^{(2)}\right)^2$ と p を法として合同であることを示しており，予想が成立する例を与えている．

Example 2
p を奇素数とし，

$$k_m = k_m(p) := 2 + (p-1)p^{m-1}$$

で定義される自然数列 $\{k_m\}_{m=1}^\infty$ を考える．

Theorem (Kikuta-Nagaoka [3])
素数 p と数列 $\{k_m\}$ を上記の様にとる．次数 2，weight k の Siegel Eisenstein 級数 $E_k^{(2)}$ に対して，p 進極限

$$\tilde{E}_2 := \lim_{m\to\infty} E_{k_m}^{(2)}$$

が存在し，$\tilde{E}_2$ は weight 2，$\Gamma_0^{(2)}(p)$ 上の modular 形式となる．すなわち

$$\tilde{E}_2 \in M_2(\Gamma_0^{(2)}(p))_{\boldsymbol{Z}_{(p)}}$$

であり，さらに合同式

$$\tilde{E}_2 \equiv E_{p+1}^{(2)} \pmod p$$

が成立する．

この定理も予想が成立する例を与えている．

§4 結果

この節では，論文の目的である，cusp 形式に対する予想成立の数値例の提示を行う．

前節の結果は，あらかじめ与えられていた weight 2 の form が Eisenstein 級数の空間に含まれているものに限られていた．ここでは，次数が 2 の場合，Eisenstein 級数の補空間の元である cusp 形式に対しても、予想が成立している例を挙げる．

群 $\Gamma_0(p) = \Gamma_0^{(2)}(p)$ 上の cusp 形式については，最近 C. Poor と D. S. Yuen によって調べられている ([4]).

Example 1

$p=11$ の場合，Yoshida lift と呼ばれる方法で weight 2，$\Gamma_0^{(2)}(11)$ 上の cusp 形式の例が構成されることが知られている．(cf. [7])

$$S_1^{(11)} := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

$$S_2^{(11)} := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$S_3^{(11)} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 & 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 4 & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

とおく．$S_i^{(11)} \in \Lambda_4$ $(i=1,2,3)$ は discriminant 11^2，level 11 であり，この genus の代表元となっている．Yoshida lift によれば，

$$F_0 := 3\vartheta_1 - \vartheta_2 - 2\vartheta_3$$

$$\vartheta_i(z) := \sum_{X \in M_{4,2}(\boldsymbol{Z})} \exp[2\pi i \mathrm{tr}(S_i^{(11)}[X]Z)]$$

とおくと，F_0 は weight 2，$\Gamma_0^{(2)}(11)$ 上の cusp 形式となることが示されている．すなわち

$$F_0 \in S_2\left(\Gamma_0^{(2)}(11)\right)$$

である．F_0 の Fourier 係数を正規化し，

$$F_{11} := \frac{1}{24}F_0 \quad , \quad a_F\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1$$

となる様におき換える．一方 Igusa によって定義された weight 12 の cusp 形式を X_{12} とする．ただし

$$a_{X_{12}}\left(\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\right) = 1$$

と正規化しておく．F_{11} と X_{12} の Fourier 係数の数値例については Table 2 を参照．

結果 1

$\mathrm{tr}(T) < 5$ を満たす T に対応した Fourier 係数は

$$a_{F_{11}}(T) \equiv a_{-X_{12}}(T) \pmod{11}$$

を満たす．

Example 2

$p=19$ の場合，

まず level 19 の cusp 形式を構成する．

$$S_1^{(19)} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$S_2^{(19)} := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 6 \end{pmatrix}$$

$$S_3^{(19)} := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

とおき，$p=11$ の場合と同様に

$$\vartheta_i(Z) = \sum_{X \in M_{4,2}(\boldsymbol{Z})} \exp[2\pi i \ \mathrm{tr}(S_i[X])]$$

とおく．このとき

$$F_{19} := \frac{1}{8}(\vartheta_1 - 2\vartheta_2 + \vartheta_3)$$

とおくと，$F_{19} \in S_2(\Gamma_0^{(2)}(19))$ となる．

次に，weight が $p+1=20$ の full modular 群 $\Gamma^{(2)}$ 上の cusp 形式 $X_{20} \in S_{20}(\Gamma^{(2)})$ で

$$F_{19} \equiv X_{20} \pmod{19}$$

なるものを探す．$E_4 = E_4^{(2)}$，$E_6 = E_6^{(2)}$，X_{10}，X_{12} を Igusa によって構成された次数 2，偶数 weight の Siegel modular 形式のなす graded ring の生成元とする．求めたい weight 20 の cusp 形式は 3 つの cusp 形式

$$E_4E_6X_{10}, \quad X_{10}^2, \quad E_4^2X_{12}$$

の一次結合として得られるので，

$$X_{20} := 11E_4E_6X_{10} + 4X_{10}^2 + 8E_4^2X_{12}$$

とおく．F_{19} と X_{20} の Fourier 係数の数値例については Table 3 を参照．

結果 2

$\mathrm{tr}(T) < 4$ を満たす T に対応した Fourier 級数は

$$a_{F_{19}}(T) \equiv a_{X_{20}}(T) \pmod{19}$$

を満たす．

以上の事実は，2 次元の場合の予想成立を支持するものである．

付録

次数 2，weight k の Siegel Eisenstein 級数の Fourier 係数 $a_{E_k^{(2)}}(T)$ は Kaufhold[5]，Maass[6] によって明示公式が与えられている．

基本的には 2 個の Bernoulli 数と 1 個の一般 Bernoulli 数で表示される．weight の低い 2 つの Eisenstein 級数 $E_4^{(2)}$，$E_6^{(2)}$ は Igusa の構成した 2 次の Siegel modular 形式のなす環の生成元となっている．以下にこの論文で使った $E_4^{(2)}$，$E_6^{(2)}$，X_{10}，X_{12}，X_{20}，F_{11}，F_{19} の Fourier 係数の数値例を与える (Table 1 ～ Table 3).

Table 1 Fourier coefficients of E_4 and E_6

T	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$
$a_{E_4}(T)$	30240	13440	181440	138240	497280	362880	1239840
$a_{E_6}(T)$	166320	44352	3792096	2128896	23462208	15422400	90644400

Table 2 Fourier coefficients of F_{11} and $-X_{12}$

T	$\begin{pmatrix}2&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}$
$a_{E_4}(T)$	967680	604800	997920	2782080
$a_{E_6}(T)$	65995776	24881472	85322160	530228160

T	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$
$a_{F_{11}}(T)$	1	-1	0	0	1	1	0
$a_{-X_{12}}(T)$	-10	-1	132	88	-736	-1275	-17600

T	$\begin{pmatrix}2&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&1\\1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}$
$a_{F_{11}}(T)$	-1	-1	-2	0	1	-1	0
$a_{-X_{12}}(T)$	8040	-2784	2880	54120	14136	-13080	232320

Table 3 Fourier coefficients of F_{19} and X_{20}

T	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$
$a_{F_{19}}(T)$	1	0	0	-1	0	-1	2
$a_{X_{20}}(T)$	58	19	43548	56	7324576	-1274559	15672152

References

[1] J-P. Serre, Formes modulaires et fonction zeta p-adiques, Lecture Notes in Math. Vol 350, Springer, Berlin, (1973) 191-268.

[2] S. Nagaoka, A remark on Serre's example of p-adic Eisenstein series, Math. Z. **235** (2000), 227-250.

[3] T. Kikuta and S. Nagaoka: On a correspondence between p-adic Siegel-Eisenstein series and genus theta series, preprint, 2007.

[4] C. Poor and D. Yuen, Dimensions of cusp forms for $\Gamma_0(p)$ in degree two and small weights, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, to appear.

[5] G. Kaufhold, Dirichletsche Reihe mit Funktionalgleichung in der Theorie der Modul-funktionen 2. Grades. Math. Ann. **137** (1959), 454-476.

[6] H. Maass, Die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihen zweiten Grades, Mat. -Fys. Medd. Danske Vid. Selsk. 34, no.7, (1964).

[7] H. Yoshida, Siegel's modular forms and the arithmetic of quadratic forms, Inv. Math. **60** (1980),193-248.