近畿大学工学部研究報告　No.48，2014年，pp.83-92
Research Reports of the Faculty of Engineering,
Kinki University No.48 2014, pp.83-92

連分数とペル方程式 I

来嶋大二

Continued fractions and Pell equations　I

Daiji KIJIMA

Abstract

A quadratic irrational is an irrational root of a quadratic polynomial with integer coefficients. Lagrange's theorem on continued fractions is as follows: any positive quadratic irrational has an eventually repeating continued fraction. A short proof of Lagrange's theorem is presented. Let D be a positive integer which is not a square, and p_i/q_i be the irreducible fraction of i-th convergent of $\sqrt{D}$. We put $P_i = {p_{i-1}}^2 - D{q_{i-1}}^2$ and show that the sequence $\{|P_i|\}$ is repeating and palindromic.

Key words: continued fraction, Pell equation

最初に 2 次無理数の連分数展開に関する定理 (ラグランジュ・ガロア・ルジャンドル) とその証明を紹介する．次に

$$P_i = {p_{i-1}}^2 - D{q_{i-1}}^2$$

の性質を考察する．ここに D は平方数でない正の整数であり，p_{i-1}，q_{i-1} は $\sqrt{D}$ の連分数の $i-1$ 次主近似既約分数の分子と分母である．

1．2 次無理数

無理数 w が有理数係数の 2 次方程式

$$x^2 + rx + s = 0 \tag{1}$$

の解であるとき w を 2 次無理数という．r, s は 2 次無理数 w に対して一意的に定まる．

x を変数とする整数係数の多項式 $f(x)$ において，係数の最大公約数が 1 であるとき，$f(x)$ を原始多項式という．2 次無理数 w を解とする整数係数の方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ について，左辺が原始多項式のとき係数 a, b, c は符号を除いて一意的に定まる．このとき $D = b^2 - 4ac$ を w の判別式という．2 次方程式 (1) の解で w と異なる解 w' を w の共役根あるいは w の共役 2 次無理数という．

定義 1　無理数 w と $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbf{Z})$ について

$$A\langle w\rangle = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\langle w\rangle \equiv \frac{aw+b}{cw+d}$$

近畿大学工学部教育推進センター
Center for the Advancement of Higher Educations, Faculty of Engineering, Kinki University

と定める．$A\langle w\rangle$ もまた無理数である．2つの無理数 v, w について，$v=A\langle w\rangle$ となる $A\in GL_2(\mathbf{Z})$ が存在するとき v と w は対等であるという．

補題 2　2次無理数と対等な無理数はまた2次無理数であり，その判別式は一致する．

証明 : w を2次無理数とし，w を解とする整数係数の2次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \tag{2}$$

で左辺が原始多項式であるものを考える．いま v を w と対等な無理数とする．補題 2 を証明するためには v は $-w, \dfrac{1}{w}, w-n$ (n は整数) のいずれかと仮定して十分である（[1] II部 13章 1節参照.）$v=-w$ あるいは $v=\dfrac{1}{w}$ の場合，v を解とする2次方程式はそれぞれ

$$ax^2-bx+c=0 \text{ あるいは } cx^2+bx+a=0$$

である．よって v の判別式も b^2-4ac となる．$v=w-n$ の場合，方程式

$$a(x+n)^2+b(x+n)+c=0$$

が v を解とする方程式である．これを整理すると

$$ax^2+(2an+b)x+(an^2+bn+c)=0 \tag{3}$$

となる．まず (3) の左辺が原始多項式であることを示す．方程式 (3) の係数の最大公約数を m とする．m は $a, 2an+b$ の公約数だから b の約数にもなっている．さらに m は an^2+bn+c の約数でもあるので c の約数でもある．よって m は a,b,c の約数なので1であり，(3) の左辺は原始多項式であることが分った．その判別式は

$$D=(2an+b)^2-4a(an^2+bn+c)=b^2-4ac$$

なので w の判別式と一致する．

補題 3　2次無理数 w と実数 v がある．$wv, w+v$ がともに有理数ならば，v は w の共役根である．

証明 : $w+v=r_1$, $wv=r_2$ とおくと w,v は2次方程式

$$x^2-r_1x+r_2=0$$

のふたつの解である．よって v は w の共役根である．

補題 4　w を2次無理数，$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を $GL_2(\mathbf{Z})$ に属する行列とする．2次無理数 $A\langle w\rangle$ の共役根は $A\langle w'\rangle=\dfrac{aw'+b}{cw'+d}$ である．ただし w' は w の共役根とする．

証明 : 補題 3 より $A\langle w\rangle A\langle w'\rangle$, $A\langle w\rangle+A\langle w'\rangle$ がともに有理数であることを示せばよい．

$$A\langle w\rangle A\langle w'\rangle=\frac{a^2ww'+ab(w+w')+b^2}{c^2ww'+cd(w+w')+d^2}$$

$$A\langle w\rangle+A\langle w'\rangle=\frac{2acww'+(ad+bc)(w+w')+2bd}{c^2ww'+cd(w+w')+d^2}$$

より積と和も有理数である．よって証明された．

補題 5　無理数 v, w と行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in GL_2(\mathbf{Z})$ について，$v=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\langle w\rangle$ のとき次が成立する．

(1) $\dfrac{1}{v}=\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}\left\langle \dfrac{1}{w}\right\rangle$

(2) $-v=\begin{pmatrix} -a & b \\ c & -d \end{pmatrix}\langle -w\rangle$

(3) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\langle v\rangle=w$

証明は容易であり，省略する．

補題 6　無理数 v, w と $GL_2(\mathbf{Z})$ に属する行列 $\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$, $i=1,\cdots,n$ について

$$v=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}\langle w\rangle$$

であるとき次が成立する．

(1) $\dfrac{1}{v}=\begin{pmatrix} d_1 & c_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} d_n & c_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}\left\langle \dfrac{1}{w}\right\rangle$

(2) $-v=\begin{pmatrix} -a_1 & b_1 \\ c_1 & -d_1 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} -a_n & b_n \\ c_n & -d_n \end{pmatrix}\langle -w\rangle$

(3) $\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}^{-1}\cdots\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}^{-1}\langle v\rangle=w$

無理数 w と $GL_2(\mathbf{Z})$ に属する2つの行列 A,B について $A(B\langle w\rangle)=(AB)\langle w\rangle$ が成立する．よって補題 6 の式の記法が使用できる．補題 6 の証明は補題 5 と数学的帰納法により証明は容易であり省略する．

系 7　v,w を無理数，$s_i (i=1,\cdots,n)$ を整数とするとき，

$$v=\begin{pmatrix} s_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} s_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\langle w\rangle$$

ならば

$$\begin{pmatrix} s_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} s_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left\langle -\frac{1}{v}\right\rangle=-\frac{1}{w}$$

となる．

証明：補題 6 (1) より

$$\frac{1}{v}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & s_1 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & s_n \end{pmatrix}\left\langle\frac{1}{w}\right\rangle$$

となる．よって補題 6 (2) より

$$-\frac{1}{v}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -s_1 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -s_n \end{pmatrix}\left\langle-\frac{1}{w}\right\rangle$$

となり，また補題 6 (3) より

$$\begin{pmatrix} s_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} s_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left\langle-\frac{1}{v}\right\rangle=\left\langle-\frac{1}{w}\right\rangle$$

となり主張が証明された．

2. 循環数列

無限数列 $\{a_1, a_2, \cdots\}$ がある．任意の i $(i \geqq 1)$ に対して $a_i = a_{i+s}$ となる正の整数 s が存在するとき，$\{a_1, a_2, \cdots\}$ を純循環数列といい s を周期という．周期に正の整数をかけたものもまた周期である．周期 s の純循環数列は $\{\overline{a_1, \cdots, a_s}\}$ と表される．

補題 8　無限数列 $\alpha = \{a_1, a_2, \cdots\}$ は周期 s かつ周期 t の純循環数列とする．このとき数列 α は周期 (s,t) の純循環数列である．ただし (s,t) は s と t の最大公約数とする．

証明：$as+bt=(s,t)$ となる整数 a,b が存在する．両辺に st の整数倍を加えることにより左辺の s と t の係数を正とする．すなわち $cs+dt=est+(s,t)$ と変形する．ここに c,d,e は正の整数である．このとき

$$a_n = a_{n+cs} = a_{n+cs+dt} = a_{n+est+(s,t)} = a_{n+(s,t)}$$

より $\{a_1, a_2, \cdots\}$ は周期 (s,t) の純循環数列である．

補題 8 より純循環数列の周期には最小のものが存在するが，これを基本周期という．基本周期は任意の周期の約数である．

補題 9　純循環数列 $\{a_1, a_2, \cdots\}$ がある．ある番号 m があり，第 m 項以降の数列が周期 t の純循環数列となるとき数列 $\{a_1, a_2, \cdots\}$ は周期 t の純循環数列である．

証明：純循環数列 $\{a_1, a_2, \cdots\}$ の周期を s とする．1 以上の任意の数を n とする．いま $n+as>m$ となるように正の整数 a を定める．このとき

$$a_n = a_{n+as} = a_{n+as+t} = a_{n+t}$$

となるので $\{a_1, a_2, \cdots\}$ は周期 t の純循環数列となる．

定義 10　無限数列 $\{a_1, a_2, \cdots\}$ がある．この数列のある項から，例えば第 m 項から純循環数列となるとき，数列 $\{a_1, a_2, \cdots\}$ を循環数列という．第 m 項以降の純循環数列の周期，基本周期を循環数列 $\{a_1, a_2, \cdots\}$ の周期，基本周期という．

補題 11　循環数列の基本周期は well-defined である．すなわちある無限数列が第 m 項から基本周期 s の純循環数列であり，かつ第 n 項から基本周期 t の純循環数列ならば $s=t$ である．

証明：$m \leqq n$ として一般性を失わない．第 n 項以降も周期 s の純循環数列なので補題 8 より t は s の約数である．また補題 9 より第 m 項以降も周期 t の純循環数列なので，s は t の約数である．よって $s=t$ となる．

補題 11 より循環数列の「周期」も well-defined である．a_m 以降が純循環数列となる周期 s の循環数列は次のように表される．

$$\{a_1, \cdots, a_{m-1}\overline{a_m, a_{m+1}, \cdots, a_{m+s-1}}\}.$$

定義 12　有限数列 $\{a_0, a_1, \cdots, a_k\}$ がある．

$$a_t = a_{k-t} \quad (t=0,\cdots,k)$$

となっているとき，数列を回文という．k が偶数のとき，数列 $\{a_0, a_1, \cdots, a_k\}$ の丁度まんなかの項 $a_{k/2}$ を回文数列 $\{a_0, a_1, \cdots, a_k\}$ の中央項という．

連分数の定義については参考図書 [2] を参照のこと．本論分では [2] と同様，連分数といえば単純連分数を意味するものとする．

定義 13　無限連分数 $[k_0, k_1, \cdots]$ がある．
数列 $\{k_0, k_1, \cdots\}$ が循環数列（純循環数列）のとき $[k_0, k_1, \cdots]$ を循環連分数（純循環連分数）という．このとき数列 $\{k_0, k_1, \cdots\}$ の周期，基本周期を連分数 $[k_0, k_1, \cdots]$ の周期，基本周期という．純循環連分数，循環連分数は数列の場合と同様に

$$[\overline{k_0, \cdots, k_{s-1}}]$$

$$[k_0, \cdots, k_{m-1}, \overline{k_m, k_{m+1}, \cdots, k_{m+s-1}}]$$

と表される．

3. ラグランジュの定理

2 次無理数 w が 1 より大きく，かつその共役根 w' が $-1<w'<0$ の範囲にあるとき，w を簡約 2 次無理数という．

命題 14　w の連分数展開が純循環連分数ならば，w は簡約 2 次無理数である．

証明：w の連分数を $[\overline{k_0, \cdots, k_{s-1}}]$，$i$ 次主近似既約分数

を $\dfrac{p_i}{q_i}$ とする．$k_s = k_0 \geqq 1$ より，$w > 1$ である．任意の i に対して，$q_i > 0$ であるが，さらに $k_0 > 0$ に注意すると $p_i > 0$ でもある．まず，

$$p_0 \geqq q_0,\ p_i > q_i (i \geqq 1)$$

を示す．実際 $p_0 = k_0$，$q_0 = 1$ より $p_0 \geqq q_0$ となり，

$$p_1 = k_0 k_1 + 1,\ q_1 = k_1$$

より $p_1 > q_1$ となる．よって漸化式

$$p_i = k_i p_{i-1} + p_{i-2},\ q_i = k_i q_{i-1} + q_{i-2}\ (i \geqq 2)$$

より

$$p_i - q_i = k_i(p_{i-1} - q_{i-1}) + (p_{i-2} - q_{i-2})\ (i \geqq 2)$$

となり $i \geqq 2$ のときも $p_i > q_i$ となることが分る．なお，$i = -1$ のときは $p_{-1} = 1, q_{-1} = 0$ と定めるが，このときも $p_{-1} > q_{-1}$ となっている．

ここで w は周期 s の純循環連分数なので

$$w = \begin{pmatrix} p_{s-1} & p_{s-2} \\ q_{s-1} & q_{s-2} \end{pmatrix} \langle w \rangle = \frac{p_{s-1} w + p_{s-2}}{q_{s-1} w + q_{s-2}}$$

である．分母を払うと

$$q_{s-1} w^2 + (q_{s-2} - p_{s-1}) w - p_{s-2} = 0$$

となる．

$$f(x) = q_{s-1} x^2 + (q_{s-2} - p_{s-1}) x - p_{s-2}$$

とおく．$p_i \geqq q_i\ (i \geqq -1)$ であった．ただし等号は $k_0 = 1, i = 0$ のときに成立する．よって

$$f(1) = (q_{s-1} - p_{s-1}) + (q_{s-2} - p_{s-2}) < 0$$

となる．また $p_i > 0\ (i \geqq -1)$ より

$$f(0) = -p_{s-2} < 0$$

である．また $p_i \geqq p_{i-1}$，$q_i \geqq q_{i-1}$ である．ただし $p_i = p_{i-1}$ となるのは $k_0 = 1, i = 0$ のときであり，$q_i = q_{i-1}$ となるのは $k_1 = 1, i = 1$ のときである．よって

$$f(-1) = (q_{s-1} - q_{s-2}) + (p_{s-1} - p_{s-2}) > 0$$

が成立する．したがって $f(x) = 0$ は 1 より大きい解と，-1 と 0 の間に解を持っていることがわかる．1 より大きい解が w で -1 と 0 の間にある解が w' である．よって w は簡約 2 次無理数である．

命題 15　w の連分数展開が循環連分数ならば，w は 2 次無理数である．

証明：命題 14 より w は簡約 2 次無理数と対等である．よって補題 2 より w は 2 次無理数である．

補題 16　同一の判別式に属する簡約 2 次無理数は有限個である．

証明：判別式 D を持つ簡約 2 次無理数 v を解に持つ 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{4}$$

を考える．式 (4) の左辺を $f(x)$ とおくとき，$f(x)$ は原始多項式で 2 次の係数 a は正とする．このとき簡約 2 次無理数が解なので，

$$f(0) = c < 0 \tag{5}$$
$$f(1) = a + b + c < 0 \tag{6}$$
$$f(-1) = a - b + c > 0 \tag{7}$$

が成立する．式 (6) から式 (7) を引くと $b < 0$ となる．$c < 0$ より $-4ac > 0$ である．よって

$$0 < b^2 < b^2 - 4ac = D$$
$$0 < -4ac < b^2 - 4ac = D$$

となる．a, c は 0 ではないことに注意すると，この不等式をみたす整数 a, b, c の組は有限個しかない．よって証明された．

補題 17　w を簡約 2 次無理数とするとき，

$$v = \frac{1}{w - [w]}$$

もまた簡約 2 次無理数である．従って w の n 次全商 $(n \geqq 1)$ はすべて簡約 2 次無理数である．

証明：$0 < w - [w] < 1$ より $v > 1$ である．ここで w, v の共役 2 次無理数をそれぞれ w', v' とおくと，$-1 < w' < 0$ より $w' - [w] < -1$ である．よって $v' = \dfrac{1}{w' - [w]}$ は $-1 < v' < 0$ の範囲にある．よって v も簡約 2 次無理数である．

補題 18　w が簡約 2 次無理数ならば，w の連分数展開は循環連分数である．

証明：w の i 次全商を $v_i\ (i \geqq 0)$ とすると $w = v_0, v_1, \cdots$ はすべて同一の判別式に属する簡約 2 次無理数である（補題 2 参照）．補題 16 より，これらは有限個しかないので $v_i = v_j\ (i < j)$ となる全商 v_i, v_j が存在する．これは連分数の i 次部分商 k_i 以降が $j - i$ の周期で循環することを意味する．

補題 19　v, w を簡約 2 次無理数とする．v と w の整数部分が一致すれば，すなわち $[v] = [w]$ ならば $v = w$ で

ある．

証明 : $v = w + n$ (n は整数) とすると $v' = w' + n$ である．ただし v', w' はそれぞれ v, w の共役根とする．よって $v' - w' = n$ であるが，v', w' はともに -1 より大きく 0 より小さいので $|n| = |v' - w'| < 1$ である．n が整数であることに注意すると $n = 0$ となる．よって $v = w$ である．

補題 18 より強く，補題 14 の逆が成立する．

補題 20　w が簡約 2 次無理数ならば，w の連分数展開は純循環連分数である．

証明 : 補題 18 より w の連分数は循環連分数である．その周期を s とし

$$w = [k_0, \cdots, k_m, \overline{k_{m+1}, \cdots, k_{m+s}}]$$

とおく．$k_m = k_{m+s}$ を示す．w の i 次全商を v_i とすると，$v_{m+1} = v_{m+s+1}$ より

$$\frac{1}{v_m - k_m} = \frac{1}{v_{m+s} - k_{m+s}}$$

すなわち

$$v_m - k_m = v_{m+s} - k_{m+s}$$

となる．v_m, v_{m+s} はともに簡約 2 次無理数なので，補題 19 より $v_m = v_{m+s}$ したがって $k_m = k_{m+s}$ となる．これにより

$$w = [k_0, \cdots, k_{m-1}, \overline{k_m, \cdots, k_{m+s-1}}]$$

であることが分る．この操作を続けていけば

$$w = [\overline{k_0, \cdots, k_{s-1}}]$$

となり v は純循環連分数であることが示された．

補題 21　w が 2 次無理数ならば，w の連分数展開は循環連分数である．

証明 : w が 2 次無理数ならば w の全商はいつかは簡約 2 次無理数となることを示す．w の i 次部分商 $\dfrac{p_i}{q_i}$ と $(i+1)$ 次部分商 $\dfrac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$ で挟まれた区間に w が存在し，この区間の幅は i を大きくしていけば 0 に近づいていく．よって i を十分大きくとれば，$\dfrac{p_i}{q_i}$ と $\dfrac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$ で挟まれた区間に，w の共役根 w' が含まれないようにできる．その i に対し $(i+2)$ 次全商 v_{i+2} を考える．

$$\begin{aligned} w &= \begin{pmatrix} k_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} k_{i+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \langle v_{i+2} \rangle \\ &= \begin{pmatrix} p_{i+1} & p_i \\ q_{i+1} & q_i \end{pmatrix} \langle v_{i+2} \rangle \end{aligned}$$

である．補題 5 の (3) より

$$\begin{aligned} v_{i+2} &= \begin{pmatrix} p_{i+1} & p_i \\ q_{i+1} & q_i \end{pmatrix}^{-1} \langle w \rangle \\ &= (-1)^{i+2} \begin{pmatrix} q_i & -p_i \\ -q_{i+1} & p_{i+1} \end{pmatrix} \langle w \rangle \end{aligned}$$

となる．よって

$$v_{i+2} = \begin{pmatrix} q_i & -p_i \\ -q_{i+1} & p_{i+1} \end{pmatrix} \langle w \rangle = \frac{q_i w - p_i}{-q_{i+1} w + p_{i+1}}$$

となる．両辺の共役根をとると補題 4 より

$$(v_{i+2})' = \frac{q_i w' - p_i}{-q_{i+1} w' + p_{i+1}} \tag{8}$$

となるが w' は $\dfrac{p_i}{q_i}$ と $\dfrac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$ の間にないので，式 (8) の右辺の分母分子の符号は異なる．よって $(v_{i+2})'$ の符号は負となり

$$(v_{i+2})' - k_{i+2} < -1$$

となる．よって

$$(v_{i+3})' = \frac{1}{(v_{i+2})' - k_{i+2}}$$

は，区間 $(-1, 0)$ の中に存在する．すなわち v_{i+3} は簡約 2 次無理数である．

以上をまとめると定理 22 , 定理 23 となる．

定理 22 (ラグランジュ)
実数 w についてつぎは同値である．
(1) w の連分数展開は循環連分数である．
(2) w は 2 次無理数である．

定理 23　実数 w についてつぎは同値である．
(1) w の連分数展開は純循環連分数である．
(2) w は簡約 2 次無理数である．

4. ルジャンドルの定理

補題 24　v, w は無理数で $v > 1$ とする．また k は整数とする．

$$w = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \langle v \rangle$$

が成立するとき，k は w の整数部分，すなわち $[w] = k$ である．よって $k \geqq 1$ ならば $w > 1$ である．また v は w の 1 次全商である．

証明 : 補題 5 の (3) より

$$w = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \langle v \rangle \text{ ならば } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -k \end{pmatrix} \langle w \rangle = v$$

となる．よって $\dfrac{1}{w-k}=v$ となるが，$v>1$ より $0<w-k<1$ となる．よって k は w の整数部分であり，v は w の 1 次全商である．

系 25　次が成立する．
(1) v, w は無理数で $v>1$ とする．また s_0 は整数とし，$s_1,\cdots,s_n$ は正の整数とする．

$$w=\begin{pmatrix} s_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} s_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\langle v\rangle$$

が成立するとき，s_i $(i=0,1,\cdots,n)$ は w の i 次部分商であり，v は w の $(n+1)$ 次全商である．
(2) w は 1 より大きい無理数で，s_i $(i=0,1,\cdots,n)$ は正の整数とする．

$$w=\begin{pmatrix} s_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} s_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\langle w\rangle$$

が成立するとき，$w=[\overline{s_0,\cdots,s_n}]$ となり，w は簡約 2 次無理数である．

証明 : (1) について．補題 24 を順に適用すれば，$s_0,\cdots,s_n$ が w の 0 次から n 次までの部分商であり v が w の $(n+1)$ 次全商であることが分る．
(2) は (1) と定理 23 より導かれる．

定理 26 (ガロア)
w を簡約 2 次無理数とし，その連分数展開を $[\,\overline{k_0,\cdots,k_s}\,]$ とする．このとき $-\dfrac{1}{w'}$ も簡約 2 次無理数であり，その連分数展開は $[\,\overline{k_s,\cdots,k_0}\,]$ となる．

証明 : $-1<w'<0$ より $1<-\dfrac{1}{w'}$ である．行列 A_i を

$$A_i=\begin{pmatrix} k_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ i=0,\cdots,s$$

とおくと，

$$w=A_0A_1\cdots A_s\langle w\rangle$$

である．よって補題 4 より

$$w'=A_0A_1\cdots A_s\langle w'\rangle$$

となる．系 7 より

$$A_s\cdots A_1A_0\left\langle -\frac{1}{w'}\right\rangle=-\frac{1}{w'}.$$

よって系 25 の (2) より，$-\dfrac{1}{w'}$ は簡約 2 次無理数でその連分数は

$$-\frac{1}{w'}=[\overline{k_s,\cdots,k_0}]$$

である．

定理 27 (ルジャンドル)
正の実数 w について次は同値である．
(1) w^2 は平方数でない 1 より大きい有理数である．
(2) w は 1 より大きい 2 次無理数で $v=w+[w]$ とおくと $v_1=-\dfrac{1}{v'}$ が成立する．ただし v_1 は v の 1 次全商，v' は v の共役根である．
(3) w の連分数は

$$[k_0,\overline{k_1,\cdots,k_{s-1},k_s}]\quad (k_s=2k_0,\ k_1,\cdots,k_{s-1}\text{は回文})$$

という形をしている．

(1) $\Rightarrow$ (2) の証明 : w を (1) の条件をみたす数とする．w が 1 より大きい 2 次無理数であることは明らかである．$v=w+[w]$ とおくと $v'=-w+[w]$ となる．したがって

$$-v'=w-[w]=v-2[w]$$

となる．$2[w]$ は v の 0 次部分商なので $\dfrac{1}{v-2[w]}$ は v の 1 次全商 v_1 である．よって $v_1=-\dfrac{1}{v'}$ が成立する．
(2) $\Rightarrow$ (1) の証明 : w を (2) の条件をみたす 2 次無理数とする．$v=w+[w]$ の整数部分は $[v]=2[w]$ であり

$$w-[w]=v-[v]=\frac{1}{v_1}$$

となる．したがって

$$w-[w]=\frac{1}{v_1}=\left(-\frac{1}{v'}\right)^{-1}=-v'$$

$$=-(w+[w])'=-(w'+[w])=-w'-[w]$$

となるが，これより $w=-w'$ となる．これは w が (1) の条件を満たすことを意味する．
(1),(2) $\Rightarrow$ (3) の証明 : w を (1) の条件をみたす 2 次無理数とし，$v=w+[w]$ とおく．$v'=-w+[w]$ に注意すると $-1<v'<0$ となることが分る．よって v は簡約 2 次無理数である．v_1 を v の 1 次全商とすると (2) より $v_1=-\dfrac{1}{v'}$ となる．

$$v=[\overline{2k_0,k_1,\cdots,k_{s-1}}],k_0=[w]$$

とおくと定理 26 より，

$$v_1=-\frac{1}{v'}=[\overline{k_{s-1},\cdots,k_1,2k_0}]$$

となる．v_1 の i $(i\geqq 0)$ 次部分商は v の $(i+1)$ 次部分商であることに注意すると，数列 $\{k_1,\cdots,k_{s-1}\}$ と数列 $\{k_{s-1},\cdots,k_1\}$ は一致する．すなわち数列

$$\{k_1,\cdots,k_{s-1}\}$$

は回文数列である．よって w の連分数は

$$\left[k_0, \overline{k_1, \cdots, k_s}\right] \; k_s = 2k_0,\ \{k_1, \cdots, k_{s-1}\} \text{ は回文}$$

となる．

(3) ⇒ (2) の証明 : w を (3) の条件をみたす無理数とし，

$$v = w + [w]$$

とおく．$[v] = 2[w] = 2k_0 = k_s$ であり，

$$v = [\ \overline{k_s, k_1, \cdots, k_{s-1}}\ ] = [\ \overline{k_s, k_{s-1}, \cdots, k_1}\ ]$$

となる．系 7 より

$$-\frac{1}{v} = \begin{pmatrix} k_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} k_s & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left\langle -\frac{1}{v} \right\rangle$$

となる．ここで v の 1 次全商を v_1 とすると

$$v_1 = \frac{1}{v - k_s} = [\ \overline{k_1, \cdots, k_s}\ ]$$

すなわち

$$v_1 = \begin{pmatrix} k_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} k_s & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \langle v_1 \rangle$$

なので v_1 と $-\dfrac{1}{v}$ を根とする 2 次方程式は一致する．このふたつは符号が異なるので同じ数ではない．よってこのふたつは共役根である．よって $\left(-\dfrac{1}{v'}\right) = v_1$ であり，$-v' = \dfrac{1}{v_1}$ が成立する．よって w は条件 (2) をみたす．

注意 28　命題 27 の (3) において周期 s は基本周期とすることができる．実際 (3) の循環連分数 $\left[k_0, \overline{k_1, \cdots, k_{s-1}, k_s}\ \right]$ の基本周期を t とおくと t は s の約数であり，$k_t = k_s = 2k_0$ となる．このとき数列

$$\{k_1, \cdots, k_{t-1}\} \tag{9}$$

が回文数列であることを示す必要がある．数列 (9) を $s-t$ だけずらした数列

$$\{k_{s-t+1}, \cdots, k_{s-1}\} \tag{10}$$

は同じ数列となる．一方 $\{k_1, \cdots, k_{s-1}\}$ は回文数列であり，この最初の $t-1$ 項が (9)，最後の $t-1$ 項が (10) なので，(9) を逆にした数列

$$\{k_{t-1}, \cdots, k_1\}$$

と (10) は同じ数列となる．すなわち数列 (9) は回文数列である．

5. $P_i = {p_{i-1}}^2 - D{q_{i-1}}^2$

本節では以下の記号を使用する．D を平方数でない正の整数とする．$\sqrt{D}$ の連分数の基本周期を s とし

$$\left[k_0, \overline{k_1, \cdots, k_{s-1}, k_s}\ \right]$$

とおく．$k_s = 2k_0$ で $k_1, \cdots, k_{s-1}$ は回文である．i 次主近似既約分数を $\dfrac{p_i}{q_i}$ $(i \geqq 0)$ とおき，i 次全商を v_i とおく．なお，主近似既約分数，中間近似既約分数およびそれらを総称する近似既約分数という用語の使用法は参考図書 [1] と同様である．

定義 29

$$P_i = {p_{i-1}}^2 - D{q_{i-1}}^2 \ (i = 0, 1, 2, \cdots)$$

と定める．ただし $p_{-1} = 1$，$q_{-1} = 0$ とする．

定理 30　次が成立する．

(1) 数列 P_i は i が偶数なら正，奇数なら負である．

(2) 数列 $\{|P_i|,\ i \geqq 0\}$ は基本周期 s の純循環数列である．よって $P_0 = 1$ より i が s の倍数ならば $|P_i| = 1$ である．

(3) i が s の倍数でないとき $|P_i| > 1$ である．

(4) $|P_0|, \cdots,\ |P_s|$ は回文である．

以下定理 30 を証明する．

補題 31　P_i は i が偶数なら正，奇数なら負である．

証明 : 参考図書 [1] 系 6.12 の証明で示されているように

$$\frac{p_i}{q_i} - \sqrt{D} = \frac{(-1)^{i+1}}{q_i(v_{i+1}q_i + q_{i-1})} \quad (i \geqq 1)$$

である．よって i が奇数のとき $\dfrac{p_i}{q_i} - \sqrt{D} > 0$ となり ${p_i}^2 - D{q_i}^2 > 0$ である．同様にして i が偶数のときは ${p_i}^2 - D{q_i}^2 < 0$ となる．よって P_i は i が偶数なら正，奇数なら負となる．

定義 32

$$v_i = \frac{\sqrt{D} + c_i}{a_i} \quad (i \geqq 0) \tag{11}$$

と有理数 a_i，c_i を定める．a_i，c_i は v_i に対して一意的に定まる．

例 33　a_0, a_1, c_0, c_1 を計算する．

$$v_0 = \sqrt{D} \text{ より } a_0 = 1, c_0 = 0$$

である．また

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{D} - [\sqrt{D}]} = \frac{\sqrt{D} + [\sqrt{D}]}{D - [\sqrt{D}]^2}$$

より

$$a_1 = D - [\sqrt{D}]^2 = D - {k_0}^2,\ c_1 = [\sqrt{D}] = k_0$$

である．

補題 34　$i \geqq 0$ のとき $a_i = |P_i|$ で c_i は整数である．

証明：$i = 0$ のとき．

$$a_0 = 1 = P_0,\ c_0 = 0$$

となり成立している．

$i \geqq 1$ のとき．まず a_i, c_i を p_{i-1}，q_{i-1}，p_{i-2}，q_{i-2} で表す．[1] 系 6.11 より

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} p_{i-1} & p_{i-2} \\ q_{i-1} & q_{i-2} \end{pmatrix} \langle v_i \rangle\ .$$

よって

$$\begin{aligned} v_i &= \begin{pmatrix} p_{i-1} & p_{i-2} \\ q_{i-1} & q_{i-2} \end{pmatrix}^{-1} \langle \sqrt{D} \rangle \\ &= (-1)^i \begin{pmatrix} q_{i-2} & -p_{i-2} \\ -q_{i-1} & p_{i-1} \end{pmatrix} \langle \sqrt{D} \rangle \\ &= \frac{q_{i-2}\sqrt{D} - p_{i-2}}{-q_{i-1}\sqrt{D} + p_{i-1}} \end{aligned}$$

となる．
分母を有理化すると

$$v_i = \frac{(q_{i-2}\sqrt{D} - p_{i-2})(q_{i-1}\sqrt{D} + p_{i-1})}{(-q_{i-1}\sqrt{D} + p_{i-1})(q_{i-1}\sqrt{D} + p_{i-1})}$$

$$= \frac{(p_{i-1}q_{i-2} - p_{i-2}q_{i-1})\sqrt{D} - p_{i-1}p_{i-2} + q_{i-1}q_{i-2}D}{{p_{i-1}}^2 - {q_{i-1}}^2 D}$$

$$= \frac{(-1)^i\sqrt{D} - p_{i-1}p_{i-2} + q_{i-1}q_{i-2}D}{{p_{i-1}}^2 - {q_{i-1}}^2 D}$$

分母分子に $(-1)^i$ をかけて

$$v_i = \frac{\sqrt{D} + (-1)^i(-p_{i-1}p_{i-2} + q_{i-1}q_{i-2}D)}{(-1)^i({p_{i-1}}^2 - {q_{i-1}}^2 D)}$$

$$= \frac{\sqrt{D} + (-1)^i(-p_{i-1}p_{i-2} + q_{i-1}q_{i-2}D)}{(-1)^i P_i}$$

となる．補題 31 より $(-1)^i P_i$ は正となるので

$$a_i = (-1)^i P_i = |P_i|$$

である．また c_i が整数となることも分った．

注意 35　$\sqrt{D}$ の連分数の基本周期は s なので，全商からなる数列 $\{v_n, n \geqq 0\}$ も基本周期 s の循環数列である．よって二つの数列

$$\{a_n, n \geqq 0\},\ \{c_n, n \geqq 0\}$$

は周期 s の循環数列である．数列 $\{v_n\}$ の初項 $v_0 = \sqrt{D}$ を $\sqrt{D} + [\sqrt{D}]$ で置き換えた数列

$$\{\sqrt{D} + [\sqrt{D}], v_1, v_2, \cdots\}$$

は純循環数列である (定理 27)．よって $\{a_n, n \geqq 0\}$ は純循環数列であり，$\{c_n, n \geqq 0\}$ は初項 0 を $[\sqrt{D}] = k_0$ で置き換えると純循環数列となる．したがって

$$\begin{aligned} a_{is} &= 1\ (i = 0, 1, 2, \cdots) \\ c_{is} &= k_0\ (i = 1, 2, \cdots) \end{aligned}$$

である．また例 33 で示したように $c_1 = k_0$ である．よって

$$c_{is+1} = k_0\ (i = 0, 1, 2, \cdots)$$

である．

補題 36　m が s の倍数ならば $a_m = 1$ であるが，m が s の倍数でなければ $a_m \neq 1$ である．

証明：対偶「$a_m = 1$ ならば m は s の倍数」を示す．$a_m = 1$ より，

$$v_m = \sqrt{D} + c_m,\ k_m = c_m + [\sqrt{D}]$$

となる．

$$v_{m+1} = \frac{1}{v_m - k_m} = \frac{1}{\sqrt{D} - [\sqrt{D}]} = v_1$$

より $\{v_1, v_2, \cdots\}$ は周期 m の純循環数列である．よって m は数列 $\{v_1, v_2, \cdots\}$ の基本周期 s の倍数なので $m = ns$ となり主張が証明された．

系 37　$\{a_n = |P_n|,\ n \geqq 0\}$ は基本周期 s の純循環数列である．

証明：周期 s の純循環数列であることは注意 35 ですでに述べているが，補題 36 より s は基本周期である．

命題 38　次が成立する．ただし n は 0 以上の整数とする．

$$\begin{aligned} c_n + c_{n+1} &= a_n k_n \\ a_n a_{n+1} &= D - {c_{n+1}}^2 \end{aligned}$$

証明：

$$v_n = \frac{\sqrt{D} + c_n}{a_n}$$

より

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{v_n - k_n} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{D} + c_n}{a_n} - k_n} \\ &= \frac{a_n}{\sqrt{D} - (a_n k_n - c_n)} \end{aligned}$$

分母を有理化して

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{a_n\{\sqrt{D}+(a_nk_n-c_n)\}}{D-(a_nk_n-c_n)^2} \\ &= \frac{\sqrt{D}+(a_nk_n-c_n)}{\dfrac{1}{a_n}\{D-(a_nk_n-c_n)^2\}} \end{aligned}$$

よって $c_{n+1}=a_nk_n-c_n$ となり，$c_n+c_{n+1}=a_nk_n$ が成立する．

$$v_{n+1}=\frac{\sqrt{D}+c_{n+1}}{\dfrac{1}{a_n}(D-{c_{n+1}}^2)}$$

より

$$a_{n+1}=\frac{1}{a_n}(D-{c_{n+1}}^2)$$

となり，$a_na_{n+1}=D-{c_{n+1}}^2$ が導かれた．

系 39　次が成立する．
(1) $c_0=0,\ 0<c_i \leqq k_0\ (i \geqq 1)$
(2) $a_ik_i \leqq 2k_0\ (i \geqq 0)$

証明 : (1) について．$c_0=0$ はすでに示している．$i \geqq 1$ のとき $0<c_i \leqq k_0$ を示す．$v_i\ (i \geqq 1)$ の連分数は純循環なので，v_i は簡約 2 次無理数である．よって

$$1<v_i=\frac{\sqrt{D}+c_i}{a_i},\ -1<{v_i}'=\frac{-\sqrt{D}+c_i}{a_i}<0$$

より

$$a_i<\sqrt{D}+c_i,\ -a_i<-\sqrt{D}+c_i<0$$

となる．従って xy 平面上の点 $\mathrm{P}(a_i,c_i)$ を考えると，P は領域

$$x<\sqrt{D}+y,\ -x<-\sqrt{D}+y<0$$

の内部に存在する．この領域は 3 点

$$(0,\sqrt{D}),(2\sqrt{D},\sqrt{D}),(\sqrt{D},0)$$

を頂点とする三角形の内部である．よって $0<c_i<\sqrt{D}$ である．よって $0<c_i \leqq k_0\ (i \geqq 1)$ が成立する．
(2) について．命題 38 および系 39 (1) より $i \geqq 0$ のとき

$$a_ik_i=c_i+c_{i+1} \leqq 2k_0$$

となり主張が成立する．

命題 40　次が成立する．
(1) $i\ (i \neq 0)$ が s の倍数ならば $k_i=2k_0$ である．
(2) i が s の倍数でないとき $k_i \leqq k_0$ である．

証明 : (1) は定理 27 で示した．(2) について．補題 36 より i が s の倍数でなければ $a_i \geqq 2$ である．また系 39 より $a_ik_i \leqq 2k_0\ (i \geqq 0)$ なので (2) が成立する．

補題 41　m,n は整数で，$n \geqq 1, m \geqq 2$ とする．次が成立する．
(1) $a_{n-1}=a_{n+m},\ c_n=c_{n+m} \Longrightarrow a_n=a_{n+m-1}$
(2) $a_n=a_{n+m},\ c_n=c_{n+m+1},\ k_n=k_{n+m}$
　　$\Longrightarrow c_{n+1}=c_{n+m}$

(1) の証明 : 命題 38 と $c_n=c_{n+m}$ より

$$a_{n-1}a_n=D-{c_n}^2=D-{c_{n+m}}^2=a_{n+m-1}a_{n+m}$$

となる．よって $a_{n-1}a_n=a_{n+m-1}a_{n+m}$ である．この両辺を $a_{n-1}=a_{n+m}$ で割ると $a_n=a_{n+m-1}$ となる．

(2) の証明 : 命題 38 と $a_n=a_{n+m},\ k_n=k_{n+m}$ より

$$c_n+c_{n+1}=a_nk_n=a_{n+m}k_{n+m}=c_{n+m}+c_{n+m+1}$$

となる．左辺と右辺から $c_n=c_{n+m+1}$ を引くと $c_{n+1}=c_{n+m}$ となる．

命題 42　次が成立する．
(1) $s+1$ 項の数列 $a_0,a_1,\cdots,a_{s-1},a_s$ は回文である．なお初項 a_0 と終項 a_s は 1 である．
(2) s 項の数列 $c_1,c_2,\cdots,c_{s-1},c_s$ は回文である．なお初項 c_1 と終項 c_s は k_0 である．

証明 : (1) または (2) の少なくとも一方が成立しないと仮定する．すなわち

$$a_t \neq a_{s-t}\ (0 \leqq t \leqq s)\ \text{または}\ c_t \neq c_{s+1-t}\ (1 \leqq t \leqq s)$$

となる番号 t が存在すると仮定する．このような番号の中で最小であるものを u とする．なお $a_0=a_s=1$ となることは注意 35 ですでにみているので $u \geqq 1$ となる．
場合 1: $c_u \neq c_{s+1-u}$ のとき．
$c_1=c_s=k_0$ より $u \geqq 2$ である．u の最小性より $u<s+1-u$ である．よって $s-2u>-1$ すなわち $s-2u \geqq 0$ である．したがって

$$u-1 \geqq 1 \tag{12}$$

$$s+2-2u \geqq 2 \tag{13}$$

となる．ふたたび u の最小性より

$$c_{u-1} = c_{s+2-u} \tag{14}$$

$$a_{u-1} = a_{s+1-u} \tag{15}$$

である．式 (12)，(13) より $u-1$ の範囲を調べると

$$1 \leqq u-1 \leqq \frac{s}{2}-1$$

となる．定理 27 より，$k_1,\cdots,k_{s-1}$ は回文である．よって

$$k_{u-1}=k_{s+1-u} \tag{16}$$

である．ここで

$$n = u - 1, m = s + 2 - 2u$$

とおくと (12),(13) より

$$n \geqq 1,\ m \geqq 2$$

となる．また $n + m = s + 1 - u$ なので (15),(14),(16) より

$$a_n = a_{n+m},\ c_n = c_{n+m+1},\ k_n = k_{n+m}$$

となる．よって補題 41(2) を適用して $c_{n+1} = c_{n+m}$ すなわち

$$c_u = c_{s+1-u}$$

となるが，これは場合 1 の仮定に反する．
場合 2: $c_u = c_{s+1-u}, a_u \neq a_{s-u}$ のとき．
$a_0 = a_s = 1$ より $u \geqq 1$ となることはすでに注意した．
u の最小性より $u < s - u$ よって $s - 2u \geqq 1$ である．

$$n = u, m = s + 1 - 2u$$

とおくと $n \geqq 1, m \geqq 2$ である．$c_u = c_{s+1-u}$ であるが，これを n, m を用いて表すと

$$c_n = c_{n+m}$$

となる．また u の最小性より $a_{u-1} = a_{s+1-u}$ であるがこれは

$$a_{n-1} = a_{n+m}$$

となる．補題 41(1) を適用すると $a_n = a_{n+m-1}$ すなわち

$$a_u = a_{s-u}$$

となるが，これは場合 2 の仮定に反する．

系 43　数列 $\{P_i,\ i \geqq 0\}$ について次が成立する．
(1) s が偶数のとき，$\{P_i,\ i \geqq 0\}$ は基本周期 s の純循環数列で，最初の $s+1$ 項 $\{P_i,\ 0 \leqq i \leqq s\}$ は回文である．
(2) s が奇数のとき，$\{P_i,\ i \geqq 0\}$ は基本周期 $2s$ の純循環数列で，最初の $2s+1$ 項 $\{P_i,\ 0 \leqq i \leqq 2s+1\}$ は回文である．

証明：補題 34 より $P_i = (-1)^i a_i$ が成立する．
(1)：s が偶数のとき．数列 $\{P_i;\ 0 \leqq i \leqq s\}$ の項数 $s+1$ は奇数である．したがって初項と末項の符号は正である．またこの数列の絶対値をとった数列 $\{a_0, a_1, \cdots, a_s\}$ は命題 42 より回文である．したがって与えられた数列も回文である．
(2)：s が奇数のとき．$s+1$ は偶数であるが，$2s+1$ が奇数となり (1) と同様に証明できる．

参考文献

[1] 来嶋大二箸　ひまわりの螺旋
共立出版 2012
[2] 高木貞治著 初等整数論講義 (第 2 版 35 刷)
共立出版 2004