

葉序と格子と連分数について

来嶋大二

A note on phyllotaxes, lattices and continued fractions

Daiji KIJIMA

Abstract

Let w be an irrational number and c be a positive number. The lattice $\Lambda(w, c)$ is the set of all points $m(1, 0) + n(w, c)$, where m, n are integers. The purpose of this paper is to show that there is a one-to-one correspondence between the set of convergents of the continued fraction w and the set of convergent points of $\Lambda(w, c)$. As an application, the relationship between the phyllotaxis determined by w and $\Lambda(w, c)$ is considered.

Key words: phyllotaxis, lattice, continued fraction

はじめに

茎のまわりの葉の配列で互生葉序と呼ばれるものは、分数で表わす開度法と、斜列法のふたつの表わし方がある。本論文では格子、連分数を用いて開度法と斜列法の関係を明らかにする。さらに格子の「分布係数」を定義し、それを用いて自然界にみられる葉序に対応する格子について調べる。

1. 葉序の種類

茎のまわりの葉の配列を葉序という。葉序は輪生葉序と互生葉序に分けられる。輪生葉序とは一つの節に複数の葉がつくものをいい、一つの節に一つの葉がつくときを互生葉序という。互生葉序では、葉の接続点が下から順に一定の角度になることが多い。この場合茎のまわりを葉の接続点に沿って下から一定の角度を回ってたどっていくと螺旋状になるので、螺旋葉序とも呼ばれる。この螺旋を基礎螺旋といい、また一定の角度を開度という。開度のはかりかたには右回り、左回りの方法がある。こ

の二通りの開度の合計は 360° となるが、このうち小さい方を小開度、大きい方を大開度という。互生葉序は分数で表わされる。ある点から出発して丁度真上の点まで基礎螺旋が m 回転し、その間に n 個の点があるとき m/n と表わす。この分数から開度が求められそれは $2m\pi/n$ となる。参考文献 [1] では、このように分数で表わす方法を開度法と呼んでいる。ちなみに同じ配列を右回り・左回りの葉序で表わしたときその和は 1 となる。このほかに斜列線法あるいは斜列法という互生葉序の表わし方がある。これは円柱上の点を結んで出来る(基礎螺旋でない)螺旋が、右回り・左回りそれぞれ何本あるかを数える方法である。

2. 開度法と斜列法

[1] には開度法と斜列法がおおよそ次の表のように対応しているとある。表.1によると葉序 $5/13$ に対応する斜列法は $5:8$ である。次に葉序 $5/13$ を持つ円柱の図を画き、右回りの斜列線を引いた。表.1 の対応に従えば図.3

のように8本の斜列が数えられるはずだが、図.1にあるように3本と見ることも出来る。なお図.2, 図.4は円柱面を xy 平面の領域 $0 \leq x, y \leq 1$ に写したものである。「どの傾きの斜列が目につきやすいか」ということは縦方向の点の間隔によると思われる。これらの考察を平面で行う。点と点を結ぶ右上がりの線分の中でその長さが最小な線分はどれか、左上がりの線分についてはどうかということを考える。

表.1 開度法と斜列法の対応

開度法	1/3	2/5	3/8	5/13	8/21	13/34
斜列法	1:2	2:3	3:5	5:8	8:13	13:21

3. 連分数と格子

連分数に関する各記号や用語の定義は [2] に従う。

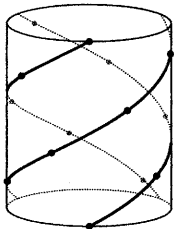


図.1 円柱右斜列 3本

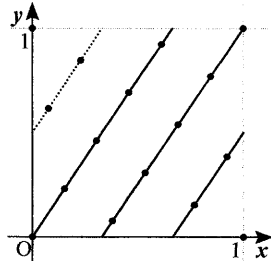


図.2 平面右斜列 3本

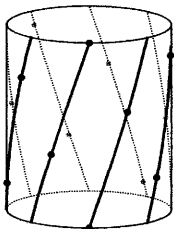


図.3 円柱右斜列 8本

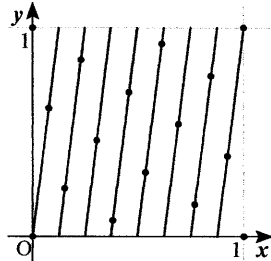


図.4 平面右斜列 8本

連分数

$$w = [k_0, k_1, k_2, k_3, \dots]$$

において

$$[k_0, k_1, \dots, k_n]$$

であらわされる有理数を w の n 次主近似分数という。また近似分数と言えば主近似分数または中間近似分数を指す。近似分数 p/q というとき、これは既約分数であり分母は正とする。図.1 から図.4 における葉序 5/13 の連分数は

$$[0, 2, 1, 1, 1, 1]$$

である。0 次から 4 次までの主近似分数は

$$0/1, 1/2, 1/3, 2/5, 3/8$$

となるが、この分母が斜列線の数と関係している。この場合は 3 と 8 が右上がりの斜列線の個数の候補であり、

2 と 5 が左上がりの斜列線の個数の候補である。[1] では葉序の列の極限開度についての言及があるが、これは葉序の列が主近似分数の列となるような無理数で定まる角度である。次に無理数で定まる格子を定義する。

定義 1 格子

xy 平面において、平行な直線を等間隔で引く。次に別の方向に平行な直線をまた等間隔で引く。ただし最初の平行線の間隔とあとの平行線の間隔は同じとは限らない。このようにして作られた二組の平行線の交点全体を格子と言ひ、一つ一つの交点を格子点と言ひ。 Λ を、原点が格子点であるような格子とする。このとき Λ の格子点の位置ベクトル全体を格子群と言ひ。格子群の二つのベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} があり、任意の格子群のベクトルが

$$m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, (m, n \text{ は整数})$$

と表わされるとき、 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ を格子 Λ の基底と言ひ。以下、格子は原点を格子点に持つとする。

定義 2 無理数で定まる格子

w を無理数とし、

$$\mathbf{a} = (1, 0), \mathbf{b} = (w, c) (c > 0)$$

を基底とする格子を考える。これを無理数 w と正数 c で定まる格子と言ひ、 $\Lambda(w, c)$ と書く。 n を整数とすると、 $\Lambda(w, c)$ と $\Lambda(w - n, c)$ は一致する。また $\Lambda(w, c)$ と $\Lambda(-w, c)$ は y 軸に関して対称となる。

定義 3 近似格子点

xy 平面に二つのベクトル $\mathbf{x}_+, \mathbf{x}_-$ があり、 \mathbf{x}_+ の x 成分は正、 \mathbf{x}_- の x 成分は負とする。まず、

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_+ + \mathbf{x}_-$$

とおく。 \mathbf{y}_1 の x 成分が正なら \mathbf{x}_+ を \mathbf{y}_1 に入れかえ、負なら \mathbf{x}_- を \mathbf{y}_1 に入れかえる。このようにして新しく $\mathbf{x}_+, \mathbf{x}_-$ を作る。つぎに

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_+ + \mathbf{x}_-$$

とおく。前と同様に、 \mathbf{y}_2 の x 成分の正負に応じて \mathbf{x}_+ あるいは \mathbf{x}_- を \mathbf{y}_2 に入れかえる、これを繰り返してベクトルの列 $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots$ を作っていく。以上の操作を w を無理数として

$$\mathbf{x}_- = (-1, 0), \mathbf{x}_+ = (w - [w], c)$$

から始める。このとき

$$(w - [w], c), \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots$$

を位置ベクトルとする点を順に、

$$Y_0, Y_1, Y_2, \dots$$

とし、これらを $\Lambda(w, c)$ の近似格子点と言ひ。そのなかでも Y_n と Y_{n+1} の x 座標の符号が異なるとき、 Y_n を

主近似格子点という。主近似格子点ではない近似格子点を中間近似格子点という。主近似格子点を順に

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots$$

とし、それらの位置ベクトルを

$$p_0, p_1, p_2, p_3, \dots$$

する。 $P_0 = Y_0$ である。 P_n の x 座標の絶対値は単調に減少している。

命題 4 無理数 w で定まる格子 $\Lambda(w, c)$ において主近似格子点 P_n の座標を $(qw - p, qc)$ とするとき p/q は w の n 次主近似分数である。同様に $(qw - p, qc)$ が中間近似格子点の座標なら、 p/q は w の中間近似分数である。即ち w の近似格子点と近似分数は 1 対 1 に対応している。

証明: $p_n = k_n p_{n-1} + p_{n-2}$ ($n \geq 1$) と k_n を定めると k_n は w の連分数の n 次の項 (n 次の部分商) となる。(ただし $p_{-1} = (-1, 0)$ とおく) ここで

$$p_n = q_n p_0 + p_{n-1} = (q_n w - p_n, q_n c)$$

と p_n, q_n を定めると、漸化式

$$q_n = k_n q_{n-1} + q_{n-2}, p_n = k_n p_{n-1} + p_{n-2}$$

が成立する。また

$$q_{-1} = 0, p_{-1} = 1, q_0 = 1, p_0 = [w] = k_0$$

に注意すると p_n/q_n は w の n 次主近似分数であることがわかる。中間近似格子点に関する主張が成立することも同様に示される。

線分 AB を対角線とし、辺が x 軸 y 軸に平行な長方形を $L(AB)$ で表わす。その面積も同じ記号で表わす。なお今後特に断らない限り無理数 w は $0 < w < 1/2$ の範囲にあるとする。 y 軸に関して対称な格子を同一視すればすべての無理数で定まる格子はこの範囲の無理数 w で実現できる。斜列線の本数を調べるために、原点が一番近い y 座標が正である格子点はどれか、あるいは第 1 象限と第 2 象限に分けたときにはどれか、ということを考える。

定理 5 $\Lambda(w, c)$ において、 y 座標が正である格子点 P に関する次の四つの条件を考える。

- (A) P は近似格子点である。
- (B) $L(OP)$ の周または内部にある格子点は O と P だけである。
- (C) P は主近似格子点である。
- (D) y 座標が正でかつ t 以下である格子点のなかで、 P が最も y 軸に近い点である。ただし t は P の y 座標とする。

このとき次の (A) と (B) は同値であり、また (C) と (D)

は同値である。

証明:[2] の定理 2.8[第二] より (A) と (B) の同値が、[第一] より (C) と (D) の同値が分かる。ただし w の連分数において $k_1 = 1$ のときは $q_0 = q_1 = 1$ となり主近似格子点 P_0 は (D) を満たさない。しかしここでは w は $0 < w < 1/2$ の範囲にあるとしているのでこの場合は除外される。

定理 6 格子 $\Lambda(w, c)$ の格子点 $P(qw - p, qc)$ がある。 P の y 座標は正とし、また線分 OP の間に他の格子点が存在しないとする。ここで P に関するふたつの条件を考える。

$$(E) L(OP) < c/2$$

$$(F) L(OP) < c$$

このとき (E) \implies (C) \implies (F) \implies (A) が成立する。ただし (A), (C) は定理 5 における条件 (A), (C) である。

証明:定理の主張を連分数の用語でいうと次のようなる。無理数 w と正の既約分数 p/q について、つぎが成立する。

$$(a) q|qw - p| < 1/2 \implies p/q \text{ は } w \text{ の主近似分数}$$

$$(b) p/q \text{ は } w \text{ の主近似分数} \implies q|qw - p| < 1$$

$$(c) q|qw - p| < 1 \implies p/q \text{ は } w \text{ の近似分数}$$

(a) については [2]p154 問題 3 より、(b) については [2]p133 の 2 行目より、(c) については [2]p155 の注意より成立することがわかる。

格子 Λ において、格子点を 4 頂点とする四角形があり、この四角形の周または内部の格子点はこの 4 頂点だけとする。このような平行四辺形の面積は一定となるが、これを $d(\Lambda)$ と書く。 $\Lambda(w, c)$ の場合 $d(\Lambda(w, c)) = c$ となる。

命題 7 無理数 w で定まる格子 $\Lambda(w, c)$ において、 P を第 1 象限または第 2 象限にある (即ち y 座標が正であるような) 格子点とする。 P に関する次の 5 つの条件を考える。

(1) $L(OP) < \frac{c}{2}$ で線分 OP には両端以外に格子点は存在しない。

(2) 原点 O から、第 1 象限または第 2 象限の格子点までの距離の中で、 OP が最小値となるような c が存在する。

(3) P は主近似格子点である。

(4) 原点 O から、 P の属する象限の格子点までの距離の中で、 OP が最小値となるような c が存在する。

(5) P は近似格子点である。

このとき (1) \implies (2) \implies (3) \implies (4) \implies (5) が成立する。

(1) \implies (2) の証明: 格子点 P が直線 $y = x$ または $y = -x$

上にあれば、OP が格子点間の距離の最小値となることを示す。 $L(OP) < c/2$ より、

$$OP^2 = 2L(OP) < c$$

である。よって

$$OP < \sqrt{c} = \sqrt{d(\Lambda)}$$

となる。さて直線 OP 上にない格子点 C を考える。C と直線 OP の距離を h とする。三角形 OPC の面積は $d(\Lambda)/2$ 以上、すなわち $OP \cdot h/2 \geq d(\Lambda)/2$ であることに注意すると

$$h \geq d(\Lambda)/OP > d(\Lambda)/\sqrt{d(\Lambda)} = \sqrt{d(\Lambda)}$$

である。したがって $OC \geq h > \sqrt{d(\Lambda)} > OP$ となり、OP が 2 格子点間の距離の最小値となることが分かる。

(2) \Rightarrow (3) の証明：(2) の c に対して $\Lambda(w, c)$ における格子点 P は定理 5 の (D) の条件を満たす。よって (3) が成立する。

(3) \Rightarrow (4) の証明：P が第 1 象限にある主近似格子点の場合を考える。(第 2 象限にある場合も同様である。) 直線 OP の傾きが 1 となるように c を定める。P と y 軸および原点に関して対称な点を R および S とする。定理 5 より、 $L(OP)$ と $L(OR)$ の中にある格子点は O と P だけである。よって格子は原点に関して対称であることに注意すれば $L(SP)$ の中のある格子点は S, O, P だけであることが分かる。正方形 $L(SP)$ を O が P に移るように平行移動する。平行移動した正方形の周または内部にある格子点は O, P, C の 3 点だけである。(ただし C は P の移動した点とする) よって P は第 1 象限で原点に最も近い格子点であることがわかる。これで P は条件 (4) を満たすことが証明された。

(4) \Rightarrow (5) の証明： c は P が第 1 象限の格子点の中で原点が一番近い点となるように c を定める。このとき $L(OP)$ の中にある格子点は O と P だけなので定理 5 より P は近似格子点である。

4. 主近似分数の分母と斜列数

ここで開度法と斜列法の関係について考える。何本の斜列線が数えられるか、という事については斜列線の傾きや c の値 (格子の縦方向の密度) によって本数が変わってくると考えられる。斜列線を考えるときに問題になるのは「原点に近い格子点はどれか?」ということである。命題 7 で示したように第 1 象限に限定したときに (あるいは第 2 象限に限定したときに) その中の格子点で原点が一番近い点は近似格子点である。また第 1 および第 2 象限の中で一番近い点は主近似格子点である。以上のことから「原点と近似格子点 P を結ぶ直線を斜列線の傾きとしたとき、その斜列線は何本あるか?」ということが問題となる。その数はその近似格子点 P に対応する近似既約分数の分母の値となる。実際その分母を q とす

ると、その近似格子点は ($0 \leq x < 1$ の領域の中で) 原点から順に上に数えていって q 番目の格子点である。また、 m 番目 ($1 \geq m \geq q$) の格子点を通り、直線 OP に平行な q 本の直線が斜列線全体となる。

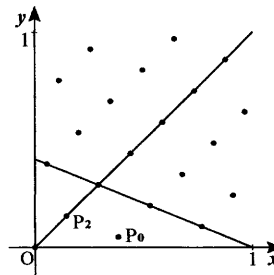


図.5 斜列法 (2,3)

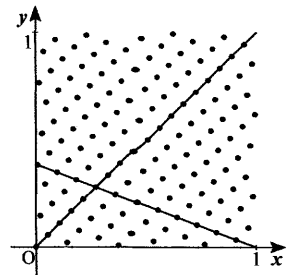


図.6 斜列法 (5,8)

図.5 は $w = (3 - \sqrt{5})/2$ によって定まる格子 $\Lambda(w, c)$ で、 $0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1$ の範囲を図にした。 w の連分数表示は $[0, 2, 1, 1, \dots]$ で、1 次から 4 次までの主近似既約分数は $1/2, 1/3, 2/5, 3/8$ となる。主近似格子点 P_n の y 座標は $q_n c$ であるが、これは $y > 0$ の範囲で考えて P_n が下から q_n 番目の点であることを意味している。図.5 は直線 OP_2 の傾きが 1 となるように c を定めていて、斜列法の (2,3) という数字が読み取れる。図.6 は直線 OP_4 を傾き 1 とするよう c を定めた。これからは斜列法 (5,8) が読み取れる。これは $q_3 = 5, q_4 = 8$ に対応している。

例 8 リュカ格子を作る

初項が 1, 第 2 項が 3 の一般フィボナッチ数列をリュカ数列という。斜列数がリュカ数となるような格子 $\Lambda(w_1, c)$ を作りたい。 w_1 の主近似分数の分母 q_n が斜列数に対応している。

表.2 リュカ数の斜列数 (1)

n	-1	0	1	2	3	4	5	...
k_n		0	3	1	1	1	1	...
p_n	1	0	1	1	2	3	5	...
q_n	0	1	3	4	7	11	18	...

表.3 リュカ数の斜列数 (2)

n	-1	0	1	2	3	4	5	...
k_n		0	1	2	1	1	1	...
p_n	1	0	1	2	3	5	8	...
q_n	0	1	1	3	4	7	11	...

表.2 の作成方法を説明すると、まずリュカ数列より数列 $\{q_n\}$ が定まる。次に漸化式を用いて k_n を定め、つぎに p_n を計算して表を完成させた。表.2 の連分数 w_1 は $(5 - \sqrt{5})/10$ となる。これ以外に q_n にリュカ数列が表れるのを考えたのが表.3 である。表.3 の連分数 w_2 は $(5 + \sqrt{5})/10$ となる。 w_1 と w_2 の和は 1 なのでこの二つの無理数で出来る格子 $\Lambda(w_1, c), \Lambda(w_2, c)$ は y 軸に関

して対称となる。

5. シンパー・ブラウンの法則

葉序がつぎのいずれか

$$\frac{1}{m}, \frac{1}{m+1}, \frac{2}{2m+1}, \frac{3}{3m+2}, \frac{5}{5m+3}, \dots$$

になることを、シンパー・ブラウンの法則という。主近似分数の分子がフィボナッチ数列 $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ となるような連分数 w は k_2 以降の部分商はすべて1となる。今 $k_0 = 0, k_1 = m$ とおくと主近似分数がシンパー・ブラウンの法則の分数となる。 $0 < w < 1/2$ とすれば $m \geq 2$ となる。 $w = \frac{2}{2m-1+\sqrt{5}}$ であるが、 $m = 2, 3, 4$ のときの w の値を書いておく。

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{5-\sqrt{5}}{10}, \frac{7-\sqrt{5}}{22}$$

w の値に 2π をかけた極限開度を度数法で表わすとそれぞれ、137度30分28秒、99度30分6秒、77度57分19秒となる。なおこの極限開度については [1] でも言及されている。 [1] ではシンパー・ブラウンの法則の変形として $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{5}{12}, \frac{8}{19}, \frac{13}{31}, \frac{21}{50}$ なる葉序の列があげられている。

1次以上の主近似分数の分子が $1, 2, 3, 5, 8, \dots$ となる場合を考えてみる。

表.4 シンパー・ブラウンの法則の変形

n	-1	0	1	2	3	4
k_n		0	m	2	1	1
p_n	1	0	1	2	3	5
q_n	0	1	m	$2m+1$	$3m+1$	$5m+2$

$k_1 = m$ とおくと表.4 のようになる。 $m = 2$ のとき、連分数 $[0, 2, 2, 1, 1, 1, \dots]$ で表わされる無理数 w を計算すると $(7+\sqrt{5})/22$ となり、 [1] で言及されているシンパー・ブラウンの法則の変形の葉序となる。極限開度は $w \times 2\pi = 151$ 度8分8秒となる。

6. 分布係数と全分布関数

定義 9 分布係数

格子 Λ において、2格子点間の距離の最小値を $\delta(\Lambda)$ と書き、格子点を4頂点とする平行四辺形の面積の最小値を $d(\Lambda)$ とかく。このとき格子 Λ の分布係数を

$$U(\Lambda) = \frac{\delta(\Lambda)^2}{d(\Lambda)}$$

と定義する。 $U(\Lambda)$ は

$$0 < U(\Lambda) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

の範囲にある。 $U(\Lambda) = 2/\sqrt{3}$ となるのは3頂点を格子点とし、その周または内部には他の格子点を含まないような正三角形が存在するときである。

例 10 格子 $\Lambda(w, c)$ の分布係数

$OP = \delta(\Lambda(w, c))$ となる点 P 、即ち OP が2格子点間の最小値を与える点 P は n 次主近似格子点 $P_n, (n \geq -1)$ の中に存在する。よって

$$U(\Lambda(w, c)) = \text{Min} \left\{ \frac{(OP_n)^2}{c}, n \geq -1 \right\}$$

となる。ただし $P_{-1}(-1, 0)$ とする。

定義 11 n 次分布関数 $V_{(w,n)}(c)$ の定義

$\Lambda(w, c)$ において、 n 次主近似格子点を P_n とする。このとき c についての関数

$$V_{(w,n)}(c) = \frac{(OP_n)^2}{c}$$

を w の n 次分布関数という。

P_n の座標は $(q_n w - p_n, c q_n)$ なので

$$V_{(w,n)}(c) = c(q_n)^2 + \frac{1}{c}(q_n w - p_n)^2$$

である。

例 12 0次分布関数と-1次分布関数

0次主近似格子点の座標は $P_0(w, c)$ であり

$$V_{(w,0)}(c) = \frac{(OP_0)^2}{c} = \frac{w^2 + c^2}{c} = c + \frac{1}{c}w^2$$

となる。 $n = -1$ のときは $P_{-1}(-1, 0)$ なので

$$V_{(w,-1)}(c) = \frac{(OP_{-1})^2}{c} = \frac{1}{c}$$

となる。

定義 13 格子 $\Lambda(w, c)$ の全分布関数

格子 $\Lambda(w, c)$ において

$$V_{(w,+)}(c) = \text{Min} \left\{ \frac{(OP_n)^2}{c}, n \geq 1 \right\}$$

を w の全分布関数という。

7. n 次極小点

定義 14 $n \geq 0$ のとき w の n 次分布関数 $V_{(w,n)}(c)$ の最小値となる曲線上の点を w の n 次極小点という。

定理 15 w の n 次極小点の座標は

$$\left(\left| w - \frac{p_n}{q_n} \right|, 2q_n^2 \left| w - \frac{p_n}{q_n} \right| \right)$$

である.

証明: 関数

$$V_{(w,n)}(x) = x(q_n)^2 + \frac{1}{x}(q_n w - p_n)^2, (x > 0)$$

の最小値と, そのときの x の値を計算する. 相加平均と相乗平均の関係を利用すると

$$x(q_n)^2 + \frac{1}{x}(q_n w - p_n)^2 \geq 2q_n^2 \left| w - \frac{p_n}{q_n} \right|$$

より, $2q_n^2 \left| w - \frac{p_n}{q_n} \right|$ が最小値であり, そのときの x の値は

$$x(q_n)^2 = \frac{1}{x}(q_n w - p_n)^2$$

より $x = \left| w - \frac{p_n}{q_n} \right|$ のときに最小値をとる.

8. 黄金格子

w の連分数表示を $[0, k_1, k_2, k_3, \dots]$ とする. また w の n 次主近似分数を p_n/q_n とする. w の n 次極小点を (s_n, t_n) と書く. $\omega = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ で定まる格子 $\Lambda(\omega, c)$ を黄金格子と言う.

命題 16 ω の n 次主近似分数を p_n/q_n とするとき次が成立する.

(1) n 次主近似格子点の x 座標からなる数列

$$\{q_n \omega - p_n, n \geq 0\}$$

は公比 $-\tau$ の等比数列である.

(2) $t_n = 2q_n^2 \left| \omega - \frac{p_n}{q_n} \right| < 1$ が成立する. (とくに n 次近似格子点 P_n において直線 OP_n の傾きが -1 か 1 ならば OP_n が 2 格子点間の最小値となる.)

命題 16 の証明は, 数列 $\{q_n \omega - p_n\}$ が一般フィボナッチ数列であることを用いて証明できる.

例 17 黄金格子の極小点の座標
黄金格子における t_n の値は

$$t_0 = 0.7638, t_1 = 4\sqrt{5} - 8 = 0.9443$$

である. t_2 の値は

$$t_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}(1 - \omega^4) = 21 - 9\sqrt{5} = 0.8754$$

となる. $n \geq 3$ のとき t_n は t_1 と t_2 の間にあるので

$$0.8754 < t_n < 0.9443$$

が成立している.

2 次極小点の x 座標は次のようになる.

$$s_2 = \frac{t_2}{18} = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{6} = 0.04863$$

1 次極小点の x 座標は

$$s_1 = \frac{1}{2 \times 2^2}(4\sqrt{5} - 8) = \frac{\sqrt{5}}{2} - 1 = 0.1180$$

である. よって 1 次極小点 Q_1 の座標は

$$Q_1 \left(\frac{\sqrt{5}-2}{2}, 4(\sqrt{5}-2) \right) = Q_1(0.1180, 0.9443)$$

である. その x 座標, y 座標はともに 2 次極小点 Q_2 のそれらよりも大きい. また $n \geq 3$ のとき ω の n 次格子点の y 座標はすべて, 2 次極小点の y 座標である 0.8754 より大きい.

命題 18 ω の 2 次極小点を Q_2 とする. $D = L(OQ_2)$ とする. 図.7 は ω の 1 次, 2 次, 3 次の分布関数と領域 D を表わしたものである.

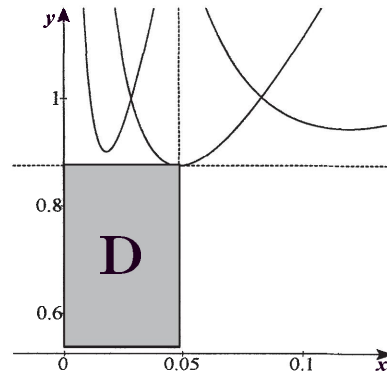


図.7 ω の 2 次極小点と領域 D

このとき ω と異なり, $0 < w < 1/2$ の範囲にある任意の無理数 w に対し, その m 次極小点 ($m \leq 2$) で D の中に位置するものが存在する.

命題 18 の証明については, w の連分数のタイプで場合わけをし, 計算により示される. これより命題 19 が成立することが分かる.

命題 19 分布係数が大きいほど, 効率的に格子点が分布していると考えられるが, $\omega = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ の全分布関数の最小値は, 他の無理数 w と比べて大きい.

9. 無理数で定まる格子の応用

以降は無理数 w の範囲を $0 < w < 1/2$ とは限定しない. 無理数の対等に関する定理 23 はよく知られているが, ここでは無理数で定まる格子を用いてその証明をしている.

定義 20 二つの無理数 w_1, w_2 がある.

$$w_1 = \frac{aw_2 + b}{cw_2 + d}$$

ただし a, b, c, d は整数で $ad - bc = \pm 1$ となる a, b, c, d が存在するとき w_1 と w_2 は対等 (equivalent) であるといい, $w_1 \equiv w_2$ と書く.

定理 21 無理数の間に定義された関係「対等 \equiv 」は同値関係である. 即ち次の三つの法則が成立する.

- (1) 反射律 $w_1 \equiv w_1$
- (2) 対称律 $w_1 \equiv w_2 \Rightarrow w_2 \equiv w_1$
- (3) 推移律 $w_1 \equiv w_2, w_2 \equiv w_3 \Rightarrow w_1 \equiv w_3$

証明: 無理数 w と $ad - bc = \pm 1$ なる整数 a, b, c, d を用いて表される無理数 $\frac{aw + b}{cw + d}$ を行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ を用いて $A\langle w \rangle$ と書くことにする. $A\langle w \rangle$ は $(-A)\langle w \rangle$ と一致する. A, B が整数を成分とする行列でその行列式が ± 1 ならば $-A, A^{-1}, AB$ もまた整数を成分とし, その行列式は ± 1 である. このとき

$$w_1 = A\langle w_2 \rangle \Rightarrow w_2 = A^{-1}\langle w_1 \rangle$$

$$w_1 = A\langle w_2 \rangle, w_2 = B\langle w_3 \rangle \Rightarrow w_1 = (AB)\langle w_3 \rangle$$

が成立する. (計算は容易であり省略する.) よって対称律, 推移律が成立する. 反射律が成立することは明らかである.

補題 22 無理数 w に対して

$$w \equiv w + n \quad (n \text{ は整数}), \quad w \equiv -w, \quad w \equiv \frac{1}{w}$$

が成立することは明らかであるが, 逆に $w_1 \equiv w_2$ のとき, 上の三つの操作, 即ち

- (1) 整数を加える.
- (2) 符号を変える.
- (3) 逆数を取る.

を繰り返し行うことにより w_1 から w_2 に変形できる.

証明: $w_1 = A\langle w_2 \rangle$ に上記三つの操作を行うことは行列 A に次の三つの操作を行うことに他ならない.

- (1) A の第 2 行を n 倍 (整数倍) して第 1 行に加える.
- (2) A の第 1 行または第 2 行に -1 をかける.
- (3) A の第 1 行と第 2 行を入れ換える.

上の操作 (1) と (3) を組み合わせれば次の操作 (4)

- (4) A の第 1 行を n 倍 (整数倍) して第 2 行に加える.

も行うことが出来る. A は成分が整数で行列式が ± 1 の行列であるが, これら四つの操作を行ってもやはり成分

は整数で行列式は ± 1 であることを注意しておく. これからこの四つの操作を用いて行列 A が単位行列 E に変形できることを順を追って示していく.

【 A の第 1 列の成分がともに 0 以上となるように変形する.】

1 列の成分が負の行に -1 をかければ, この変形が出来る.

【 A の第 1 列の成分がともに正の場合にはそれらの成分がともに 0 以上となり, さらにその合計が減少するように変形する.】

第 1 列のふたつの成分のうち, 大きくない方が属する行を -1 倍して他の行に加えればよい.

【 A の $(1, 1)$ 成分が 1 , $(2, 1)$ 成分が 0 と変形する.】

前の操作を続けていけば, いつかは第 1 列のどちらかの成分は 0 となる. このとき他方の成分は 1 である. (これは行列式が ± 1 であることから分かる.) 必要なら行の入れ換えを行って $(1, 1)$ 成分を 1 とすればよい.

【単位行列に変形する.】

前の形まで変形したとき, その行列式は ± 1 なので $(2, 2)$ 成分は ± 1 となる. $(2, 2)$ 成分が -1 のときは第 2 行に -1 をかけることにより 1 とできる. このとき $(1, 2)$ 成分が n ならば 2 行を $-n$ 倍して 1 行に加えればよい.

以上で A は単位行列に変形できることが示された. よって w_1 は w_2 に変形できる.

定理 23 二つの無理数 w_1, w_2 について, 次は同値である.

- (1) $w_1 \equiv w_2$
- (2) w_1 の m 次全商と w_2 の n 次全商が一致するような m, n が存在する. (これは w_1 と w_2 の連分数において, それぞれ m 次以降の項と n 次以降の項が一致することを意味する)

証明: (2) で定まる無理数の間の関係を $w_1 \cong w_2$ と書く. この関係が同値関係であることは明らかである. また w_1 の m 次全商 v_m と w_1 について $w_1 \equiv v_m$ となることは系 6.11 よりわかる. よって $w_1 \cong w_2$ ならば $w_1 \equiv w_2$ が成立する. 逆を示す. すなわち $w_1 \equiv w_2$ ならば $w_1 \cong w_2$ を示す. 補題 22 より無理数 w に対して

(a) $w \cong w + n$ ただし n は整数

(b) $w \cong -w$

(c) $w \cong \frac{1}{w}$

を示せばよいことが分かる.

(a) の証明: w と $w + n$ の 1 次以上の部分商は一致する. よって $w \cong w + n$ となる.

(b) の証明: w と $-w$ で定まる格子 $\Lambda(w, c)$ と $\Lambda(-w, c)$ は y 軸に関して対称である. 命題 8.3 と命題 8.5 より分かるように無理数の n 次部分商 k_n は, その無理数で定

まる格子の $(n-2)$ 次と $(n-1)$ 次の主近似格子点 P_{n-2} , P_{n-1} と y 軸との距離 x_n と x_{n+1} で定まる. 即ち

$$k_n = [x_n/x_{n+1}]$$

である. よって $w \cong -w$ となる.

(格子点は y 軸に関して対称となっているが, 主近似格子点に関してはすべてが y 軸に関して対称となっているわけではない. 対称となっていない主近似格子点はその y 座標が c の場合である. $\Lambda(w, c)$ の 0 次主近似格子点 $P_0(w-p_0, c)$ の x 座標 $w-p_0$ が $1/2$ より大きいときは 1 次主近似格子点 $P_1(w-p_0-1, c)$ の y 座標も c であり, $1/2$ より小さいときは近似格子点 $(w-p_0-1, c)$ は主近似格子点ではない. 従って w と $-w$ の y 軸に関して対称な主近似格子点はその次数がひとつずれている. すなわち w と $-w$ の一致する部分商の列はその次数がひとつずれている.)

(c) の証明: (b) より w が正の場合を示せばよい. このとき w が 1 より小さいければ w の 1 次以上の部分商の列が $1/w$ の 0 次以上の部分商の列となる. 逆に $1/w$ が 1 より小さいければ $1/w$ の 1 次以上の部分商の列が w の 0 次以上の部分商の列となる. よって (c) が成立する.

最後に近似既約分数を作っていくアルゴリズムについて述べておく. これは無理数で定まる格子において近似格子点を作っていくアルゴリズムより導かれる.

定義 24 ファレイ対

これまでのように既約分数の分母は正とする. このとき任意の有理数は一意的に既約分数の形に表すことができる. ただし整数の分母は 1 とする.

二つの有理数 r_1, r_2 ($r_2 < r_1$) がある. r_1, r_2 を既約分数の形に表しそれを

$$r_1 = \frac{a}{b}, r_2 = \frac{c}{d}$$

とする. $ad-bc=1$ となっているとき, 有理数の順序対 (r_2, r_1) をファレイ対 (Farey pair) と言うことにする. ファレイ対 (r_2, r_1) と無理数 w があり $r_2 < w < r_1$ となっているとき, (r_2, r_1) を w を挟むファレイ対という.

ファレイ対 (r_2, r_1) よりつくられる有理数 $F(r_2, r_1)$ を次のよう定める. すなわち

$$F(r_2, r_1) = \frac{a+c}{b+d}$$

と定め, これをファレイ対 (r_2, r_1) の中間数 (mediant) という. $\frac{a+c}{b+d}$ もまた既約分数である.

$$r_2 < F(r_2, r_1) < r_1$$

となり,

$$(r_2, F(r_2, r_1)), (F(r_2, r_1), r_1)$$

はともにファレイ対となる.

命題 25 無理数 w に対して

$$\alpha_0 = [w], \alpha_1 = [w] - 1$$

とおく. (α_1, α_0) は w を挟むファレイ対である. 次に

$$\alpha_2 = F(\alpha_1, \alpha_0)$$

とおく. ファレイ対 (α_1, α_0) の α_0 または α_1 を α_2 で置き換えて新たな w を挟むファレイ対を作る. この新たなファレイ対の中間数を α_3 とおく. この α_3 を最新の w を挟むファレイ対の両端のどちらかに置きかえて, さらに新しい w を挟むファレイ対を作る.

以下同様にして有理数の列

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$$

ができるが, これが w の近似分数全体となる.

実際 $\Lambda(w, c)$ の近似格子点の列

$$Y_0, Y_1, Y_2, \dots$$

を定義したが, この Y_i に対応する近似分数が α_i である.

なお α_i は右端のファレイ対の数と入れ換え, α_{i+1} は左端の数と入れ換える, というように入れかえる数の左右が変わるとき, α_i は主近似分数である. したがって順に作られていく w を挟むファレイ対の右端あるいは左端の少なくとも一方は主近似分数である.

参考文献

- [1] 小倉謙著 植物形態学 (第六版)
東京養賢堂発行 1940
- [2] 高木貞治著 初等整数論講義 (第2版 35刷)
共立出版 2004
- [3] G.H. ハーディ, E.M. ライト著 数論入門 I
シュプリンガー・フェアラーク東京 2001