

多体問題とグリーン関数との関係の研究

—グリーン関数と多体問題 (19)—

〈量子統計力学 11〉

橋爪邦夫\*

Studies of relations between many-body problems  
and Green functions

—Green function and many-body problems (19)—

Quantum statistical mechanics 11

Kunio HASHIZUME\*

Synopsis

The alignment of the electron spin with the external magnetic field give rise to paramagnetism. Whereas, the orbital motions of the electrons give rise to diamagnetism. In this paper we consider the idealized problem of a free spinless electron gas in an external magnetic field  $\mathbf{H} = H\hat{z}$ . A free electron moves in a circular orbital quantized normal to the uniform magnetic field with the cycrotron frequency  $\omega_0 = \frac{-e\mu_0 H}{m}$ . The energy eigenvalues in two-dimesional electron system  $E_j = \hbar\omega_0\left(j + \frac{1}{2}\right) = \beta H(2j + 1)$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) are the Landau energy levels.  $\beta$  is a Bohr magneton.  $g = \frac{-e\mu_0 H}{h} L^2$  is the degeneracy of a Landau level. In the low-temperature limit of electron in Landau levels, the electrons have a tendency to occupy the lowest available levels. As the magnetic field is decrease, each Landau level can accommodate fewer electrons because the degeneracy  $g$  is decreased. Consequently, some electrons will be forced to jump up to a higher level. This cause the oscillation of the low-temperature magnetic susceptibility  $\chi_m$  as a inverse function of the magnetic field  $\frac{1}{H}$ . The magnetization  $M$  also oscillates as a function of the magnetic field. We call these phenomena the de Haas-Van Alphen effect.

---

\* 近畿大学工学部教育推進センター

Center for the Advancement of Higher Education,  
School of Engineering, Kinki University

## § 44 ド・ハースーフアン・アルフェン効果

この節(§)の議論は、K. Huang 著 “Statistical Mechanics” の第1版(旧版)と第2版(新版)とに負う所が多い。又、ここでは我々は、新版キッテル固体物理学入門(森田章、山下次郎、宇野良清、津屋昇共訳)とキッテル固体物理学入門 第8版(宇野良清、津屋昇、新開駒次郎、森田章共訳)中のド・ハースーフアン・アルフェン効果の節を大いに参考にした。

この節で取り扱うのはフェルミオンである。我々は以前の3節(§ § §)で、§ 36 ランダウ準位、§ 37 ランダウの反磁性と磁化率、§ 38  $\mathbf{k}$ 空間と実空間での軌道面積の量子化と磁束の量子化をそれぞれ議論した。我々はもう一度それ等の節(§ § §)を読み返さなければならない。

1辺が  $L$  の立方体  $V = L^3$  中の自由電子気体の周期的境界条件  $\psi(x+L, y, z) = \psi(x, y, z)$  等を満たす波動関数は進行平面波の

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad [(2698) \text{式}] \quad (3643)$$

である。そして、波動ベクトル  $\mathbf{k}$  を持つ状態のエネルギー固有値は

$$E_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \quad [(2702) \text{式}] \quad (3644)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad [(2703) \text{式}] \quad (3645)$$

但し、ここで、

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_x \quad \text{etc.} \quad n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$[(2699) \text{式}, (2700) \text{式}, (2701) \text{式}] \quad (3646)$$

である。

次に、我々は  $z$  方向に外部静磁場  $\mathbf{H} = H\hat{z}$  が点灯したときの金属の幾つかの性質の変化を考察する。我々は今、電子スピンを持たない自由電子気体を考える。電子スピンがあれば電子スピンは外部磁場に平行に並ぼうとする傾向を持ち物質の常磁性に起源を与える。他方、電子スピンがなければ外部磁場による電子共の軌道運動の変化が物質の反磁性に起源を与える。自由電子であれ、原子核に束縛された電子であれ、電子共の軌道運動は磁場中で量子化されている。 $z$  方向に外部静磁場  $\mathbf{H} = H\hat{z}$  が点灯したときのエネルギーの式は(2688)式又は(2692)式に与えられている。

$$E(k_z, j) = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \hbar\omega_0 \left( j + \frac{1}{2} \right) \quad [(2688) \text{式}] \quad (3647)$$

$$= \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \beta H (2j+1) \quad [(2692) \text{式}] \quad (3648)$$

但し、 $j = 0, 1, 2, \dots$  である。(3647)式を眺めよう。 $z$

方向(磁場方向)の運動エネルギーは自由電子気体の場合と同じであるが、 $xy$ 面(磁場に垂直な面)の運動は(3647)式[(2688)式]が示す様に量子化されている。故に、この運動は角振動数(サイクロトロン振動数)

$$\omega_0 = \frac{-e\mu_0 H}{m} \quad (e < 0) \quad [(2683) \text{式}] \quad (3649)$$

の周回運動(サイクロトロン運動)である。(3647)式[(2688)式]がランダウのエネルギー準位である。次に、(3648)式[(2692)式]を眺めよう。(3648)式は(3649)式を用いて(3647)式のランダウ準位の式を書き換えた式である。

$$\beta = \frac{\mu_0(-e)\hbar}{2m} \quad [Wb \cdot m] \quad [(2693) \text{式}] \quad (3650)$$

は電子の軌道運動に由来する磁気モーメントの量子力学的単位のボーア磁子(Bohr magneton)である。

次に、ランダウ準位の縮退度  $g$  を考えよう。(2710)式によるとランダウ準位の縮退度  $g$  は

$$g = \frac{-e\mu_0 H}{h} L^2 \quad [(2710) \text{式}] \quad (3651)$$

である。

(3648)式と(3651)式によればランダウ準位の準位間隔と縮退度は外部磁場  $H$  の増加と共に増加する事が分かる。実際、ランダウ準位のエネルギー間隔中、 $H=0$  のゼロレベルと  $j=0$  準位の間は

$$\beta H = \frac{\mu_0(-e)\hbar}{2m} H \quad \text{であり、} \quad j \text{ 準位と } j+1 \text{ 準位の間は}$$

$$2\beta H = \frac{\mu_0(-e)\hbar}{m} H \quad \text{である。図1はランダウ準位を説明}$$

している。

我々は今や、強磁場下のランダウ準位共中の電子共を考察する。新版キッテル固体物理学入門上訳本 p274 脚注によれば、強磁場とは電子が衝突を受ける以前にら旋形の軌道を1回まわることができる場を意味する。すなわち、 $\omega_0 \tau \gg 1$ 。実際問題としては実験室で得られる磁場に対してこの条件が満たされるためには純粋な試料で低温であることが必要である。ド・ハースーフアン・アルフェン効果は室温では観測されない。こうして、我々は改めて今や実験室磁場下で、ランダウ準位共中の電子共の低温の極限の考察に従事する。

ランダウ準位中の電子共は低温の極限では、各ランダウ準位  $j$  の持つ縮退度  $g$  をも考慮した上で、最も低い入居可能な準位から順番に占拠して行く傾向がある。(3651)式[(2710)式]によれば、ランダウ準位の縮退度  $g$  は、磁場  $H$  の強度が減少するにつれて、減ずるので、磁場  $H$  の強度が減少するにつれて或る準位  $j$  に収容できる電子共の数が少なくなる。故に、幾つかの電子

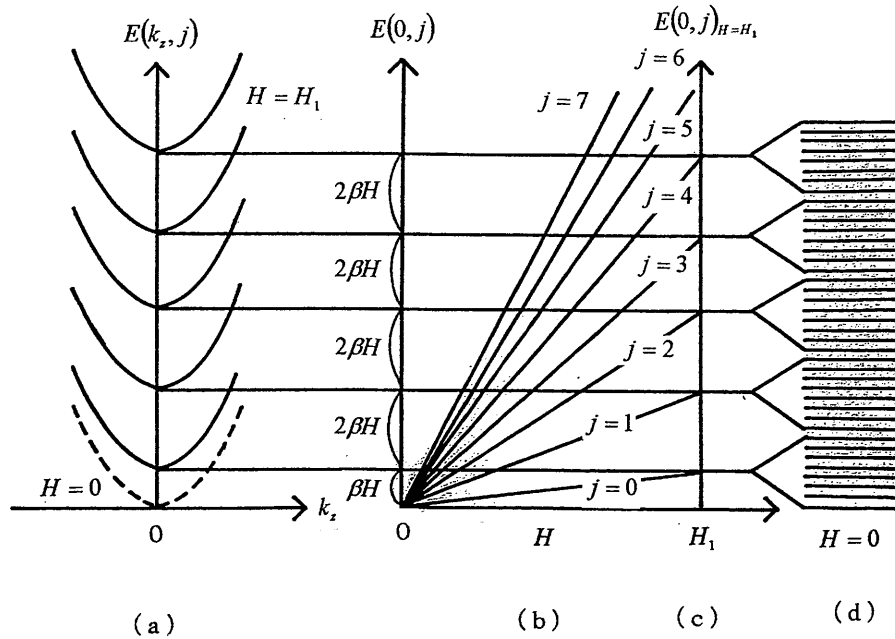


図 1

共は1つより高位の準位の  $j+1$  へ跳び上がる様に強いらられる。

逆の言い方をしよう。ランダウ準位の(3647)式又は(3648)式の  $k_x$  を固定して考えたとき、我々は問題を、一様な磁場  $H$  中の、全面積  $L^2$  の、スピンを持たない全電子数  $N$  個の2次元電子系と考える事ができる。このときのランダウ準位のエネルギーの式は(3647)式と(3648)式より、

$$E_j = \hbar\omega_0 \left( j + \frac{1}{2} \right) \quad (3652)$$

$$= \beta H (2j+1) \quad (3653)$$

但し、 $j=0,1,2,\dots$  である。又、 $\omega_0$  は(3649)式、 $\beta$  は(3650)式である。絶対0 [K]であるとする。ランダウ準位の縮退をも考慮してそれ以下の全てのランダウ準位共が電子共によって満たされている様な  $j$  の最大値を  $j_{\max}$  とする。そして、 $j_{\max}+1$  番目のランダウ準位は余りの電子共によって部分的に満たされている。 $j_{\max}+1$  番目の準位が系のフェルミ準位である。こうして、 $N$  個の電子共全てがランダウ準位中のどれかに納まっている。(3651)式[(2710)式]によって、縮退度  $g$  は磁場の強さ  $H$  に比例する。 $H$  が強いときには  $g$  が大きいので  $j_{\max}$  の値は小さくなる。 $H$  が弱いときには  $g$  が小さいので  $j_{\max}$  の値は大きくなる。今、 $H$  の強度を弱いところからだんだんと強めて行くと、 $g$  が大きくなって来るので或る  $H$  の強さで突然  $j_{\max}$  の値が1だけ減少する。次に、そこから更に  $H$  の強度を強めて行くと

更に  $g$  が大きくなるので、更なる或る  $H$  の強さで再び突然  $j_{\max}$  の値が更に1だけ減少する。等々となる。

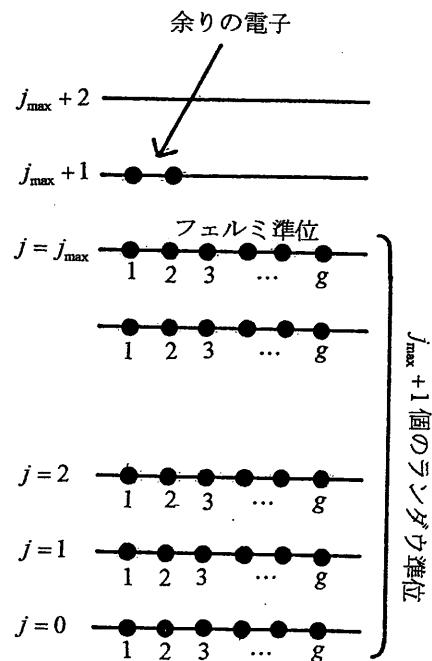


図 2

図 2 を参照しよう。 $H$  を或る弱い値のところからだ

んだんと強めて行き、或る磁場の強さで突然  $j_{\max}$  が 1 だけ減少する事が起こるとする。この磁場を  $H_{j_{\max}}$  とする。こととき部分的に電子共によって占められた準位はないので、(3651)式を参照して

$$g_{j_{\max}} \equiv \frac{-e\mu_0 H_{j_{\max}} L^2}{h} \quad (3654)$$

と置いて、

$$g_{j_{\max}} \cdot (j_{\max} + 1) = N \quad (3655)$$

である。故に、

$$\frac{-e\mu_0 H_{j_{\max}} L^2}{h} \cdot (j_{\max} + 1) = N \quad (3656)$$

となり。

$$\frac{1}{H_{j_{\max}}} = \frac{-e\mu_0 L^2}{Nh} \cdot (j_{\max} + 1) \quad (3657)$$

$$= \frac{-e\mu_0}{nh} \cdot (j_{\max} + 1) \quad (3658)$$

を得る。  $N$  は全電子数であり、

$$n = \frac{N}{L^2} \quad (3659)$$

は単位面積当りの電子共の数である。(3657)式又は(3658)式を眺めると、我々は磁場  $H$  の強度の変化(増大または減少)と共に、 $H$  の或る値  $H_{j_{\max}}$  で  $j_{\max}$  の値が 1 だけ変化(減少または増大)するので、系の或る性質が  $\frac{1}{H}$  について周期的に変化する事が分かる。そ

して、その周期は  $\frac{-e\mu_0 L^2}{Nh} = \frac{-e\mu_0}{nh}$  である。

(3655)式又は(3656)式を眺め、図2も参照する。そして、 $j_{\max} = 0$  のときの  $H_{j_{\max}}$  を  $H_0$  と書こう。このとき、

$$\frac{1}{H_0} = \frac{-e\mu_0 L^2}{Nh} = \frac{-e\mu_0}{nh} \quad (3660)$$

となるので、

$$H_0 = \frac{Nh}{-e\mu_0 L^2} = \frac{nh}{-e\mu_0} \quad (3661)$$

である。

もしも、磁場  $H$  が  $H > H_0$  ならば、そのとき総ての電子共が最も低いランダウ準位の  $j=0$  準位に収容される。そして、この場合の電子 1 個当りの基底状態のエネルギーは(3652)式又は(3653)式で  $j=0$  と置いて、

$$E_{j=0} \equiv E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 = \beta H \quad (3662)$$

である。

次に、もしも、磁場  $H$  が  $H < H_0$  ならば、そのときには、縮退度  $g$  が小さくなるので、 $H$  の強さによるが、幾つかの電子共がより高位の、即ち  $j > 0$  の、幾つかのランダウ準位共を占拠する事となる。磁場  $H$  の強さが次の様である。即ち、最低位  $j=0$  より満たして上方へと  $j=0th, 1th, 2th, \dots, jth$  の全部で  $j+1$  個のランダウ準位共が完全に電子共に満たされ、 $j+1$  番目のランダウ準位が部分的にのみ電子共によって占められている。そして、総てのそれよりも高い準位  $j+2$  番目以上のランダウ準位が空であるような、その様な  $H$  の強さであるとしたときには、その様な  $H$  である条件は、

$$(j+1)g < N < (j+2)g \quad (3663)$$

である。故に、(3651)式を代入して、

$$(j+1) \cdot \frac{-e\mu_0 H}{h} L^2 < N < (j+2) \cdot \frac{-e\mu_0 H}{h} L^2 \quad (3664)$$

故に、(3661)式を使って、

$$(j+1) \cdot \frac{1}{H_0} < \frac{1}{H} < (j+2) \cdot \frac{1}{H_0} \quad (3665)$$

故に、

$$j+1 < \frac{H_0}{H} < j+2 \quad (3666)$$

故に、最終的に、我々は

$$\frac{1}{j+2} H_0 < H < \frac{1}{j+1} H_0 \quad (3667)$$

を得る。但し、ここで、 $H_0$  は(3661)式である。(3667)式の間隔中の磁場  $H$  に対して、系の基底状態の全エネルギー  $E_{total}$  は次のようである。

$$E_{total} = g \sum_{i=0}^j E_i + \{N - (j+1)g\} E_{j+1} \quad (3668)$$

ところで、(3651)式と(3661)式より、

$$g = \frac{-e\mu_0 H}{h} L^2 = \frac{-e\mu_0 L^2}{Nh} NH = \frac{H}{H_0} N \quad (3669)$$

又、(3653)式より、

$$E_i = \beta H (2i+1) \quad (3670)$$

$$E_{j+1} = \beta H \{2(j+1)+1\} = \beta H (2j+3) \quad (3671)$$

である。これ等を(3668)式へ代入して、(3668)式は、

$$E_{total} = \frac{H}{H_0} N \sum_{i=0}^j \beta H (2i+1) + \left\{ N - (j+1) \frac{H}{H_0} N \right\} \beta H (2j+3) \quad (3672)$$

故に、

$$\frac{E_{total}}{N} = \beta \left( \frac{H}{H_0} \right) \sum_{i=0}^j (2i+1) H$$

$$+ \left\{ \beta - \beta \left( \frac{H}{H_0} \right) (j+1) \right\} (2j+3)H \quad (3673)$$

である。ところで、

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^j (2i+1) &= 2 \sum_{i=0}^j i + \sum_{i=0}^j 1 = 2 \frac{j(j+1)}{2} + (j+1) \\ &= (j+1)^2 \end{aligned} \quad (3674)$$

故に、

$$\frac{E_{total}}{N} = \beta \left( \frac{H}{H_0} \right) \left\{ (j+1)^2 H + (2j+3)H_0 - (j+1)(2j+3)H \right\} \quad (3675)$$

$$= \beta \left( \frac{H}{H_0} \right) H_0 \left\{ (2j+3) - (j+1)(j+2) \left( \frac{H}{H_0} \right) \right\} \quad (3676)$$

ここで、パラメーター

$$x = \frac{H}{H_0} \quad (3677)$$

を導入する。(3676)式は次の様になる。

$$\frac{E_{total}}{N} = \beta H_0 x \left\{ (2j+3) - (j+1)(j+2)x \right\} \quad (3678)$$

ところで、(3662)式は他方

$$E_0 = \frac{E_{total}}{N} = \beta H = \beta \left( \frac{H}{H_0} \right) H_0 = \beta H_0 x \quad (3679)$$

とも書けるので、(3679)式[(3662)式]と(3678)式から、我々は結局、結果を次の様にまとめる事が出来る。

$$\frac{E_{total}}{N} = \begin{cases} \beta H_0 x & (x > 1) \\ \beta H_0 x \left\{ (2j+3) - (j+1)(j+2)x \right\} & \left( \frac{1}{j+2} < x < \frac{1}{j+1}, j=0,1,2,\dots \right) \end{cases} \quad (3680)$$

以前の節 (§) 35 磁化と正準集団と大正準集団の磁化率 中の(2635)式の説明をもう一度書こう。今、体積  $V$  の巨視的物体を考えたとき、 $z$  方向の外部磁場  $\mathbf{H}$  (又は  $\mathbf{B}$ ) が在るときの、系全体のハミルトニアン  $H_{hamil}$  は、その物体の構成原子共に渡っての個々の原子のハミルトニアン  $h_{hamil}$  の和を取ったものである。故に、

$$H_{hamil} = \sum_V h_{hamil} \quad [(2634)式] \quad (3681)$$

である。その系の単位体積当りの平均誘導磁気モーメント、即ち、その物質の磁化  $M$  [ $\text{Wb}/\text{m}^2$ ] = [ $\text{Wb} \cdot \text{m}/\text{m}^3$ ]

$$M = \frac{1}{V} \left( - \frac{\partial H_{hamil}}{\partial H} \right) \quad [(2635)式] \quad (3682)$$

である。

ここで、再び、話をこの節 (§) のド・ハースーファン・アルフェン効果へ戻そう。単位体積当りの磁化 (magnetization)  $M$  [ $\text{Wb}/\text{m}^2$ ] = [ $\text{Wb} \cdot \text{m}/\text{m}^3$ ] を計算しよう。と言っても、我々の今取り扱っている系は様な  $z$  方向の磁場  $\mathbf{H} = H\mathbf{z}$  中の、全面積  $L^2$  の、スピンを持たない全電子数  $N$  個の2次元電子系であった。そして、又(3682)式中のハミルトニアン  $H_{hamil}$  は系の全エネルギー  $E_{total}$  に相当している。故に、 $x > 1$  に対しては(3679)式又は(3680)式の上式より、

$$E_{total} = \beta H_0 x N = \beta H_0 \left( \frac{H}{H_0} \right) N = \beta N H \quad (3683)$$

故に、

$$M = \frac{1}{L^2} \left( - \frac{\partial E_{total}}{\partial H} \right) = -\beta \frac{N}{L^2} = -\beta n \quad (3684)$$

である。今の場合、考察している系は2次元系であるので磁化の単位は  $M$  [ $\text{Wb}/\text{m}$ ] = [ $\text{Wb} \cdot \text{m}/\text{m}^2$ ] となる。次に、

$\frac{1}{j+2} < x < \frac{1}{j+1}, j=0,1,2,\dots$  に対しては(3680)式の下式より、

$$\begin{aligned} E_{total} &= \beta H_0 x N \left\{ (2j+3) - (j+1)(j+2)x \right\} \\ &= \beta H_0 \left( \frac{H}{H_0} \right) N \left\{ (2j+3) - (j+1)(j+2) \left( \frac{H}{H_0} \right) \right\} \\ &= \beta N (2j+3)H - \beta N (j+1)(j+2) \frac{H^2}{H_0} \end{aligned} \quad (3685)$$

故に、

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{L^2} \left( - \frac{\partial E_{total}}{\partial H} \right) \\ &= -\beta \frac{N}{L^2} (2j+3) + 2\beta \frac{N}{L^2} (j+1)(j+2) \left( \frac{H}{H_0} \right) \\ &= \beta n \left\{ 2(j+1)(j+2)x - (2j+3) \right\} \end{aligned} \quad (3686)$$

である。再び、考察している系は2次元系であるので磁化の単位は  $M$  [ $\text{Wb}/\text{m}$ ] = [ $\text{Wb} \cdot \text{m}/\text{m}^2$ ] となる。

我々は結局、磁化  $M$  [ $\text{Wb}/\text{m}$ ] = [ $\text{Wb} \cdot \text{m}/\text{m}^2$ ] の結果を次の様にまとめる事が出来る。

$$M = \begin{cases} -\beta n & (x > 1) \\ \beta n \left\{ 2(j+1)(j+2)x - (2j+3) \right\} & \left( \frac{1}{j+2} < x < \frac{1}{j+1}, j=0,1,2,\dots \right) \end{cases} \quad (3687)$$

再び、以前の節(§)35 磁化と正準集団と大正準集団の磁化率 中から、(2586)式の説明をもう一度書こう。 $\mathbf{M}$ を外部磁場 $\mathbf{H}$ の方向に沿っての誘導磁化とする。即ち、 $\mathbf{M}$ を外部磁場 $\mathbf{H}$ の方向に沿ってのその系の単位体積当りの誘導磁気モーメントの和であるとする。このとき、強磁性体も含み、全く一般的にその系の磁化率(magnetic susceptibility)  $\chi_m$ は次式で定義される。

$$\chi_m = \frac{\partial M}{\partial H} \quad [(2586)式] \quad (3688)$$

パラメーター  $x$  は  $x = \frac{H}{H_0}$  [(3677)式]であった。故に、(3687)式より磁化率  $\chi_m$  はそれぞれ次の様になる事は明らかである。

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & (x > 1) \\ \frac{2\beta n}{H_0}(j+1)(j+2) & \left( \frac{1}{j+2} < x < \frac{1}{j+1}, j=0,1,2,\dots \right) \end{cases} \quad (3689)$$

磁化率  $\chi_m$  の単位は3次元では  $\chi_m$  [Wb/(A·m)]=[H/m] であるが、2次元系の場合は  $\chi_m$  [Wb/A]=[H]となる。

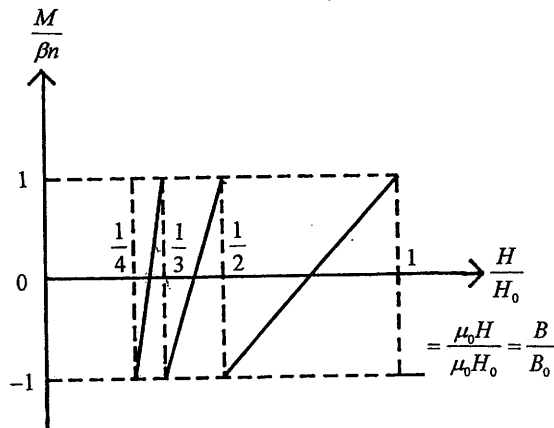


図3

図3は(3687)式を描いたものである。横軸にはパラメーター  $x = \frac{H}{H_0} = \frac{\mu_0 H}{\mu_0 H_0} = \frac{B}{B_0}$  を取り、縦軸には磁化

$\frac{M}{\beta n}$  が取られている。図はそれぞれ、次の式を表わしている。

横軸の範囲が  $x = \left( \frac{H}{H_0} = \frac{B}{B_0} \right) > 1$  のとき、

$$\text{縦軸の値は } \frac{M}{\beta n} = -1 \quad (3690)$$

$j=0$  で横軸の範囲が  $\frac{1}{2} < x = \left( \frac{H}{H_0} = \frac{B}{B_0} \right) < 1$  のとき、

$$\text{縦軸の値を与える式は } \frac{M}{\beta n} = 4 \frac{B}{B_0} - 3 \quad (3691)$$

$j=1$  で横軸の範囲が  $\frac{1}{3} < x = \left( \frac{H}{H_0} = \frac{B}{B_0} \right) < \frac{1}{2}$  のとき、

$$\text{縦軸の値を与える式は } \frac{M}{\beta n} = 12 \frac{B}{B_0} - 5 \quad (3692)$$

$j=2$  で横軸の範囲が  $\frac{1}{4} < x = \left( \frac{H}{H_0} = \frac{B}{B_0} \right) < \frac{1}{3}$  のとき、

$$\text{縦軸の値を与える式は } \frac{M}{\beta n} = 24 \frac{B}{B_0} - 7 \quad (3693)$$

$j=3$  で横軸の範囲が  $\frac{1}{5} < x = \left( \frac{H}{H_0} = \frac{B}{B_0} \right) < \frac{1}{4}$  のとき、

$$\text{縦軸の値を与える式は } \frac{M}{\beta n} = 40 \frac{B}{B_0} - 9 \quad (3694)$$

等々である。

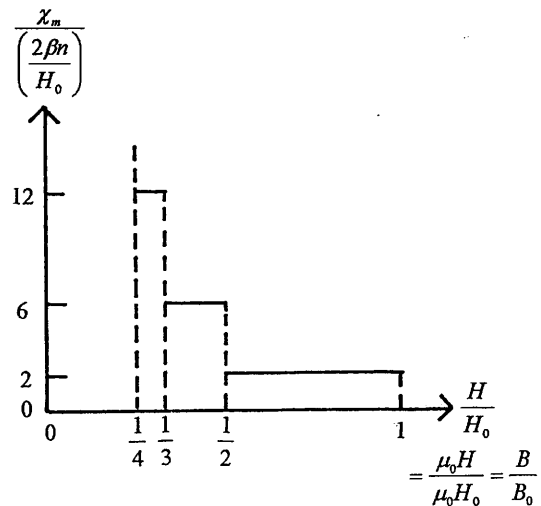


図4

次に、図4は(3689)式を描いたものである。横軸にはパラメーター  $x = \frac{H}{H_0} = \frac{\mu_0 H}{\mu_0 H_0} = \frac{B}{B_0}$  を取り、縦軸に

は磁化率  $\frac{\chi_m}{\left(\frac{2\beta n}{H_0}\right)}$  が取られている。図はそれぞれ、次の値を表わしている。

横軸の範囲が  $x\left(=\frac{H}{H_0}=\frac{B}{B_0}\right)>1$  のとき、

縦軸の値は  $\frac{\chi_m}{\left(\frac{2\beta n}{H_0}\right)}=0$  (3695)

$j=0$  で横軸の範囲が  $\frac{1}{2}<x\left(=\frac{H}{H_0}=\frac{B}{B_0}\right)<1$  のとき、

縦軸の値は  $\frac{\chi_m}{\left(\frac{2\beta n}{H_0}\right)}=2$  (3696)

$j=1$  で横軸の範囲が  $\frac{1}{3}<x\left(=\frac{H}{H_0}=\frac{B}{B_0}\right)<\frac{1}{2}$  のとき、

縦軸の値は  $\frac{\chi_m}{\left(\frac{2\beta n}{H_0}\right)}=6$  (3697)

$j=2$  で横軸の範囲が  $\frac{1}{4}<x\left(=\frac{H}{H_0}=\frac{B}{B_0}\right)<\frac{1}{3}$  のとき、

縦軸の値は  $\frac{\chi_m}{\left(\frac{2\beta n}{H_0}\right)}=12$  (3698)

$j=3$  で横軸の範囲が  $\frac{1}{5}<x\left(=\frac{H}{H_0}=\frac{B}{B_0}\right)<\frac{1}{4}$  のとき、

縦軸の値は  $\frac{\chi_m}{\left(\frac{2\beta n}{H_0}\right)}=20$  (3699)

等々である。

次に、結局は図4と同じ事であるが、(3689)式を今度は、横軸にパラメータ  $\frac{1}{x}=\frac{H_0}{H}=\frac{\mu_0 H_0}{\mu H}=\frac{B_0}{B}$  を取り、

縦軸に磁化率  $\frac{\chi_m}{\left(\frac{2\beta n}{H_0}\right)}$  を取った形で描いてみよう。図

5参照。このとき(3689)式の条件は

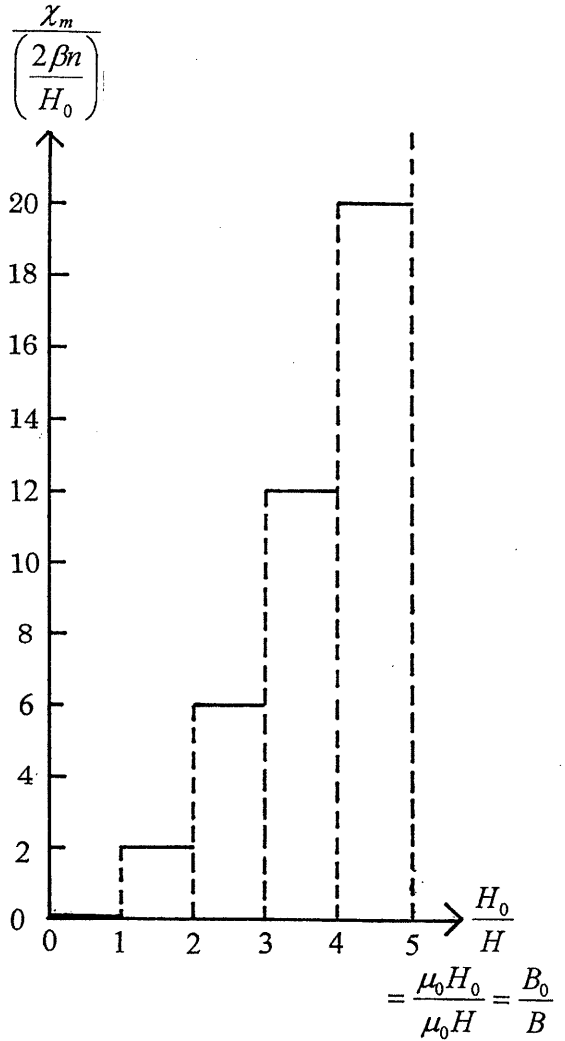


図5

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & \left(1 > \frac{1}{x}\right) \\ \frac{2\beta n}{H_0}(j+1)(j+2) & \left(j+1 < \frac{1}{x} < j+2, j=0,1,2,\dots\right) \end{cases} \quad [(3689)\text{式参照}] \quad (3700)$$

となる。図はそれぞれ、次の値を表わしている。

横軸の範囲が  $\frac{1}{x}\left(=\frac{H_0}{H}=\frac{B_0}{B}\right)<1$  のとき、

縦軸の値は  $\frac{\chi_m}{\left(\frac{2\beta n}{H_0}\right)}=0$  (3701)

$j=0$  で横軸の範囲が  $1 < \frac{1}{x}\left(=\frac{H_0}{H}=\frac{B_0}{B}\right) < 2$  のとき、

$$\text{縦軸の値は} \quad \frac{\chi_m}{\left(\frac{2\beta n}{H_0}\right)} = 2 \quad (3702)$$

$j=1$ で横軸の範囲が  $2 < \frac{1}{x} \left( = \frac{H_0}{H} = \frac{B_0}{B} \right) < 3$  のとき、

$$\text{縦軸の値は} \quad \frac{\chi_m}{\left(\frac{2\beta n}{H_0}\right)} = 6 \quad (3703)$$

$j=2$ で横軸の範囲が  $3 < \frac{1}{x} \left( = \frac{H_0}{H} = \frac{B_0}{B} \right) < 4$  のとき、

$$\text{縦軸の値は} \quad \frac{\chi_m}{\left(\frac{2\beta n}{H_0}\right)} = 12 \quad (3704)$$

$j=3$ で横軸の範囲が  $4 < \frac{1}{x} \left( = \frac{H_0}{H} = \frac{B_0}{B} \right) < 5$  のとき、

$$\text{縦軸の値は} \quad \frac{\chi_m}{\left(\frac{2\beta n}{H_0}\right)} = 20 \quad (3705)$$

等々である。

(3687)式と(3689)式と(3700)式は、そして、それ等を描いた図3と図4と図5はド・ハースファン・アルフェン効果(De Haas-Van Alphen effect)を表わしている。

ド・ハースファン・アルフェン効果(De Haas-Van Alphen effect)とは、強磁場下(実験室で得られる磁場では純粋な試料で低温である事が必要である。)で、磁場の強度が減少するとき、低温磁化率(low-temperature magnetic susceptibility)  $\chi_m$  が周期的に変化する現象である。(図4、図5参照) 或いは、磁化(magnetization)  $M$  が磁場の強さの関数として振動する現象である。(図3参照) これは、以前述べた様に、電子スピンを持たない自由電子共の運動が磁場に垂直な平面内で図1又は(3653)式の様量子化され、ランダウ準位を構成する。ランダウ準位中の電子共は低温の極限では各ランダウ準位  $j(j=0,1,2,\dots)$  の持つ縮退度  $g$  をも考慮した上で、最も低い入居可能な準位から順番に占拠して行く傾向がある。(3651)式が示す様に、ランダウ準位の縮退度  $g$  は磁場  $H$  の強度が減少するにつれて、減るので、磁場  $H$  の強度が減少するにつれて、或る準位  $j$  に収容できる電子共の数が少なくなる。故に、幾つかの電子共はより高位の準位の  $j+1$ へ跳び上がる様に強えられる。そして、このとき、磁化に不連続的変化が誘起されるので、ド・ハースファン・アルフェン効果なる現象が生ずるのである。ド・ハースファン・アルフェン効果は1930年 W. J. De

Haas と P. M. Van Alphen によってビスマスの単結晶について初めて実験的に発見された。そして、翌年、W. J. De Haas and P. M. Van Alphen, Leiden Commu. 212 (1931)で公表された。

#### 参考文献

- 1) J.M.Ziman 著：“Elements of Advanced Quantum Theory” (Cambridge University Press)
- 2) 高野文彦著：“新物理学シリーズ 18 多体問題” (培風館)
- 3) 高橋康著：“新物理学シリーズ 16 物性研究者のための場の量子論 I, II” (培風館)
- 4) K. Huang 著：“Statistical Mechanics” (John Wiley & Sons, Inc) first edition and second edition
- 5) A. M. Zagoskin 著：“Quantum Theory of Many-Body Systems” (Springer)
- 6) シッフ著、井上健訳：“新版 量子力学上、下” (吉岡書店)
- 7) 西川恭治、森弘之著：“統計物理学” (朝倉書店)
- 8) ランダウ・リフシッツ著、佐々木健、好村滋洋訳：“量子力学1 (改訂新版)” (東京図書)
- 9) ランダウ・リフシッツ著、小林秋男、小川岩雄、富永五郎、浜田達二、横田伊佐秋訳：“統計物理学第3版上” (岩波書店)
- 10) U. Fano: Reviews of Modern Physics 74 vol29 No1 (1955)
- 11) 小田恒孝著：“統計力学” (裳華房)
- 12) 桂重俊著：“統計力学” (廣川書店)
- 13) キッテル著、山下次郎、福地充訳：“キッテル熱物理学” (丸善株式会社)
- 14) 小暮陽三著：“基礎と応用 統計力学” (森北出版)
- 15) 田沼静一郎著：“電子伝導の物理” (裳華房)
- 16) キッテル著、宇野良清、津屋昇、森田章、山下次郎訳：“新版固体物理学入門上” (丸善株式会社)

この論文は拙著原稿“多体問題とグリーン関数との関係の研究 高等量子力学入門1”，内容

#### 目次

はじめに

#### 第1章 フェルミオン系の量子力学

##### § 1.1 序言

\* § 1.2 状態関数の数表示表現と生成・消滅演算子の導入，ならびに生成・消滅演算子の交換関係

\* § 1.3 ハミルトニアンを生成・消滅演算子を用いて記述する事



- \* § 1.4 ハミルトニアン<sup>1</sup>の運動量表示, フェルミ真空, フェルミ自由電子・正孔系の記述
  - \* § 1.5 場の演算子の導入と交換関係
  - \* § 1.6 ハミルトニアンを場の演算子を用いて記述する事
  - \* § 1.7 運動量表示での場の演算子とハミルトニアンの記述
  - \* § 1.8 シュレディンガー表示の量子力学
  - \* § 1.9 ハイゼンベルグ表示の量子力学とハイゼンベルグの運動方程式
  - \* § 1.10 ハイゼンベルグ表示での生成・消滅演算子と場の演算子, そして, それらの交換関係, それから, ハミルトニアンの表現, 第2量子化
- 参考文献
- 第2章 高等量子力学における摂動理論
- \* § 2.1 ハイゼンベルグ表示
  - \* § 2.2 相互作用表示
  - \* § 2.3 相互作用表示での生成・消滅演算子と場の演算子
  - \* § 2.4 Brillouin-Wigner の摂動理論
  - \* § 2.5 時間発展演算子  $U(t, t_1)$  の積分方程式による表現と, その時間積分展開級数
  - \* § 2.6 時間発展演算子  $U(t, t_1)$  の計算
  - \* § 2.7 時間発展演算子  $U(t, t_1)$  の幾つかの性質
  - \* § 2.8 時間発展演算子  $U(t, t_1)$  とその遷移確率  $W_{a \rightarrow b}$
  - \* § 2.9 散乱理論と  $S$  行列
  - \* § 2.10 時間非依存の摂動理論と  $S$  行列
  - \* § 2.11 フェルミオン・ボソン相互作用
  - \* § 2.12  $S$  マトリックス展開;  $S \equiv U(+\infty, -\infty)$
  - \* § 2.13 相似変換の公式
  - \* § 2.14  $S$  マトリックス展開式の計算例  $S_2$
  - \* § 2.15 生成・消滅演算子 (正規積 (N積) への準備)
  - \* § 2.16 『フェルミ真空』又は『フェルミ海』に関しての電子と正孔の新しい生成・消滅の場の演算子を使つての  $S$  マトリックス展開式の計算例  $S_2$
  - \* § 2.17 N積
  - \* § 2.18 縮約積 (コントラクション)
  - \* § 2.19 Wick の定理
  - \* § 2.20  $S$  マトリックスのT積表示
  - \* § 2.21 縮約積が0となる場合
  - \* § 2.22 Wick の定理のダイアグラム表示
  - \* § 2.23 Wick の定理の計算例  $S_2$  式中の1項
  - \* § 2.24 正規形 (N積形式) と Wick の定理の関係
  - \* § 2.25 Feynman diagram を眺めたとき, 逆にそれを式に書ける事

- \* § 2.26 グリーン関数の定義
  - \* § 2.27 伝播関数の定義
  - \* § 2.28 実変数関数の定積分の値を複素積分の留数の定理を応用して求める事
  - \* § 2.29 Feynman diagram の式を運動量表示するための準備
  - \* § 2.30 運動量表示
  - \* § 2.31 ダイアグラムの寄与の計算
  - \* § 2.32 ダイアグラムの寄与の計算例
  - \* § 2.33 電子・フォノン相互作用
  - \* § 2.34 修正伝播関数の計算
  - \* § 2.35 フェルミオンのダイソン (Dyson) の方程式
  - \* § 2.36 ボソンのダイソン (Dyson) の方程式
  - \* § 2.37 修正されたバーテックス (vertex, 結節点)
  - \* § 2.38 修正された真空部分
  - \* § 2.39 我々は今何をして来たのかを振り返ってみる。
  - \* § 2.40 フェルミオンのダイソン (Dyson) の方程式の別の形
  - \* § 2.41 ボソンのダイソンの方程式の別の形
- 参考文献
- 第3章 ボソン系の量子力学
- \* § 3.1 量子力学的単純調和振動子
  - \* § 3.2 ブラベクトル, ケットベクトル, 生成・消滅演算子
  - \* § 3.3 量子力学的一次元原子鎖連成振動子
  - \* § 3.4 量子力学的三次元格子状配列原子連成振動子
  - \* § 3.5 連続体媒質への議論の移行と, 場の演算子  $u(\mathbf{r}), p(\mathbf{r})$
  - \* § 3.6 古典場の理論
  - \* § 3.7 場の演算子と第2量子化
  - \* § 3.8 ボース統計に従うシュレディンガー波動場の量子化 (第2量子化) とボソン
  - \* § 3.9 Klein-Gordon の方程式
  - \* § 3.10 場の源と場間の相互作用
  - \* § 3.11 簡単な例1, フォノンのレーリー散乱
  - \* § 3.12 簡単な例2, 核力と湯川の間接子理論
  - \* § 3.13 荷電ボソンと荷電中間子
- 参考文献
- 第4章 グリーン関数と多体問題
- \* § 4.1 古典物理学のグリーン関数とその簡単な例
  - \* § 4.2 1電子グリーン関数 (1)
  - \* § 4.3 密度行列
  - \* § 4.4 統計行列
  - \* § 4.5 量子力学との関係
  - \* § 4.6 古典統計力学のリウヴィル (Liouville) の

- 定理
- \* § 4.7 量子統計力学のリウヴィル(Liouville)の定理 (密度演算子の運動方程式)
  - \* § 4.8 量子統計力学の小正準集団(マイクロカノカル アンサンブル)
  - \* § 4.9 量子統計力学の正準集団(カノニカル アンサンブル)
  - \* § 4.10 量子統計力学の大正準集団(グランドカノニカル アンサンブル)
  - \* § 4.11 古典統計力学の基本原理
  - \* § 4.12 小正準集団
  - \* § 4.13 古典統計力学の小正準集団からの熱力学の導出
  - \* § 4.14 エネルギー等分配則
  - \* § 4.15 古典理想気体
  - \* § 4.16 ギブスのパラドックス
  - \* § 4.17 正準集団
  - \* § 4.18 正準集団の熱力学
  - \* § 4.19 正準集団に於けるエネルギーの揺らぎ
  - \* § 4.20 大正準集団
  - \* § 4.21 大正準集団における密度の揺らぎ
  - \* § 4.22 化学ポテンシャルと化学平衡
  - \* § 4.23 正準集団と大正準集団の等価性
  - \* § 4.24  $W(N)$ の振る舞い
  - \* § 4.25 マクスウェル架設線の意味
  - \* § 4.26 演習問題の訳
  - \* § 4.27 量子統計力学の以前の議論のおさらい
  - \* § 4.28 熱力学第3法則
  - \* § 4.29 小正準集団で扱かう理想気体
  - \* § 4.30 正準集団で扱かう理想気体
  - \* § 4.31 大正準集団で扱かう理想気体
  - \* § 4.32 理想フェルミ気体の状態方程式
  - \* § 4.33 黒体放射(空洞放射)
  - \* § 4.34 固体中の音子(フォノン)
  - \* § 4.35 磁化と正準集団と大正準集団の磁化率
  - \* § 4.36 ランダウ準位
  - \* § 4.37 ランダウの反磁性と磁化率
  - \* § 4.38  $k$ 空間と実空間での軌道面積の量子化と磁束の量子化
  - \* § 4.39 パウリの常磁性
  - \* § 4.40 不完全電子気体の磁氣的性質
  - \* § 4.41 ボース・アインシュタイン凝縮
  - \* § 4.42 不完全ボース気体
  - \* § 4.43 超流動
  - \* § 4.44 ド・ハースーファン・アルフェン効果
  - \* § 4.45 量子ホール効果
  - \* § 4.46 付録 熱力学的関数と熱力学的関係式
  - \* § 4.47 イジング(Ising)模型の定義
  - \* § 4.48 イジング模型の他の模型共に対する等価性
  - \* § 4.49 自発磁化(1次元における自発磁化の不在)
  - \* § 4.50 自発磁化(2次元における自発磁化の存在)
  - \* § 4.51 ブラック・ウィリアムズ近似
  - § 4.52 ベーテ・パイエルズ近似
  - § 4.53 1次元イジング模型
- 以下続く。
- 参考文献
- の内、紙面の都合により、第4章、節(§)4.44を記述したものである。\*印の節(§)は既に掲載済みのものである。