

多体問題とグリーン関数との関係の研究

—グリーン関数と多体問題 (18)—

〈量子統計力学 10〉

橋爪邦夫*

Studies of relations between many-body problems
and Green functions

—Green function and many-body problems (18)

Quantum statistical mechanics 10

Kunio HASHIZUME*

Synopsis

The example of matter in the Bose-Einstein condensation is liquid He II. The liquid He II has many strange properties different from normal liquid. In this paper, we translate a part of "CHAPTER 13 SUPERFLUIDS in STATISTICAL MECHANICS SECOND EDITION written by KERSON HUANG" into Japanese and properly explain the difficult parts of it. The liquid He II is a superfluid and it is a fluid that flows without dissipation of energy. The liquid He II can flow through the tiniest tube ($0.1 \mu\text{m} \gg$ diameter) without viscosity. The liquid He II crawls up walls and coats all inside surfaces of its container. And if it is placed in an open beaker, the liquid will crawl up the wall, across the rim, and out of the beaker. Tisza's two-fluid model is made up of two components called the normal fluid and the superfluid. The normal fluid is supposed to behave like an ordinary classical fluid, whereas the superfluid has the unusual properties that its entropy is zero. In this way, we can understand many strange properties (mechanocaloric effect, fountain effect, and second sound phenomenon) of liquid He II.

* 近畿大学工学部教育推進センター

Center for the Advancement of Higher Education,
School of Engineering, Kinki University

§ 43 超流動

この節(§)の議論は、K. Huang 著 “Statistical Mechanics” の第1版(旧版)と第2版(新版)とに負う所が多い。前々節および前節 (§ 41, 42)で、我々はそれぞれ理想ボース気体のボース・アインシュタイン凝縮と粒子間反発相互作用を持つ不完全ボース気体のボース・アインシュタイン凝縮の現象を議論した。

ボース・アインシュタイン凝縮した物質系の例としては、液体ヘリウムIIがある。1908年オランダの物理学者のカマリング・オネス(H. Kamerlingh-Onnes)はヘリウム4 (He^4)の液化に成功した。その沸点は1気圧の下で4.21Kである。そして、こうして得られた液体ヘリウム4 (He^4)は通常の液体の性質を有し常流動体である。この相(phase)にある液体ヘリウム4 (He^4)を液体ヘリウムIと言う。液体ヘリウムIは飽和蒸気圧 $p=0.0497$ 気圧、転移温度 $T=2.172$ Kで粘性が消失する超流動状態へ転移する。この超流動状態の液体ヘリウム4 (He^4)を液体ヘリウムIIと言う。液体ヘリウムIIは液体ヘリウム4 (He^4)がボース・アインシュタイン凝縮を起こした状態である。

液体ヘリウムIIは通常の液体とは異なる数々の奇妙な性質を示す。この節(§)では K. Huang 著 “Statistical Mechanics” 第2版の第13章 超流動体(Superfluids) の訳を主体としてそれに適宜解説を加える事として記述を進める。

超流動体(superfluids)はエネルギーを散逸させる事なく流れる流体である。それは普通の感覚では理解し難い現象であるので、それは我々に大変な興味と興奮を引き起こす現象である。それは又、我々にそれを何かに利用できるのではないかと期待させる現象でもある。そして、その古典的例は低温相における液体ヘリウム4 (He^4)である。液体 He^4 は粘性(viscosity)を持たずに最も小さな孔、例えば、直径が $0.1 \mu\text{m}$ 以下の毛細管を通り貫けて流れる事が出来るのである。

これに似た現象に、多くの金属や合金、或いは、ある種の金属酸化物などの物質の直流電気抵抗がその物質に固有の転移温度 T_c 以下で0になる超伝導(superconductivity)現象がある。1908年にヘリウム(He)の液化に成功したオランダの物理学者カマリング・オネス(H. Kamerlingh-Onnes)は、低温における物質の性質を研究する内、1911年に水銀(Hg)の電気抵抗が、4.2K以下で0になる事を発見した。電気抵抗が完全に0で超電流(super currents)が何ヶ月もの間、外部電磁力を印加する事なしに流れ続ける事、そして、恐らくそれは原理的に無限に維持される永久電流であろう事は、7.2Kに転移温度を持つ鉛(Pb)の超伝導線を

用いて確かめられた。超伝導金属はどれもみな等しく注目に値する。この場合、我々は金属中を流れる超流動体として、電荷の担体のクーパー対(Cooper pairs)を考える。

この節(§)では、我々は超流動体の典型として液体 He^4 に話題を集中するであろう。

一気圧の下で、ヘリウムは観測が可能な最も低い温度まで、そして、恐らく絶対0度まで固体化に抵抗する事が知られた唯一の物質である。ヘリウムを固体にする為には我々は少なくとも25気圧(atm)まで加圧する事が必要である。ヘリウムの持つこの様な偶然な状況が、我々に、天然に現れる2種の量子液体、即ち、 He^4 と微量な同位体の量子液体 He^3 を与えるのである。

ヘリウムが固体化せず、流動性を持つところの定性的理由は次の2つである。

- He が希ガスであると言う事実によって立証される様に、He 原子共の間の分子相互作用が弱いと言う事。
- He 原子の質量は希ガス共の内でも最も小さい。この状況は He 原子共の大きな0点振動に導く。そして、その結果、それ等の He 原子共を十分に定められたそれぞれの格子位置に局在化させる事が不可能になる事。

上述の理由を理解する為には、我々は初めに、以下の二、三の事実を挙げねばならない。

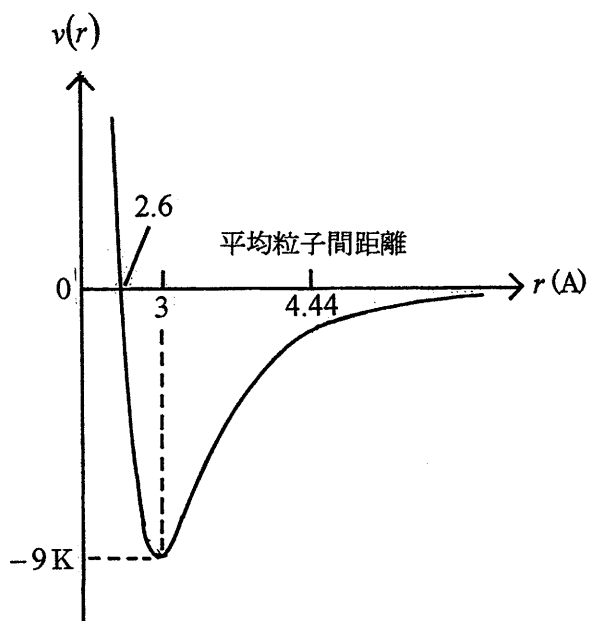


図1

距離 r [オングストローム] だけ離れた 2 個の He 原子共の間のポテンシャルエネルギー $v(r)$ [ケルビン] が、He 原子の電子構造の基礎に基づいて、Slater and Kirkwood によって計算されている。[J. C. Slater and J. G. Kirkwood, Phys. Rev. vol 37, 682 (1931)] 彼等は次式を見出した。

$$v(r) = (5.67 \times 10^6) e^{-21.5 \left(\frac{r}{\sigma}\right)} - 1.08 \left(\frac{\sigma}{r}\right)^6 \quad (3622)$$

但し、ここで、

$$\sigma = 4.64 \text{ [Å]} \quad (3623)$$

である。又、 $v(r)$ はケルビン単位 [K] である。即ち、

$$T = \frac{E}{k_B} = \frac{h\nu}{k_B} \text{ [K]} \quad (3624)$$

で決まる温度 T [K] でエネルギー高を表わしている。(3622) 式のポテンシャルエネルギー $v(r)$ のグラフが図 1 に示されている。

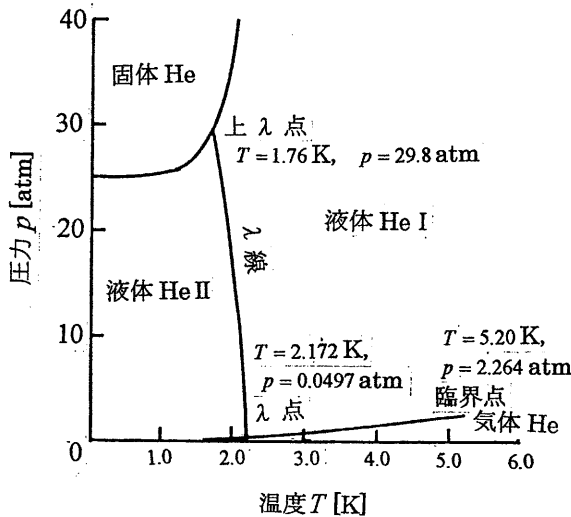


図 2

図 2 はヘリウム 4 (He^4) の P - T 相図を示している。図の λ 線を境にして高温側は通常の液体の性質、常流動状態を示し、液体ヘリウム I と呼ばれている。他方、 λ 線よりも低温側は超流動状態を示し、液体ヘリウム II と呼ばれている。 λ 線と飽和蒸気圧曲線とが交わる点を λ 点と呼び、そこでは、 $T_\lambda = 2.172$ [K]、 $P = 0.0497$ [atm] である。液体ヘリウム 4 (He^4) を真空ポンプで排気して減圧すると、蒸気圧曲線に沿って温度が下がって行き、 λ 点を通ると超流動相 (液体ヘリウム II) に入る。純粋な物質の気相と液相が圧力 P 、温度 T で熱平衡状態にあるとき、系の圧力 P を温度 T におけるその物質の飽和蒸気圧と言う。クラジウ

ス・クラペイロンの式 (Clausius-Clapeyron's equation)

$$\frac{dP}{dT} = \frac{l}{T(v_G - v_L)} \quad (3625)$$

は、飽和蒸気圧の温度変化の割合、即ち、蒸気圧曲線の傾きを与える式である。ここで、 v_G と v_L は圧力 P 、温度 T の下での気相と液相の比体積である。そして、 l は蒸発の潜熱 (気化熱) である。 v_G と v_L の実験値と実験による蒸気圧曲線の傾き $\frac{dP}{dT}$ とから、(3625) 式を

用いて、我々は液体ヘリウムの蒸発の潜熱 l を導出する事が出来る。実験データを外捜すると、それは絶対 0 [K] で $\frac{dP}{dT} > 0$ である事を示している。故に、液体

ヘリウムは絶対 0 [K] で、一原子当たり 0 でない有限の結合エネルギーを持っている。即ち、基底状態の液体ヘリウムは外圧が無い状態 ($P = 0$) で、自ら決めた平衡密度を有する N 粒子結合状態となっている。これは液体ヘリウムの系を構成する全粒子 N が一つの分子を構成していると考えても良い。

今、改めて我々は、外圧のない状態で、絶対 0 [K] にある He 原子共の集まりを考える。その原子共の集まりの最も本当らしい空間配置は、何らの外部から強いられた制約条件 (境界条件) を持たず、変分原理に従って、その系の全エネルギーを最小にする様なそういうものであるところの、その系の基底状態の波動関数によって決まる。この故に、エネルギーの考察は、唯一、最も本当らしい原子配置を決定するだけである。我々はそのとき次の定性的議論をする事が出来る。

もしも、一個の He 原子が十分に明確な定まった場所を持つものとするならば、その He 原子はポテンシャルの領域に比較して小さい距離 Δx 内に、例えば、図 1 と見比べて $\Delta x \approx 0.5$ [Å] 内に閉じ込められていなければならない。そのとき、不確定性原理

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (3626)$$

を利用すると、

$$\Delta p \approx \frac{\hbar}{2\Delta x} \quad (3627)$$

である。故に我々は、次のオーダーのエネルギーにおける不確定さを期待する。

$$\Delta E \approx \frac{(\Delta p)^2}{2m} \cdot \frac{1}{k_B} \approx \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{2\Delta x}\right)^2 \cdot \frac{1}{k_B} \quad (3628)$$

$\times \frac{1}{k_B}$ が掛かっているの、エネルギーはケルビン単位

(ボルツマン単位) [K]である。

ここで、ヘリウム 4 (He^4) の原子量は 4、陽子の静止質量は $m_p = 1.673 \times 10^{-27}$ [kg] であるからヘリウム 4 原子 (He^4) の質量は $m = 6.696 \times 10^{-27}$ [kg] である。中性子の静止質量は $m_n = 1.675 \times 10^{-27}$ [kg]、プランク定数は $\hbar = \frac{h}{2\pi} = \frac{6.626 \times 10^{-34}}{2 \times 3.14} = 1.055 \times 10^{-34}$ [Js]、位置の不確定性は $\Delta x \approx 0.5 \times 10^{-10}$ [m]、ボルツマン定数は $k_B = 1.381 \times 10^{-23}$ [J/K] である。これ等の値を (3628) 式へ代入すると、

$$\Delta E \approx \frac{1}{2 \times 6.696 \times 10^{-27}} \times \left(\frac{1.055 \times 10^{-34}}{2 \times 0.5 \times 10^{-10}} \right)^2 \times \frac{1}{1.381 \times 10^{-23}} \approx 6.018 \text{ [K]} \approx 10 \text{ [K]} \quad (3629)$$

を得る。そして、これは図 1 のポテンシャル井戸の深さと同程度の大きさである。故に、He 原子の局在化は不可能である。故に、ヘリウムは常圧で固体にならない。固体化するには 25 atm 以上の圧力が必要である。

非常な低温の温度の下方まで、固体化せずに液体の形態で存在し続ける事が出来るところの He 以外のその他の希ガスが存在しないと言う事実は、それ等のその他の希ガスの持つ He よりもはるかに大きな質量 m によって説明される。(3628) 式が示す様に、 m が大きいとエネルギーの不確定さ ΔE が小さくなり、ポテンシャルの領域の小さい範囲 Δx 内に局在出来るからである。故に、固体化する。因みに、その他の希ガスの凝固温度 (固体化する温度、融点でもある。) を記す。Ne : -248.67 [°C], Ar : -189.2 [°C], Kr : -156.6 [°C], Xe : -111.9 [°C], Rn : -71 [°C] m が小さい程 ΔE が大きくなって局在しにくくなり、より低温で凝固 (固体化) するのが分かる。

他方、He よりも軽いとは雖も、 H_2 が有限の温度、即ち、1 気圧の下で -259.14 [°C] で固体になると言う事実は、 H_2 分子共間の強い分子相互作用によって説明される。

我々が今、上で与えた議論は物理学の統計力学とは無関係である。しかし、それは何故 He^4 と He^3 の両方共が絶対 0 [K] まで液体のままにいられるのかを説明してくれる。

超流動転移 (λ 転移)

He^4 の相図 (又は、状態方程式) が図 3 に示されている。図中の尺度目盛りは厳密ではない。液相には液

体を更に He I と He II に分かるところの二次相転移 (第二種相転移) がある。

一次相転移、二次相転移を簡単に説明するとそれはそれぞれ次の様である。

一次相転移とは、系の自由エネルギーである F (ヘルムホルツの自由エネルギー) 又は G (ギブスの自由エネルギー) の温度 T による一階微分

$$-\left(\frac{\partial F(T, V)}{\partial T} \right)_V = S \quad [\text{\$ 45 付録参照}] \quad (3630)$$

又は

$$-\left(\frac{\partial G(T, P)}{\partial T} \right)_P = S \quad [\text{\$ 45 付録参照}] \quad (3631)$$

であるところのエントロピー S が不連続となる転移を言う。この転移では相転移の際に潜熱が伴う。又、2 相が熱平衡にあるときには、2 相の化学ポテンシャル μ_1 と μ_2 が等しい。水の気液相転移、水の固液相転移は一次相転移の例である。次に、

二次相転移とは、系の自由エネルギーである F (ヘルムホルツの自由エネルギー) と G (ギブスの自由エネルギー) の温度 T による二階微分に対応する比熱

$$C_V = \left(T \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = - \left(T \frac{\partial^2 F(T, V)}{\partial T^2} \right)_V \quad (3632)$$

又は、

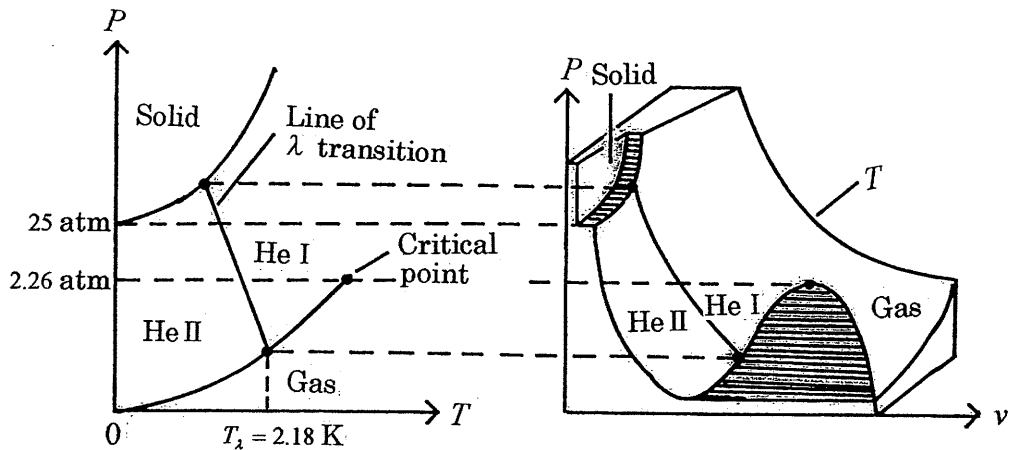
$$C_P = \left(T \frac{\partial S}{\partial T} \right)_P = - \left(T \frac{\partial^2 G(T, P)}{\partial T^2} \right)_P \quad (3633)$$

[\\$ 45 付録参照]

に、転移点で異常が現れる相転移である。この場合、化学ポテンシャル μ の温度 T 、圧力 P による一次導関数は転移点で連続であり、相転移に伴う潜熱はない。転移点で比熱に異常が現れると述べたが、比熱は転移点で不連続となり、多くの場合、比熱は転移温度の上下で文字 λ の様に発散する。(比熱異常を起こす。) これを λ 転移と言う。

He I は通常の液体の性質を持つところの常流動体の液体である。他方、He II は粘性を持たずに最も小さな孔、例えば、直径 0.1 μm 以下の毛細管を通り貫けて流れる事が出来るところの超流動体の振る舞いを示す。液体 He II はその他の数々の通常の液体とは異なる奇妙な性質 (噴水効果、フィルムフロー等) を示すので、我々の注目の焦点をなす。

He I から He II へ向けての転移は λ 転移と呼ばれる。このとき、転移は、図 3 中の液体 He I と気体 He 蒸気の熱平衡を表わすところの蒸気圧曲線に沿って、温度を下げて行くとき、温度



Equation of state of He⁴ (not to scale)

図3

$$T_\lambda (= T_c) = 2.18 \text{ [K]} \quad (3634)$$

比体積

$$v_\lambda (= v_c) = 46.2 \text{ [A}^3/\text{atom]} \quad (3635)$$

の所で現れる。蒸気圧曲線に沿う液体 He⁴ の実験的比熱は λ 転移の点へ、He I 側からと He II 側からの各々の側から近付くにつれて、図4に示す様に対数的に (logarithmically) 無限大になる。転移温度 T_λ 付近の比熱曲線のこの形が λ 転移の名の起源となっている。

Specific

heat

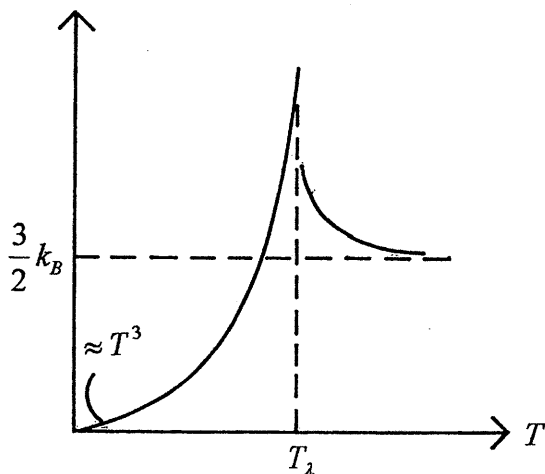


図4

He⁴ の比熱は図4に明らかな様に転移点で不連続であり、転移温度の上下で文字 λ の様に発散するところ

の λ 転移を示す。尚、He⁴ の原子は陽子2個、中性子2個、電子2個の偶数個のフェルミ粒子から成るボース粒子である。故に、液体 He⁴ はボース液体である。他方、He³ の原子は陽子2個、中性子1個、電子2個の奇数個のフェルミ粒子から成るフェルミ粒子である。故に、液体 He³ はフェルミ液体である。He³ は λ 型転移 (λ 転移) を示さない。He³ 原子の質量は He⁴ 原子の質量よりも小さい。故に、(3628)式

$$\Delta E \approx \frac{(\Delta p)^2}{2m} \cdot \frac{1}{k_B} \approx \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{2\Delta x} \right)^2 \cdot \frac{1}{k_B} \text{ [K]}$$

[(3628)式] (3636)

から明らかな様に、エネルギーにおける不確定さ ΔE は更に大きく、量子力学的零点振動の効果が大きく、故に、He³ 原子の局在化はより困難である。液体 He³ は、液体 He⁴ よりも高圧の34気圧以上の外圧の下だけで固相となる。1K以下ではフェルミ統計の効果が著しくなる。液体 He³ は 10⁻³K以下の温度で超流動体相へ相転移を受ける。そして、その物理的仕組みは金属の超伝導におけるそれに類似している。そこでは核スピンを平行に揃えた束縛された原子対 (フェルミ対) 共が凝縮して超流動体相を作る。しかし、我々はこの場合を議論しない。これはランダウのフェルミ液体理論の対象である。

He⁴ の λ 転移は分子間反発作用によって修正を受けたボース・アインシュタイン凝縮を受ける。我々は以前の節 (§41) ボース・アインシュタイン凝縮 の (3469)式で、液体 He⁴ と同じ質量と密度を持つ理想ボ

一ス気体のボース・アインシュタイン凝縮が起きる為の転移温度（臨界温度）を次の公式、

$$T_c(=T_\lambda) = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \frac{1}{k_B \left\{ \frac{3}{2} \ln \left(\frac{2}{\pi} \right) \right\}^{\frac{2}{3}}}$$

[(3292)式、(3465)式] (3637)

を用いて計算した。そして、

$$T_c(=T_\lambda) = 4.148 \text{ [K]} \quad [(3469)式] \quad (3638)$$

を得た。そして、この値は分子間相互作用を持つ実在 He⁴ボース気体のボース・アインシュタイン凝縮の、飽和蒸気圧 $p = 0.0497$ 気圧下での実験の示す相転移温度 $T_c(=T_\lambda) = 2.172$ [K] ($T_\lambda = 2.18$ [K] (3634)式)と同程度の大きさである。この事は λ 転移が分子間相互作用によって修正を受けたボース・アインシュタイン凝縮であると仮定するのが自然である事を示している。

Tisza(ティサ)の2流体モデル

Tisza(ティサ)の2流体モデルを説明したこの節の文章の大部分は、K.Huang 著 “Statistical Mechanics” 第2版 pp311-313 の訳である。

カマリング・オネス(Kamerling Onnes)が1908年、初めてヘリウムを液化したとき、 $T_\lambda(=T_c) = 2.18$ [K] [(3634)式参照]の下方の温度で、この液体の持つ幾つかの異常な性質が明らかになった。

液体ヘリウムを入れている容器の温度が $T_\lambda(=T_c)$ よりも高くないならば、液体ヘリウムが容器の壁面を這い上がり、そして、その容器の総ての内側表面を覆う事が見出された。これが超流動のフィルムフロー(film flow)である。そして、もしも液体ヘリウムが口の開いたピーカー中に置かれるならば、その液体ヘリウムはその壁面を這い上がり縁を横切りピーカーの外へ出てしまうのである。これは明らかに超流動性である。

上述した事柄を含む超流動性に関する幾つかの異常現象共が Tisza(ティサ)によって提案されたところの2流体モデルとして知られている現象論的モデルによって記述される事が出来る。(1938年)

もちろん、液体 He II 相は単一成分から成り立っている。しかし、Tisza(ティサ)はこれを常流動体(normal fluid)と超流動体(superfluid)と名づけられた2成分の混合物から成り立っていると仮定したのである。他方、それと対比区別して液体 He I 相の方は純粋な常流動体(normal fluid)である。我々は He II 相中のそれ等に特徴的な質量密度 ρ_n と ρ_s がそれぞれ常流動体と超流動体とへ帰属すると考える。次に、もしも、

その液体が流れるならば、その特徴的速度場共の \mathbf{V}_n と \mathbf{V}_s がそれぞれ常流動体と超流動体へ帰属すると考える。そのとき、我々が、液体 He II の質量密度 ρ と速度場 \mathbf{V} は、それぞれ次式によって与えられると考えるのが当然である。

$$\rho = \rho_n + \rho_s \quad (3639)$$

$$\rho \mathbf{V} = \rho_n \mathbf{V}_n + \rho_s \mathbf{V}_s \quad (3640)$$

(3640)式は運動量密度である。もちろん、我々は常流動体は通常の古典流体の様に振舞うと仮定する。他方、超流動体は次の様な異常な性質共を持っていると仮定される。

(a) そのエントロピーは0である。

(b) それは極度に小さな直径の導管 (10^{-2} cm 又はそれよりも更に小さい。0.1 μm 以下の毛細管)を通して抵抗なしに流れる。

以上述べて来た事以外に、更なる何らかの仮定共をする事なしに、我々は液体 He II が示す多くの奇妙な性質共を定性的に理解する事が出来る。

我々はこの文章の少し前で、液体 He II 相は単一成分から成り立っていると述べた。実際、液体 He⁴ は $T_\lambda(=T_c) = 2.18$ [K] 以下の温度では、極めて細い管 (10^{-2} cm 又は更に小さい直径 0.1 μm 以下)の中を圧力差なしで流れ、この毛細管法の実験で He II 相の粘性係数は0である。ところが、他方、弾性細線につるされた回転円筒にねじり回転自由振動をさせたときの周期と対数減衰率の測定から粘性率を求めるところの振動粘度計(viscometer)の実験からは、液体 He II 相の粘性率は有限の値が得られた。これは矛盾である。

この矛盾を解決する為に、1938年、Tisza(ティサ)が先に述べた液体 He II の2流体模型を提案したのであった。次の様に考えよう。液体 He⁴ は絶対0 [K]では総ての He⁴原子共は最低エネルギー状態にある。次に、0 [K]より少し温度を上昇させよう。このとき、有限温度にある液体 He⁴中では熱エネルギーを担っている常流動体成分の He⁴原子共と、未だ最低エネルギー状態にある超流動体成分の He⁴原子共とが混合状態にあると考えられる。そして、このとき、超流動成分の最低エネルギー状態にある He⁴原子共の割合は転移温度 $T_\lambda(=T_c) = 2.18$ [K]以下で有限となり温度の低下と共にその割合を増す。他方、それよりも高温では0となる。そして、液体 He⁴は2.18 [K]以上の温度で超流動性を失い、常流動相の液体 He I 相となる。

2流体模型においては、存在する常流動体(normal fluid)成分と超流動体(superfluid)成分の相対的量は Andronikashvili(アンドロニカシュビリ)の実験(1946年)から導出される事が出来る。0.2mm 離して一定間隔

を置かれた円板の積み重ねが一本の軸に取り付けられている。そして、図5に示される様に He II 中でその集合体は回転させられる。その集合体の慣性能率が He II

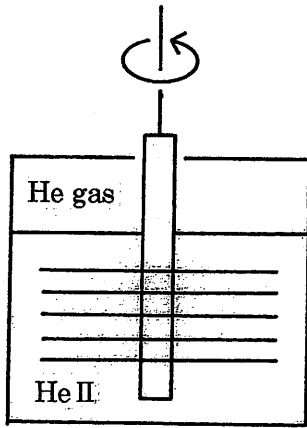


図5

がそれ自身の蒸気と熱平衡にあるとき、温度の関数として測定される。このとき、超流動体 (superfluid) は回転円板によって完全に影響を受けないままであり、他方、円板共の間の常流動体 (normal fluid) は回転へ引きずり込まれると仮定する事によって、我々は慣性能率が $\frac{\rho_n}{\rho}$ に比例しなければならない事が分かる。比例定数は転移温度 $T_\lambda (=T_c)=2.18$ [K] で $\frac{\rho_n}{\rho}=1$ と言う事実によって決定される。実験結果は次の式で表わされる。

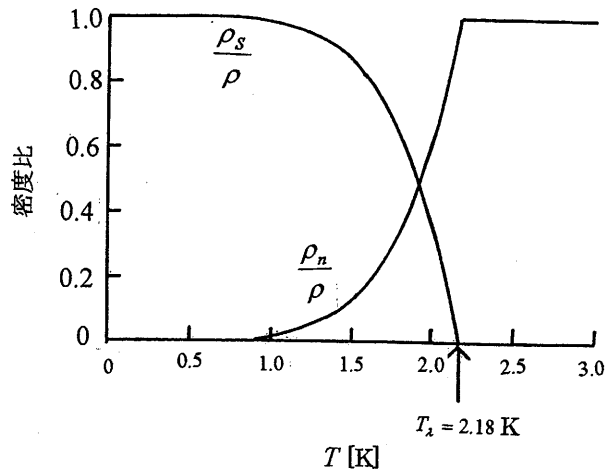
$$\frac{\rho_n}{\rho} = \begin{cases} \left(\frac{T}{T_\lambda}\right)^{5.6} & \text{for } T < T_\lambda \quad (3641) \\ 1 & \text{for } T > T_\lambda \quad (3642) \end{cases}$$

2流体模型の微視的説明は既に簡単に与えた。図6は上式[(3641)式と(3642)式]を図示したものである。超流動性分 ρ_s は $T_\lambda (=T_c)=2.18$ [K] ででき始め、温度の低下と共に急激に増加して 0 [K] で 100%となる事が分かる。

熱機械効果 (mechanocaloric effect)

He II の貯蔵容器中の非常に小さな孔は、常流動体 (normal fluid) を背後に残して、孔を通して超流動体 (superfluid) 成分が通過する事ができるので、超流動

体成分に対する濾過器 (フィルター) として作用する。



ρ_s と ρ_n の温度変化

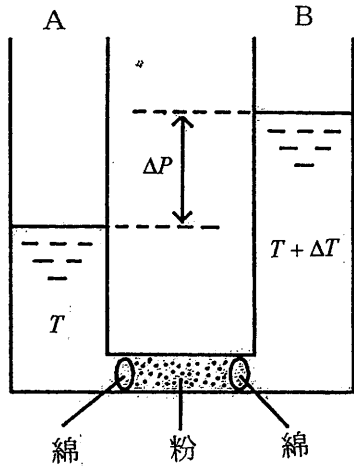
図6

今、He II の 2 個の貯蔵容器が非常に細い管 (スーパーリーク) によって結合されていると仮定しよう。そして、圧力差を設定する事によって幾らかの超流動体が貯蔵容器 A から貯蔵容器 B へ流れる様になされていると仮定せよ。そのとき、超流動体はエントロピーが 0 なので、貯蔵容器 A 中の単位質量当たりのエントロピーは増加するであろう。他方、貯蔵容器 B 中の単位質量当たりのエントロピーは減少するであろう。故に、貯蔵容器 A は温まり、貯蔵容器 B は冷えるであろう。これが熱機械効果 (mechanocaloric effect) として知られている現象である。

噴水効果 (ファウンテン効果, fountain effect)

前述した熱機械効果の逆の効果、即ち、加熱による圧力差の生成の効果は噴水効果 (ファウンテン効果, fountain effect) として知られている。図7の様に等しい太さの U 字管 A, B の連結部に細かい粉を詰めてスーパーリークとする。液体 He II の貯蔵容器である左右両容器 A, B の温度の内、例えば一方 B を ΔT だけ高くする。このとき、図6から分かる様に、高温 B の方では超流動体成分の量が減少し、常流動体成分の量が増加する。常流動体成分はスーパーリークを通過する事ができないので、A, B 両容器中で濃度さがあって圧力差が生じたとしても、それは粉によって支えられる。他方、超流動体成分はスーパーリークを通過できるので、濃度差を解消しようとして、A から B へと通過する。そして超流動成分の移動は左右の容器中の超流動性分の量が等しくなったとき終了する。こうし

て、U字管Bの液面がAに較べて上昇して圧力差が生ずる。もしも、このとき、U字管Bの高さが圧力差に相当する高さよりも低いときには液体 He は管の上端からあふれ出続ける。これが噴水効果(ファウンテン効果、fountain effect)である。



スーパーリーク

図7

実際、図8の様に、下端に細かい粉を詰めた毛管を超流動状態にある液体 He II へ垂直に立て、上端を液面の上に出しておき、粉の方を光の照射によって温めると、液体 He が超流動によって粉の間隙を流れて、管の上端から噴出するのが観測できる。これは加熱による温度差によって生じた圧力差の結果、超流動成分が低温側から高温側へと流れた結果である。

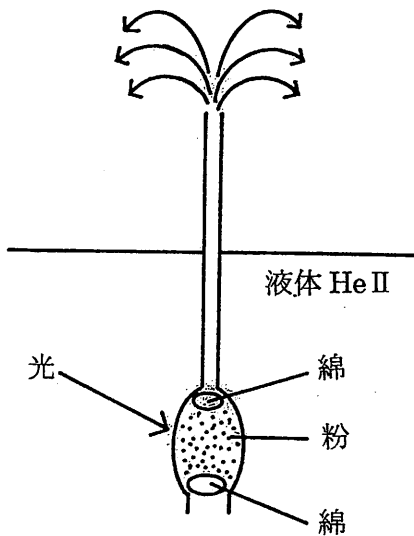


図8

第2音波(second sound)

超流動状態にある液体 He II 相の2流体模型によれば、図6が示す様に、液体 He II 相は超流動体成分(superfluid)と常流動体成分(normal fluid)の混合物である。そして、絶対0 [K]では超流動体成分が100%であるが、温度の上昇と共に常流動体成分の割合が増加する。

液体 He II 中の音波(第1音波)とは超流動体成分の He 原子共と常流動体成分の He 原子共とが、今在る混合状態と混合の割合のまま、密度 ρ_s と ρ_n が各位置で同位相で一斉に縦振動で正弦曲線的に振動するモードを意味する。何故ならば、それ等が同位相で一斉に縦振動するときのみ、全質量密度 $\rho = \rho_n + \rho_s$ [(3639)式] が正弦曲線的に変化する事ができるからである。分かり易く言えば、この振動は流体全体が振動するものであって、普通の液体中を伝播する音の縦波(粗密波、密度の振動、圧力波)である。

次に、我々は上述の音波(第1音波)とは異なる振動の別の1つの新しい模型(第2音波)を想像する事ができる。そこでは、常流動体成分(normal fluid)と超流動体成分(superfluid)とが 180° だけ位相がずれて縦振動している。これは音波(圧力波)ではない。何故ならば、全質量密度 $\rho = \rho_n + \rho_s$ [(3639)式] がその液体を通して常に一定であるからである。即ち、そこでは全体の密度を一定の保ちながら各位置で超流動成分と常流動成分の割合が変化しているのである。しかし、この場合、超流動体成分はエントロピーを持たない。そして、エントロピーを担うのは常流動体成分のみである。故に、この振動の1つの新しい模型(第2音波)は単位質量当りの縦振動のエントロピーの正弦曲線の変化を表わしている。そして、これは温度 T の縦振動と考える事もできる。我々は He II の局所的加熱によって、この新しいモードを励起する事ができる。実際、He II を局所的に加熱するとその部分で常流動体成分の割合が増す。次に、加熱をやめると確立された温度勾配は熱伝導における様に拡散によって伝播するのではなく、1つの特徴的な速度で波として周囲に伝播する。即ち、液体全体の密度は一樣で常流動体成分と超流動体成分の比だけが波として伝播する。そして、その結果、温度の変化が波動となって伝わるのである。この現象が第2音波(second sound)と呼ばれているのである。

参考文献

1) J.M.Ziman 著：“Elements of Advanced Quantum Theory” (Cambridge University Press)

- 2) 高野文彦著: “新物理学シリーズ 18 多体問題” (培風館)
- 3) 高橋康著: “新物理学シリーズ 16 物性研究者のための場の量子論 I, II” (培風館)
- 4) K. Huang 著: “Statistical Mechanics” (John Wiley & Sons, Inc) first edition and second edition
- 5) A. M. Zagoskin 著: “Quantum Theory of Many-Body Systems” (Springer)
- 6) シッフ著、井上健訳: “新版 量子力学上、下” (吉岡書店)
- 7) 西川恭治、森弘之著: “統計物理学” (朝倉書店)
- 8) ランダウ・リフシッツ著、佐々木健、好村滋洋訳: “量子力学1 (改訂新版)” (東京図書)
- 9) ランダウ・リフシッツ著、小林秋男、小川岩雄、富永五郎、浜田達二、横田伊佐秋訳: “統計物理学第3版上” (岩波書店)
- 10) U. Fano: Reviews of Modern Physics 74 vol29 No1 (1955)
- 11) 小田恒孝著: “統計力学” (裳華房)
- 12) 桂重俊著: “統計力学” (廣川書店)
- 13) キッテル著、山下次郎、福地充訳: “キッテル熱物理学” (丸善株式会社)
- 14) 小暮陽三著: “基礎と応用 統計力学” (森北出版)
- 15) 田沼静一郎著: “電子伝導の物理” (裳華房)
- 16) キッテル著、宇野良清、津屋昇、森田章、山下次郎訳: “新版固体物理学入門上” (丸善株式会社)

この論文は拙著原稿“多体問題とグリーン関数との関係の研究 高等量子力学入門1”, 内容

目次

はじめに

第1章 フェルミオン系の量子力学

§ 1.1 序言

- * § 1.2 状態関数の数表示表現と生成・消滅演算子の導入, ならびに生成・消滅演算子の交換関係
- * § 1.3 ハミルトニアンを生成・消滅演算子を用いて記述する事
- * § 1.4 ハミルトニアンを運動量表示, フェルミ真空, フェルミ自由電子・正孔系の記述
- * § 1.5 場の演算子の導入と交換関係
- * § 1.6 ハミルトニアンを場の演算子を用いて記述する事
- * § 1.7 運動量表示での場の演算子とハミルトニアンの記述

- * § 1.8 シュレディンガー表示の量子力学
- * § 1.9 ハイゼンベルグ表示の量子力学とハイゼンベルグの運動方程式
- * § 1.10 ハイゼンベルグ表示での生成・消滅演算子と場の演算子, そして, それらの交換関係, それから, ハミルトニアン表現, 第2量子化

参考文献

第2章 高等量子力学における摂動理論

- * § 2.1 ハイゼンベルグ表示
- * § 2.2 相互作用表示
- * § 2.3 相互作用表示での生成・消滅演算子と場の演算子
- * § 2.4 Brillouin-Wigner の摂動理論
- * § 2.5 時間発展演算子 $U(t, t_1)$ の積分方程式による表現と, その時間積分展開級数
- * § 2.6 時間発展演算子 $U(t, t_1)$ の計算
- * § 2.7 時間発展演算子 $U(t, t_1)$ の幾つかの性質
- * § 2.8 時間発展演算子 $U(t, t_1)$ とその遷移確率 $W_{a \rightarrow b}$
- * § 2.9 散乱理論と S 行列
- * § 2.10 時間非依存の摂動理論と S 行列
- * § 2.11 フェルミオン・ボソン相互作用
- * § 2.12 S マトリックス展開; $S = U(+\infty, -\infty)$
- * § 2.13 相似変換の公式
- * § 2.14 S マトリックス展開式の計算例 S_2
- * § 2.15 生成・消滅演算子 (正規積 (N積) への準備)
- * § 2.16 『フェルミ真空』又は『フェルミ海』に関しての電子と正孔の新しい生成・消滅の場の演算子を使つての S マトリックス展開式の計算例 S_2
- * § 2.17 N積
- * § 2.18 縮約積 (コントラクション)
- * § 2.19 Wick の定理
- * § 2.20 S マトリックスの T積表示
- * § 2.21 縮約積が 0 となる場合
- * § 2.22 Wick の定理のダイヤグラム表示
- * § 2.23 Wick の定理の計算例 S_2 式中の 1 項
- * § 2.24 正規形 (N積形式) と Wick の定理の関係
- * § 2.25 Feynman diagram を眺めたとき, 逆にそれを式に書ける事
- * § 2.26 グリーン関数の定義
- * § 2.27 伝播関数の定義
- * § 2.28 実変数関数の定積分の値を複素積分の留数の定理を応用して求める事
- * § 2.29 Feynman diagram の式を運動量表示するための準備

- * § 2.30 運動量表示
- * § 2.31 ダイアグラムの寄与の計算
- * § 2.32 ダイアグラムの寄与の計算例
- * § 2.33 電子・フォノン相互作用
- * § 2.34 修正伝播関数の計算
- * § 2.35 フェルミオンのダイソン(Dyson)の方程式
- * § 2.36 ボソンのダイソン(Dyson)の方程式
- * § 2.37 修正されたバーテックス(vertex, 結節点)
- * § 2.38 修正された真空部分
- * § 2.39 我々は今何をして来たのかを振り返ってみる。
- * § 2.40 フェルミオンのダイソン(Dyson)の方程式の別の形
- * § 2.41 ボソンのダイソンの方程式の別の形
- 参考文献
- 第3章 ボソン系の量子力学
- * § 3.1 量子力学的単純調和振動子
- * § 3.2 ブラベクトル, ケットベクトル, 生成・消滅演算子
- * § 3.3 量子力学的一次元原子鎖連成振動子
- * § 3.4 量子力学的三次元格子状配列原子連成振動子
- * § 3.5 連続体媒質への議論の移行と、場の演算子 $u(\mathbf{r}), p(\mathbf{r})$
- * § 3.6 古典場の理論
- * § 3.7 場の演算子と第2量子化
- * § 3.8 ボース統計に従うシュレディンガー波動場の量子化(第2量子化)とボソン
- * § 3.9 Klein-Gordonの方程式
- * § 3.10 場の源と場間の相互作用
- * § 3.11 簡単な例1、フォノンのレーラー散乱
- * § 3.12 簡単な例2、核力と湯川の中間子理論
- * § 3.13 荷電ボソンと荷電中間子
- 参考文献
- 第4章 グリーン関数と多体問題
- * § 4.1 古典物理学のグリーン関数とその簡単な例
- * § 4.2 1電子グリーン関数(1)
- * § 4.3 密度行列
- * § 4.4 統計行列
- * § 4.5 量子力学との関係
- * § 4.6 古典統計力学のリュウヴィル(Liouville)の定理
- * § 4.7 量子統計力学のリュウヴィル(Liouville)の定理(密度演算子の運動方程式)
- * § 4.8 量子統計力学の小正準集団(ミクロカノニカル アンサンブル)
- * § 4.9 量子統計力学の正準集団(カノニカル アンサンブル)
- * § 4.10 量子統計力学の大正準集団(グランドカノニカル アンサンブル)
- * § 4.11 古典統計力学の基本原理
- * § 4.12 小正準集団
- * § 4.13 古典統計力学の小正準集団からの熱力学の導出
- * § 4.14 エネルギー等分配則
- * § 4.15 古典理想気体
- * § 4.16 ギブスのパラドックス
- * § 4.17 正準集団
- * § 4.18 正準集団の熱力学
- * § 4.19 正準集団に於けるエネルギーの揺らぎ
- * § 4.20 大正準集団
- * § 4.21 大正準集団における密度の揺らぎ
- * § 4.22 化学ポテンシャルと化学平衡
- * § 4.23 正準集団と大正準集団の等価性
- * § 4.24 $W(N)$ の振る舞い
- * § 4.25 マクスウェル架設線の意味
- * § 4.26 演習問題の訳
- * § 4.27 量子統計力学の以前の議論のおさらい
- * § 4.28 熱力学第3法則
- * § 4.29 小正準集団で扱かう理想気体
- * § 4.30 正準集団で扱かう理想気体
- * § 4.31 大正準集団で扱かう理想気体
- * § 4.32 理想フェルミ気体の状態方程式
- * § 4.33 黒体放射(空洞放射)
- * § 4.34 固体中の音子(フォノン)
- * § 4.35 磁化と正準集団と大正準集団の磁化率
- * § 4.36 ランダウ準位
- * § 4.37 ランダウの反磁性と磁化率
- * § 4.38 \mathbf{k} 空間と実空間での軌道面積の量子化と磁束の量子化
- * § 4.39 パウリの常磁性
- * § 4.40 不完全電子気体の磁氣的性質
- * § 4.41 ボース・アインシュタイン凝縮
- * § 4.42 不完全ボース気体
- * § 4.43 超流動
- * § 4.44 ド・ハースーファン・アルフェン効果
- * § 4.45 量子ホール効果
- * § 4.46 付録 熱力学的関数と熱力学的関係式
- * § 4.47 イジング(Ising)模型の定義
- * § 4.48 イジング模型の他の模型共に対する等価性
- * § 4.49 自発磁化(1次元における自発磁化の不在)
- * § 4.50 自発磁化(1次元における自発磁化の存在)

* § 4.51 ブラック・ウィリアムズ近似

§ 4.52 ベーテ・パイエルス近似

§ 4.53 1次元イジング模型

以下続く。

参考文献

の内、紙面の都合により、第4章、節(§)4.43を記述したものである。*印の節(§)は既に掲載済みのものである。