

解説

加速器駆動未臨界炉に対する 炉雑音解析研究の現状と課題

橋本憲吾¹

Current status of research and development of reactor noise analysis for accelerator-driven subcritical system

Kengo Hashimoto¹

This report presents a current status of the research and development of reactor noise analyses applicable to accelerator-driven subcritical reactor system. These research activities have been concentrated on the Feynman- α neutron correlation analysis on time domain and the power spectral analysis on frequency domain. At present, the latter power spectral analysis is of greater advantage than the former Feynman- α one, for periodic and pulsed neutron source. While Feynman- α formula for pulsed neutron source is too complicated to be fitted directly to variance-to-mean ratio data, the power spectral analysis has a simpler formula based on the first-order reactor transfer function. The Feynman- α should be improved to consider spatial effect of deeply subcritical system and instability of accelerator operation. Further subject of reactor noise analyses is an improvement for high power operation.

Keywords: ADS, reactor noise, Feynman- α , neutron correlation, power spectral analysis, subcriticality, prompt-neutron decay constant, spatial dependence

¹近畿大学原子力研究所 Atomic Energy Research Institute, Kinki University

1. 序論

加速器駆動未臨界炉システム(Accelerator-Driven Subcritical System)は、超ウラン元素を含む超寿命放射性廃棄物の核変換処理の観点から注目され、我が国と欧州を中心に開発が精力的に進められている[1-8]。Np, Cm, Am等のマイナーアクチニド(Minor Actinide)が燃料として装荷されるADSは、反応度事故のリスクを回避するため、未臨界状態で運転される。このため、未臨界度は重要な安全性の核的パラメータとなる。この未臨界度は、中性子源からの入力に対するシステムの中性子利得を決定するので、経済性および運転制御性の観点からも重要なパラメータとなる。安全性の観点からはADSの未臨界度は大きいことが望ましいが、経済性の観点からはできるだけ小さいことが要請される。このトレードオフを考慮して、最適な運転上の未臨界度範囲が設定される。ただし、設計計算の不確実性を考えると、運転中のADSの未臨界度を常時監視する必要がある、この必要性は研究者間での共通認識となっている。

原子炉雑音解析は、運転中の原子炉の核的パラメータ測定や異常診断手法として発展してきた。この炉雑音解析は、中性子増倍体系自身が有する白色雑音源を外乱として利用するので、体系外から反応度外乱を投入する必要が無い。ただし、ADSの未臨界度監視手法として既存の原子炉雑音解析を使用することはできない。これは、ADSの中性子源は、Am-Be等のポアソン中性子源ではなく、反応当たり多数の中性子を放出する核破砕中性子源であるためである。ターゲットに照射される陽子ビームが直流でなくパルスビームの場合は、更に適用が困難な状況となる。

ADSの未臨界度監視として炉雑音解析を適用するための理論研究は1990年代後半から始まり、近年では、我が国において実験的研究も進められている。本稿では、これら研究の状況を纏め、今後

の課題を抽出したい。炉雑音解析は様々な確率論的手法の総称である。以下では、ADSを対象として研究が進められてきたファイマン- α 法とパワースペクトル法について述べる。

2. ファイマン- α 法に関する研究

まず、定常中性子源に対する通常ファイマン- α 法[9]について概説する。このファイマン- α 中性子相関解析では、ゲート内の中性子検出計数が連続的に収録される。このゲートが開く時間幅をゲート時間(gate time) T とする。 k 番目のゲート内の計数を M_k とすると、ファイマン- α 解析が採用する統計的指標 Y は以下の様に定義される。

$$Y(T) \equiv \frac{\overline{M_k^2} - \overline{M_k}^2}{\overline{M_k}} - 1, \quad (1)$$

ただし、計数およびその自乗の上線は期待値を表す。中性子検出がポアソン分布に従うとすると、(1)で定義される Y はゼロとなる。中性子検出イベント間の相関は、非ゼロの Y をもたらず。遅発中性子の影響を無視すると、即発中性子減衰定数 α は、測定された Y データに次式を最小自乗フィットすることにより得られる。未臨界状態での反応度つまり未臨界度は、(3)式に基づき α から算出することができる。

$$Y(T) = Y_\infty \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right), \quad (2)$$

ただし、

$$\alpha \equiv \frac{\beta - \rho}{\Lambda} \quad \text{: prompt neutron decay constant}, \quad (3)$$

$$Y_\infty \equiv \varepsilon D_V \frac{(1 - \beta)^2}{(\beta - \rho)^2}, \quad (4)$$

$$D_V \equiv \frac{\nu(\nu - 1)}{\nu^2} \quad \text{: Diven factor}, \quad (5)$$

$$\varepsilon \equiv \frac{R}{F} \quad \text{: detection efficiency}. \quad (6)$$

上の F, R は、それぞれ核分裂率、中性子検出器の

計数率を表す。他は通常の表記法に従っている。ファイマン- α 法のみならず様々な炉雑音解析手法がウィリアムズ[10]により詳細に解説されている。

ファイマン- α 法を ADS に適用するための研究は、名古屋大学の山根らとスウェーデン・イエテボリ大学の Pa'zsit らのグループを中心に開始した[11-13]。当初は、直流電流モードの加速器運転を想定した研究が進められた。彼らは、核破砕反応当たりにも多数の中性子が放出されること (Multiplicity)により新たに生じる相関を考慮して、次のような Y の理論式を導いている。

$$Y(T) = Y_{\infty} (1 + \delta) \left(1 - \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \right), \quad (7)$$

ただし、 δ は核破砕反応の Multiplicity により追加される相関を表す。上式は、 Y データに(6)式と同じ関数型を最小自乗フィットすることにより即発中性子減衰定数 α を得ることができることを示している。しかも、核破砕反応の Multiplicity により Y の飽和値が増大するので統計誤差が縮小し、この結果としてより深い未臨界状態まで適用範囲を拡張できる可能性がある。

続いて、彼らのグループは、パルス電流モードの加速器運転を対象にファイマン- α 法の理論式を導出した[14-17]。これら理論式は非常に複雑な表現となっているため、統計誤差を有する測定データから最小自乗フィットにより即発中性子減衰定数 α を安定的に得られるかどうか危惧された。核破砕中性子源に代えて DT 中性子源を対象とした場合には、理論式は以下のように幾分簡単な表現となる[17]。

$$Y(T) = \frac{\lambda_d \lambda_f \langle \nu(\nu-1) \rangle}{\alpha^2} \left(1 - \frac{1 - \exp(-\alpha T)}{\alpha T} \right) + \frac{2S_0 \lambda_d}{a_0 T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{\omega_n^2} \sin^2 \left(\frac{\omega_n}{2} T \right). \quad (8)$$

上式の右辺第 1 項は通常の核分裂中性子の Multiplicity による相関項であり、パルス中性子源の場合は第 2 項として非相関成分の振動項が加わる。ただし、この振動項は単一の正弦波ではなく、多くの周波数を持つ波の重ね合わせとなっているため、最小自乗フィットは困難となることが予想される。

ファイマン- α 法を ADS に適用するための実験的研究は僅かであり、しかも京都大学臨界集合体実験装置(KUCA)における実験に限定される。名古屋大学の北村ら[18]は、DT パルス中性子源により駆動された体系においてファイマン- α 相関解析を実施している。測定された Y データには、名古屋大学グループや Pa'zsit らが理論的に予測したような振動モードが観察されている。彼らは、自ら導出した理論式を測定データに最小自乗フィットして即発中性子減衰定数 α を得ている。ただし、彼らの実験において、中性子検出器は炉心燃料領域中央に設置され長時間のデータが取得されている。これはベンチマーク的な実験として位置付けられるべきであり、常時監視法としての適用性については彼らも楽観視していない。むしろ、これら理論式は、非線形最小自乗推定を安定的に行うには複雑すぎると判断すべきかも知れない。

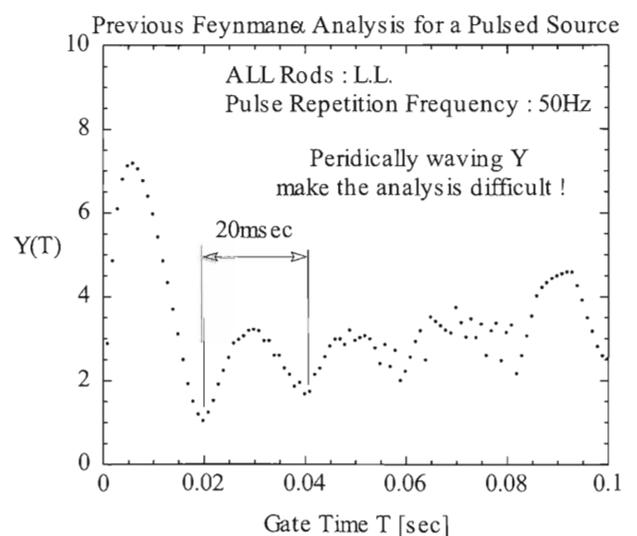


Figure 1. Y data measured for a pulsed neutron source.

Figure 1には、近畿大学のグループが KUCA において測定した Y データを示す。ただし、パルスの繰り返し周波数は 50Hz である。パルス周期 20ms 毎に Y は大きくしかも複雑に波打ち、最小自乗フィットの困難さが予想される。例えば、(8)式をフィットする場合を考えると、右辺第 1 項の相関項よりも第 2 項の振動項が卓越して大きいため、相対的に小さな第 1 項に含まれる即発中性子減衰定数の推定は統計的に困難であると判断される。実際に Figure 1 のデータに(8)式を最小自乗フィットしたが、収束解は得られなかった。

ファイマン- α 法における更なる困難さは、加速器中性子源の不安定さが影響しやすい点である。Degweker ら[19]は、この中性子源の不安定さの影響を評価すべきであると主張し、不安定事象をモデルに組み込んだ理論を提案している。彼は自らの論文中で以下のように述べている。

「Whatever may be the kind of accelerator actually used for any experimental or demonstration ADS, it cannot be assumed that the source events would constitute a stochastic Poisson process whether direct-current-mode or pulsed-current-mode operation of the accelerator. It is impossible to build a perfectly steady accelerator machine, which gives Poisson statistics. Even a well-stabilized accelerator is expected to show a non-Poisson fluctuation in current over a few percent.」

Figure 2 に、近畿大学のグループが KUCA において収録した中性子検出器信号の時系列データを示す。加速器の運転が不安定になると、このような出力の揺動が現れ、この出力変化のトレンドはファイマン- α 解析の分散を増大させる。

Figure 3 に、この実験[20]において得られた Y データを示す。Y は長いゲート時間領域でも飽和傾向は現れず、むしろ発散傾向を示すようになる。最小自乗フィットによる曲線もデータから系統的にズレ、得られる即発中性子減衰定数も著しく過小評価する。ただし、パルス周期は 1ms に設定し

ているので、1ms 刻みのゲート時間上には振動項は現れていない。近畿大学のグループは、この加速器中性子源の不安定さの影響を低減するために、階差フィルターを適用したファイマン- α 解析[21,22]を試みている。この試みは成功し、得られた即発中性子減衰定数はパルス中性子法による値と一致した。階差フィルターは、出力のドリフト

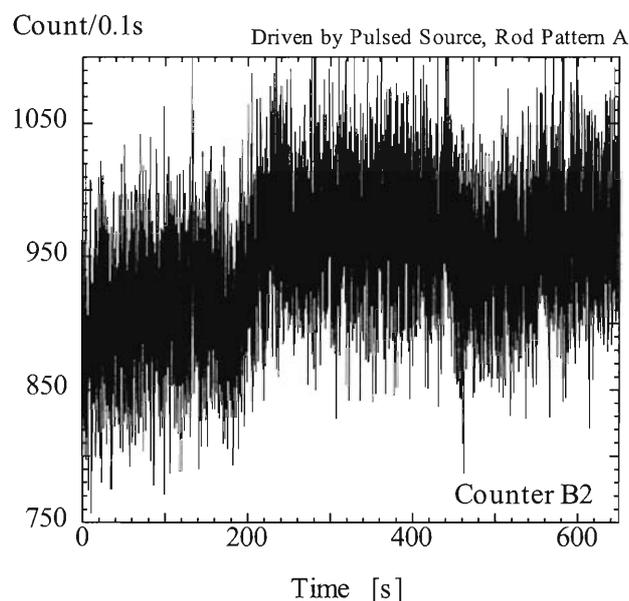


Figure 2. Instability of a pulsed neutron source

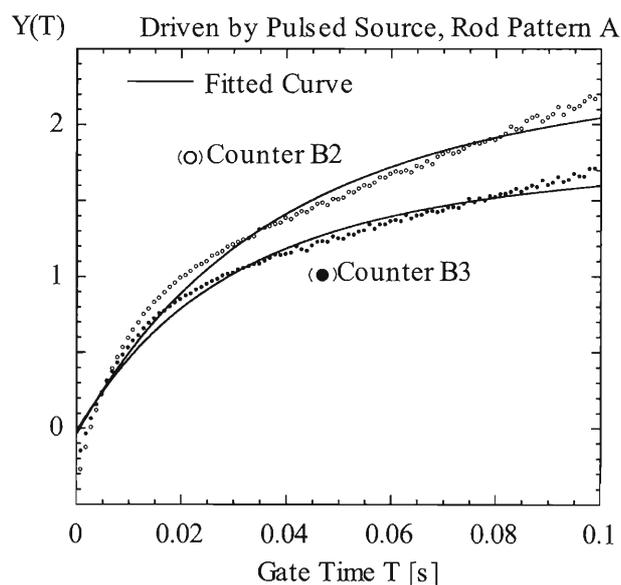


Figure 3. Y measured under an unstable source

や遅発中性子効果による長い時間スケールの変動による分散の発散を低減させるために導入された手法である。しかし、この階差フィルターの適用は、最小自乗フィットする理論式をさらに複雑化させるので、未臨界度監視法の安定性の観点から懸念が残る。ファイマン- α 解析では、Y データに理論式を非線形最小自乗フィットすることにより即発中性子減衰定数を推定する。従って、フィット対象の理論式が複雑化すると、初期値によっては収束解が得られないケースが発生する。

3. パワースペクトル法に関する研究

まず、定常中性子源に対する通常のパワースペクトル法について概説する。零出力1点炉を仮定すると、定常中性子源、つまりポアソン中性子源により駆動された未臨界体系に設置された中性子検出器 A の信号のオート(自己)パワースペクトル密度は、次式のように表現される。

$$\Phi_{AA}(\omega) = \frac{\varepsilon_A^2 (\sum_f \nu)^3 n_0 \langle \nu(\nu-1) \rangle}{\alpha^2 + \omega^2} + \varepsilon_A \sum_f \nu n_0 + 2\pi \varepsilon_A^2 (\sum_f \nu)^2 n_0^2 \delta(\omega). \quad (9)$$

これに対して、中性子検出器 A と B の信号間のクロス(相互)パワースペクトル密度は、次式のように表現される。

$$\Phi_{AB}(\omega) = \frac{\varepsilon_A \varepsilon_B (\sum_f \nu)^3 n_0 \langle \nu(\nu-1) \rangle}{\alpha^2 + \omega^2} + 2\pi \varepsilon_A \varepsilon_B (\sum_f \nu)^2 n_0^2 \delta(\omega) \quad (10)$$

(9) 式と(10)式の右辺第1項は、核分裂中性子の Multiplicity による相関項であり、同一家系に属する中性子が有する相関を表す。共通の祖先となる核分裂反応はポアソン統計に従うので、見かけ上、白色入力に対する未臨界体系(α を折れ点角周波数とする一次遅れ系)の出力の表現になっている。(9) 式の第2項は非相関項であり、(10)式には現れな

い。オートパワースペクトル密度にのみ現れるこの項は、検出器雑音(Chamber noise)項とも呼ばれる。相関項の周波数特性がこの白色項に埋もれる場合は、オートパワースペクトル密度から即発中性子減衰定数を推定することが困難となる。このため、炉物理分野におけるパワースペクトル解析では、クロスパワースペクトル密度が解析対象とされる[23]。(9) 式と(10)式の右辺最終項は、中性子源からの中性子の一定(直流)入力に対応する項であり、通常、高速フーリエ変換で除去されるこの直流項は無視して良い。ウィリアムズのテキスト[10]では、これらのパワースペクトル密度は確率母関数を用いて検出確率の釣り合いの式を解くことにより得ている。ただし、初学者や炉物理以外の専門家には難解な場合が多いので、APPENDIX に現象論的な導出を示しておく。

パワースペクトル法を ADS に適用するための研究として、インドの Degweker[24,19]らはパルス核破砕中性子源に対するオート及びクロスパワースペクトル密度を定式化している。彼らの論文は、これらパワースペクトル密度のみならず、ファイマン- α 法、ロッシ- α 法、相関関数法の定式を統一的に導いており、ADS 体系に対する炉雑音解析の理論研究の決定版と見なすことができる。彼らの理論研究は、パワースペクトル密度が通常の前項に加えてパルス繰り返し周波数の整数倍の周波数点にデルタ関数ピークが現れることを示している。

パワースペクトル解析に対する実験的研究は、10年後の近畿大学と KUCA の共同研究まで待たねばならない。彼らのグループは、実効増倍率が 0.98~0.90 程度の広い範囲の未臨界体系において、パルス DT 中性子源を用いたパワースペクトル解析を実施した[25,26]。パルス DT 中性子源に対して導出したオート及びクロスパワースペクトル密度は、以下に示すように、パルス繰り返し周波数の整数倍の周波数点 ω_m 上にデルタ関数ピークが

現れる。この項が、定常中性子源に対する定式(9),(10)式と大きく異なる点であり、相関項は同じ一次遅れ系の関数形である。

$$\Phi_{AA}(\omega) = \varepsilon_A^2 \lambda_f^3 \frac{S_0 \langle \nu(\nu-1) \rangle}{\alpha T_R (\alpha^2 + \omega^2)} + \varepsilon_A \lambda_f \frac{S_0}{\alpha T_R} + 2\pi \varepsilon_A^2 \lambda_f^2 \frac{S_0^2}{T_R^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\omega - \omega_m)}{\alpha^2 + \omega_m^2}, \quad (11)$$

$$\Phi_{AB}(\omega) = \varepsilon_A \varepsilon_B \lambda_f^3 \frac{S_0 \langle \nu(\nu-1) \rangle}{\alpha T_R (\alpha^2 + \omega^2)} + 2\pi \varepsilon_A \varepsilon_B \lambda_f^2 \frac{S_0^2}{T_R^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\omega - \omega_m)}{\alpha^2 + \omega_m^2}, \quad (12)$$

$$\omega_m = \frac{2\pi m}{T_R}, \quad T_R : \text{period}[s]. \quad (13)$$

Figure 4 に、比較的浅い未臨界体系におけるクロスパワースペクトル密度測定結果を示す。浅い未臨界体系では、デルタ関数状のピークに加えて、相関成分が明瞭に観察される。従って、相関成分とピーク頂点に対してそれぞれ一次遅れ系の関数形を最小自乗フィットすることにより即発中性子減衰定数を決定することができた。

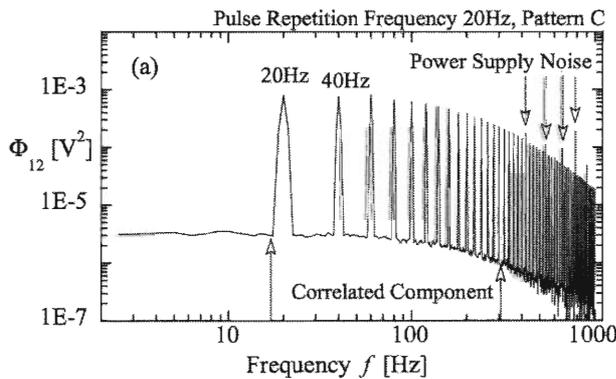


Figure 4. Cross-power spectral density measured at a slightly subcritical state.

Figure 5 に、非常に深い未臨界体系(実効増倍率 0.90 程度)において測定したクロスパワースペクトル密度を示す。相関成分はもはや観察されず、相関成分からの即発中性子減衰定数の推定は不可能である。これに対して、ピーク成分は明瞭

に観察され、これらピーク頂点に対して一次遅れ系の関数形を最小自乗フィットすることにより即発中性子減衰定数を得ることができた。従来の炉雑音解析は相関成分を解析対象としている。ADS は、このように相関成分が測定できない未臨界状態も運転範囲としている。ADS の炉雑音解析は、相関成分ではなく、非相関ピーク成分を解析対象とすべきかも知れない。

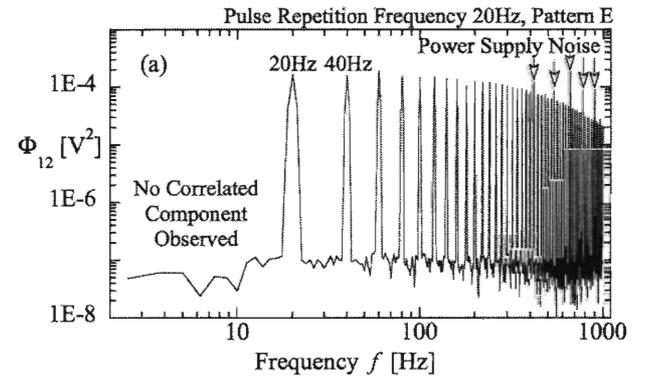


Figure 5. Cross-power spectral density measured at a deeply subcritical state.

近畿大学と KUCA のグループは、加速器ビーム電流計信号と中性子検出器信号のクロスパワースペクトル密度も測定している[27]。このスペクトル密度は複素数となり、この位相差は以下のように非常に簡単な式で表現される。この表現式は、最小自乗フィットを用いず、位相差から即発中性子減衰定数を算術的に求めうる可能性を示している。

$$\angle \Phi_{iC}(\omega) = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\alpha_0} \right) \delta(\omega - \omega_m). \quad (14)$$

実際に、Figure 6 に示す位相差の測定データから即発中性子減衰定数が推定された。低い周波数域の ω_m 上では、パルス中性子法で得た値と一致したが、高周波数域では著しく過小評価した。この過小評価は、ターゲットから燃料領域までの中性子到達時間を考慮することにより解消された。この結果は、近く論文として公表される予定である。

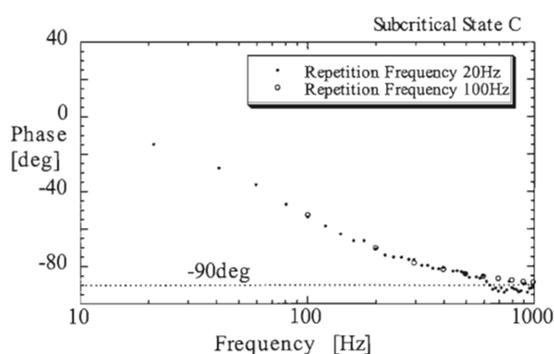


Figure 6. Phase shift of cross-power spectral density between beam current and neutron detection.

4. ADS における炉雑音解析の課題

まず、ファイマン- α 法を ADS に適用する場合の問題点として、以下のような項目を挙げることができる。非常に多くの研究者が取り組んでいるにもかかわらず、多くの課題が残されている。

- (1)最小自乗フィットが必須である。
- (2)フィットする関数が非常に複雑である。
- (3)加速器中性子源の不安定性の影響を受けやすい。
- (4)高次モードの影響が検討されていない。
- (5)相関成分が観察できないような深い未臨界体系に対して、現状では適用できない。

これに対して、パワースペクトル法では以上の問題点は解決の見通しが付いている。つまり、最小自乗フィットする関数は、一次遅れの伝達関数形である。また、ビーム電流計信号と中性子検出器信号の位相差を利用すれば、最小自乗フィット自体も不要となる可能性がある。加速器運転の不安定性は、1Hz 以下の低周波数領域に影響するが、パワースペクトル解析では影響を受けない 1Hz 以上の周波数領域を解析対象とする。また、高次モードの影響は既に検討されている。ただし、これらの状況を以て、「ファイマン- α 法は ADS に適用不可能である。」と主張しているわけ

ではない。むしろ、実際の適用を考慮して、理論と実験の両面から研究を進めて行く必要がある。ファイマン- α 法は、学術的にも非常に興味深い研究対象を秘めている。炉雑音共通の将来の課題は、言うまでもなく、零出力から高出力への理論的拡張である。この研究課題は、熱的フィードバックも含めて、炉物理研究者に大いなる興味を抱かせる。

ADS の炉雑音解析はペリオド一定のパルス中性子源を対象とするので、パワースペクトル法の優越は自明かも知れない。むしろ、問題点は、「パワースペクトル法は制御屋が扱う手法、炉物理屋は時間領域のファイマン- α 法」的な意識ではないか。物理屋は、真実に迫るためには、何事にも手段に好みを持ってはならない。

References

- [1] Pyeon C H, Hirano Y, Misawa T, Unesaki H, Ichihara C, Iwasaki T, Shiroya S. [Preliminary experiments on accelerator-driven subcritical reactor with pulsed neutron generator in Kyoto University Critical Assembly]. *J. Nucl. Sci. Technol.* 2007; 44: 1368-1378.
- [2] Aliberti J F, D'Angelo A, Billebaud A, *et al.* [Global results from deterministic and stochastic analysis of the MUSE-4 experiments on the neutronics of the accelerator-driven systems]. *Nucl. Sci. Eng.* 2008; 158: 49-67.
- [3] Soule R, Assal W, Chaussonnet P, *et al.* [Neutronic studies in support of accelerator-driven systems: The MUSE experiments in the MASURCA facility]. *Nucl. Sci. Eng.* 2004; 148: 124-152.
- [4] Tsujimoto K, Oigawa H, Ouchi N, Kikuchi K, Kurata Y, Mizumoto M, Sasa T, Saito S, Nishihara K, Umeno M, Tazawa Y. [Research and development program on accelerator driven

- subcritical system in JAEA]. J. Nucl. Sci. Technol. 2007; 44: 483-490.
- [5] Abderrahim H A, D'hondt P. [MYRRHA: A European experimental ADS for R&D applications]. J. Nucl. Sci. Technol. 2007; 44: 491-498.
- [6] Warin D. [Status of the French research program on partitioning and transmutation]. J. Nucl. Sci. Technol. 2007; 44: 410-414.
- [7] Mishima K, Unesaki H, Misawa T, Tanigaki M, Mori Y, Shiroya S, Inoue M, Ishi Y, Fukumoto S. [Research project on accelerator-driven subcritical system using FFAG accelerator and Kyoto University Critical Assembly]. J. Nucl. Sci. Technol. 2007; 44: 499-503.
- [8] Sasa T, Oigawa H, Tsujimoto K, Nishihara K, *et al.* [Research and development on accelerator-driven transmutation system at JAERI]. Nucl. Eng. Design. 2004; 230: 209-222.
- [9] Feynman R P, de Hoffmann P F, Serber R. [Dispersion of the neutron emission in U-235 fission]. J. Nucl. Energy. 1956; 3: 64-69.
- [10] M.M.R.Williams著, 斎藤, 西原, 大塚訳, [原子炉の確率過程], みすず書房, 1978.
- [11] Pa'zsit I, Yamane Y. [Theory of neutron fluctuations in source-driven subcritical systems]. Nucl. Instr. Meth. in Phys. Res. 1998; A403: 431-441.
- [12] Pa'zsit I, Yamane Y. [The variance-to-mean ratio in subcritical systems driven by a spallation source]. Ann. Nucl. Energy. 1998; 25: 667-676.
- [13] Pa'zsit I, Yamane Y. [The backward theory of Feynman- and Rossi-alpha methods with multiple emission sources]. Nucl. Sci. Eng. 1999; 133: 269-281.
- [14] M. Ceder M, Pa'zsit I. [Analytical solution for the Feynman-alpha formula for ADS with pulsed neutron sources]. Progress in Nucl. Energy. 2003; 43: (2003), 429-436.
- [15] Kitamura Y, Yamauchi H, Yamane Y. [Derivation of variance-to-mean formula for periodic and pulsed neutron source]. Ann. Nucl. Energy. 2003; 30: 897-909.
- [16] Pa'zsit I, Ceder M, Kuang Z. [Theory and analysis of the Feynman-alpha method for deterministically and randomly pulsed neutron sources]. Nucl. Sci. Eng. 2004; 148: 67-78.
- [17] Pa'zsit I, Kitamura Y, Wright J, Misawa T. [Calculation of the pulsed Feynman-alpha formulae and their experimental varification]. Ann. Nucl. Energy. 2005; 32: 986-1007.
- [18] Kitamura Y, Yamauchi H, Yamane Y, Misawa T, Ichihara C, Nakamura H. [Experimental investigation of variance-to-mean formula for periodic and pulsed neutron source]. Ann. Nucl. Energy 2004; 31: 163-172.
- [19] Degweker S B, Rana Y S. [Reactor noise in accelerator driven systems-II]. Ann. Nucl. Energy. 2007; 34: 463-482.
- [20] Taninaka H, Miyoshi A, Hashimoto K, Pyeon C H, Sano T, Misawa T, Sugiyama W, Ohsawa T. [Feynman- α analysis for a thermal subcritical system driven by an unstable 14MeV neutron source]. J. Nucl. Sci. Technol. 2011; 48: 1272-1280.
- [21] Hashimoto K, Ohsaki H, Horiguchi T, Yamane Y, Shiroya S. [Variance-to-mean method generakized by linear difference filter method]. Ann. Nucl. Energy 1998; 25: 639-652.
- [22] Hashimoto K, Mouri T, Ohtani N. [Reduction of delayed-neutron contribution to variance-to-mean ratio by application of difference filter technique]. J. Nucl. Sci.

Technol. 1999; 36: 555-559.

[23] Nomura T. [Improvement in S/N ratio of reactor noise spectral density]. J. Nucl. Sci. Technol. 1965; 2: 76-77.

[24] Degweker S B. [Reactor noise in accelerator driven systems]. Ann. Nucl. Energy. 2003; 30: 223-243.

[25] Sakon A, Hashimoto K, Sugiyama W, Pyeon C H, Sano T, Misawa T, Unesaki H, Ohsawa T. [Power spectral analysis for a thermal subcritical reactor system driven by a pulsed 14MeV neutron source]. J. Nucl. Sci. Technol. 2013; 50: 481-492.

[26] Sakon A, Hashimoto K, Maarof M A, Kawasaki M, Sugiyama W, Pyeon C H, Sano T, Yagi T, Ohsawa T. [Measurement of large negative reactivity of an accelerator-driven system in the Kyoto University Critical Assembly]. J. Nucl. Sci. Technol. 2014; 51:116-126.

[27] Sakon A, Hashimoto K, Pyeon C H. [Cross-power spectral analysis between beam current and neutron detection signals for a thermal accelerator-driven system]. Trans. Am. Nucl. Soc., 2012; 107:1032-1034.

APPENDIX 定常中性子源駆動下のパワースペクトル密度の導出

A. 1. 自己相関関数(Auto Correlation Function)

時刻 $t_1 \sim t_1 + dt_1$ および $t_2 \sim t_2 + dt_2$ 内の中性子検出数をそれぞれ $R(t_1)$ および $R(t_2)$ とし、これら検出数の自己相関関数 $\phi(t_1, t_2)$ を次のように定義する。

$$\phi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \langle R(t_1) R(t_2) \rangle \quad (\text{A.1})$$

ただし、ブラケット $\langle \rangle$ は 1 次モーメント (平均) の演算子である。共通の祖先(Common Ancestor)を有する同じ家系に属する任意の 2 個の中性子がそれぞれ時刻 $t_1 \sim t_1 + dt_1$ および $t_2 \sim t_2 + dt_2$ 内に検出さ

れた場合、この 2 個の検出は相関を持つ。従って、相関関数を相関成分 $\phi_C(t_1, t_2)$ (Correlated Component) と非相関成分 $\phi_{UNC}(t_1, t_2)$ (Uncorrelated Component) の和により表現する。

$$\phi(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \phi_C(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \phi_{UNC}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (\text{A.2})$$

時刻 t_0 において核分裂により ν 個の中性子が放出され、この子孫が時刻 $t_1 \sim t_1 + dt_1$ 内に検出される個数は、

$$\varepsilon(\Sigma_f \nu) \nu g(t_1 - t_0) dt_1 \quad (\text{A.3})$$

と表現される。また、この ν 個の核分裂中性子の内の残り $\nu - 1$ 個の子孫が時刻 $t_2 \sim t_2 + dt_2$ 内に検出される個数は、

$$\varepsilon(\Sigma_f \nu) (\nu - 1) g(t_2 - t_0) dt_2 \quad (\text{A.4})$$

と書ける。ただし、 $g(t_1 - t_0)$ は、時刻 t_0 に炉心に投入された中性子とその子孫が時刻 t_1 まで生き残る確率を表す。この確率は、原子炉の伝達関数に他ならない。 ε は中性子検出器の (核分裂率に対する) 検出効率である。時刻 t_0 における炉心全体の中性子数を $n(t_0)$ とすると、同時刻の炉心全体の核分裂率は $(\Sigma_f \nu) n(t_0)$ となるので、(A.2) 式右辺第 1 項の相関成分は次式により表現される。

$$\phi_C(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \langle \int_{-\infty}^{t_1} dt_0 dt_1 dt_2 \varepsilon^2 (\Sigma_f \nu)^3 n(t_0) \nu (\nu - 1) g(t_1 - t_0) g(t_2 - t_0) \rangle \quad (\text{A.5})$$

時刻 t' の中性子源強度を $S(t')$ とすると、(A.5) 式中の $n(t_0)$ は次のように表現することができる。

$$n(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} S(t') g(t_0 - t') dt' \quad (\text{A.6})$$

また、(A.2) 式右辺第 2 項の非相関成分も次のように表現することができる。

$$\phi_{UNC}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \langle R_{UNC}(t_1) R_{UNC}(t_2) \rangle [1 - \delta(t_2 - t_1)] + \langle R_{UNC}^2(t_1) \rangle \delta(t_2 - t_1) \quad (\text{A.7})$$

ただし、 $R_{UNC}(t)$ は相関成分の検出を除いた中性子検出数である。

A. 2. 相関成分の表現

定常中性子源の強度を S_0 とすると、(A.6)式の $n(t_0)$ も以下のように一定値となる。

$$\begin{aligned} n(t_0) &= \int_{-\infty}^{t_0} S_0 g(t_0 - t') dt' = S_0 \int_{-\infty}^{t_0} g(t_0 - t') dt' \\ &= S_0 \int_0^{\infty} g(\tau) d\tau = n_0 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

(A.5)式に(A.8)式を代入すると、

$$\begin{aligned} \phi_C(t_1, t_2) &= \varepsilon^2 (\Sigma_f v)^3 n_0 \\ &< v(v-1) \int_{-\infty}^{t_1} g(t_1 - t_0) g(t_2 - t_0) dt_0 > \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

が得られる。 $\tau = t_2 - t_1$, $t = t_1 - t_0$ とおくと、自己相関関数の相関成分の表現が得られる。

$$\begin{aligned} \phi_C(t_1, t_1 + \tau) &= \varepsilon^2 (\Sigma_f v)^3 n_0 \\ &< v(v-1) > \int_0^{\infty} g(t) g(t + \tau) dt \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

相関関数は時刻 t_1 , t_2 の関数であるが、定常過程ではその差 $\tau = t_2 - t_1$ のみの関数となるので、以下のように書く。

$$\phi_C(\tau) = \varepsilon^2 (\Sigma_f v)^3 n_0 < v(v-1) > \int_0^{\infty} g(t) g(t + \tau) dt \quad (\text{A.11})$$

A. 3. 非相関成分の表現

次に、非相関成分の表現を導出する。非相関成分のゆらぎ成分は平均操作をすると零となるので、(A.7)式の第1項平均値成分のみが残る。つまり、

$$\begin{aligned} &< R_{UNC}(t_1) R_{UNC}(t_2) > [1 - \delta(t_2 - t_1)] \\ &= < R_{UNC}(t_1) > < R_{UNC}(t_2) > [1 - \delta(t_2 - t_1)] \\ &= \varepsilon^2 (\Sigma_f v)^2 n_0^2 dt_1 dt_2 [1 - \delta(t_2 - t_1)] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

となる。一方、ポアソン分布に従うとすると、非相関の検出数の分散は平均に等しいので、(A.7)式

の第2項は以下のようになる。

$$\begin{aligned} &< R_{UNC}^2(t_1) > \delta(t_2 - t_1) \\ &= [< (R_{UNC}(t_1) - < R_{UNC}(t_1) >)^2 > \\ &\quad + < R_{UNC}(t_1) >^2] \delta(t_2 - t_1) \\ &= [< R_{UNC}(t_1) > + < R_{UNC}(t_1) >^2] \delta(t_2 - t_1) \\ &= \varepsilon (\Sigma_f v) n_0 dt_1 \delta(t_2 - t_1) \\ &\quad + \varepsilon^2 (\Sigma_f v)^2 n_0^2 dt_1 dt_2 \delta(t_2 - t_1) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

(A.12),(A.13)式を(A.7)式に代入すると、自己相関関数の非相関成分は次のように表される。

$$\begin{aligned} \phi_{UNC}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 &= \varepsilon^2 (\Sigma_f v)^2 n_0^2 dt_1 dt_2 \\ &\quad + \varepsilon (\Sigma_f v) n_0 dt_1 \delta(t_2 - t_1) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$\tau = t_2 - t_1$ とおくと、自己相関関数の非相関成分の表現が得られる。

$$\begin{aligned} \phi_{UNC}(t_1, t_1 + \tau) &= \phi_{UNC}(\tau) \\ &= \varepsilon^2 (\Sigma_f v)^2 n_0^2 + \varepsilon \Sigma_f v n_0 \delta(\tau) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

A. 4. 周波数伝達関数

遅発中性子を無視した1点炉動特性を採用すると、伝達関数 $g(t)$ は次式により表現される。

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} g(t) + \delta(t) = -\alpha g(t) + \delta(t) \quad (\text{A.16})$$

ただし、

$$\alpha = \frac{\beta - \rho}{\Lambda} \quad (\text{A.17})$$

(A.16)式をラプラス変換すると、

$$G(s) = \frac{1}{s + \alpha} \quad (\text{A.18})$$

となる。よって、周波数伝達関数は、

$$G(j\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{\alpha - j\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (\text{A.19})$$

と書ける。

A.5. オートパワースペクトル密度

(Auto-Power Spectral Density)の表現

(A.11),(A.15)式を(A.2)式に代入すると、最終的な自己相関関数の表現が得られる。

$$\begin{aligned}\phi(\tau) &= \phi_C(\tau) + \phi_{UNC}(\tau) \\ &= \varepsilon^2(\Sigma_f v)^3 n_0 \langle v(v-1) \rangle \int_0^\infty g(t)g(t+\tau)dt \\ &\quad + \varepsilon^2(\Sigma_f v)^2 n_0^2 + \varepsilon \Sigma_f v n_0 \delta(\tau)\end{aligned}\quad (A.20)$$

ここで、 $t' = -t$ とおくと、

$$\int_0^\infty g(t)g(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^0 g(-t')g(\tau-t')dt' \quad (A.21)$$

となる。さらに、

$$f(t') = g(-t') \quad (A.22)$$

とおくと、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty g(t)g(t+\tau)dt &= \int_{-\infty}^0 g(-t')g(\tau-t')dt' \\ &= \int_{-\infty}^0 f(t')g(\tau-t')dt'\end{aligned}\quad (A.23)$$

となる。よって、(A.20)式を t についてフーリエ変換すると、たたみ込みの定理から、パワースペクトル密度の表現が得られる。

$$\begin{aligned}\Phi(\omega) &\equiv \int_{-\infty}^\infty \phi(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau \\ &= \varepsilon^2(\Sigma_f v)^3 n_0 \langle v(v-1) \rangle F(j\omega)G(j\omega) \\ &\quad + \varepsilon \Sigma_f v n_0 + 2\pi\varepsilon^2(\Sigma_f v)^2 n_0^2 \delta(\omega)\end{aligned}\quad (A.24)$$

ただし、 $G(j\omega)$ は未臨界炉心の周波数伝達関数である。また、(A.18)式より、

$$\begin{aligned}F(j\omega) &= \int_{-\infty}^\infty f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^\infty g(-t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty g(t'')e^{j\omega t''} dt'' = G(-j\omega)\end{aligned}\quad (A.25)$$

となるので、(A.24)式は最終的には次式のように表

現される。

$$\begin{aligned}\Phi(\omega) &= \varepsilon^2(\Sigma_f v)^3 n_0 \langle v(v-1) \rangle G(-j\omega)G(j\omega) \\ &\quad + \varepsilon \Sigma_f v n_0 + 2\pi\varepsilon^2(\Sigma_f v)^2 n_0^2 \delta(\omega)\end{aligned}\quad (A.26)$$

(A.19)式を(A.26)式に代入すると、定常中性子源駆動下のオートパワースペクトル密度は次のように表現することができる。

$$\begin{aligned}\Phi(\omega) &= \frac{\varepsilon^2(\Sigma_f v)^3 n_0 \langle v(v-1) \rangle}{\alpha^2 + \omega^2} \\ &\quad + \varepsilon \Sigma_f v n_0 + 2\pi\varepsilon^2(\Sigma_f v)^2 n_0^2 \delta(\omega)\end{aligned}\quad (A.27)$$

A.6. クロスパワースペクトル密度

(Cross-Power Spectral Density)の表現

2本の中性子検出器信号間のクロスパワースペクトル密度を導く。1本の中性子検出器信号の自己相関関数と2本の中性子検出器信号間の相互相関関数との違いは、非相関成分にのみ現れる。つまり、相互相関関数の非相関成分は次のように表現することができる。

$$\phi_{UNC}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \langle R_{UNC,A}(t_1) R_{UNC,B}(t_2) \rangle \quad (A.28)$$

ただし、 $R_{UNC,A}(t)$, $R_{UNC,B}(t)$ は、それぞれ相関成分の検出を除いた中性子検出器AとBの中性子検出数である。A.3.節と同様の導出により、中性子検出器A, B信号間の相互相関関数の非相関成分の表現が以下のように得られる。

$$\begin{aligned}\phi_{UNC}(\tau) &= \langle R_{UNC,A}(t_1) \rangle \langle R_{UNC,B}(t_2) \rangle \\ &= \varepsilon_A \varepsilon_B (\Sigma_f v)^2 n_0^2\end{aligned}\quad (A.29)$$

ただし、 $\varepsilon_A, \varepsilon_B$ は、それぞれ中性子検出器AとBの検出効率である。また、相互相関関数の相関成分は、A.2.節と同様の導出により、

$$\phi_C(\tau) = \varepsilon_A \varepsilon_B (\Sigma_f v)^3 n_0 \langle v(v-1) \rangle \int_0^\infty g(t)g(t+\tau)dt \quad (A.30)$$

と書ける。よって、相互相関関数は、

$$\begin{aligned}\phi(\tau) &= \phi_C(\tau) + \phi_{UNC}(\tau) \\ &= \varepsilon_A \varepsilon_B (\Sigma_f v)^3 n_0 \langle v(v-1) \rangle \int_0^\infty g(t)g(t+\tau)dt \\ &\quad + \varepsilon_A \varepsilon_B (\Sigma_f v)^2 n_0^2\end{aligned}\tag{A.31}$$

と表現できる。上式をフーリエ変換すると、中性子検出器信号間のクロスパワースペクトル密度の

表現が得られる。

$$\begin{aligned}\Phi(\omega) &= \frac{\varepsilon_A \varepsilon_B (\Sigma_f v)^3 n_0 \langle v(v-1) \rangle}{\alpha^2 + \omega^2} \\ &\quad + 2\pi \varepsilon_A \varepsilon_B (\Sigma_f v)^2 n_0^2 \delta(\omega)\end{aligned}\tag{A.32}$$