

地域経済動向を記述する常微分方程式の
数値シミュレーション

伊藤 昭夫*, 角谷 敦**, 白川 健***

Numerical Simulations of
Ordinary Differential Equations
Describing the Regional Economic Trends

Akio ITO*, Atsushi KADOYA** and Ken SHIRAKAWA***

1. 序

地域間の経済格差や経済政策による経済的な効果を調べることは非常に重要な問題である。特に、近年、市町村といった非常に小さい規模での地域経済の動向を予測することが必要不可欠な状況になってきている。そのような要請に対して、マンキュー、ローマー、ワイルは論文 [1]、我々は論文 [2] においてそれぞれ地域経済の動向を予測するためのモデルとして常微分方程式系を提案している。このモデルに従えば、過去のデータを利用して常微分方程式系における適当な定数を決定し、その定数をもとに考察の対象としている地域の未来の経済動向を数値シミュレーションすることが出来る。本報告では、このモデルの妥当性を検証するために実際に行った数値シミュレーションについて

* 近畿大学工学部電子情報工学科
Department of Electronic Engineering and Computer Science,
School of Engineering, Kinki University

** 広島修道大学経済科学部経済情報学科
Department of Economic Informatics,
Faculty of Economic Sciences, Hiroshima Shudo University

*** 東京電機大学情報環境学部情報環境デザイン学科
Department of Environment Integration and Design,
School of Information Environment, Tokyo Denki University

の結果を述べる。

2. 数理モデル

論文 [2] において提案された地域経済動向を記述する (非線形) 常微分方程式系 (RETM) := {(2.1)-(2.7)} (Regional Economic Trend Model) は次で与えられる。

$$\frac{d}{dt}d_1(t) - s_1p(t) + \delta_1d_1(t) = f_1(t) \quad \text{a.e. in } t \in (0, T), \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dt}d_2(t) - s_2p(t) + \delta_2d_2(t) = f_2(t) \quad \text{a.e. in } t \in (0, T), \quad (2.2)$$

$$\frac{d}{dt}l(t) - n_0l(t) \frac{d}{dt}(\log p(t)) = f_3(t) \quad \text{a.e. in } t \in (0, T), \quad (2.3)$$

$$d_1(0) = d_{01}, \quad (2.4)$$

$$d_2(0) = d_{02}, \quad (2.5)$$

$$l(0) = l_0, \quad (2.6)$$

$$p(0) = p_0. \quad (2.7)$$

ここで、未知関数 d_1 , d_2 , l , p はそれぞれ

d_1 : 社会資本密度 (関数),

d_2 : 民間資本密度 (関数),

l : 労働力密度 (関数),

p : 生産量密度 (関数)

を表し、与えられたデータ f_1 , f_2 , f_3 , d_{01} , d_{02} , l_0 , p_0 はそれぞれ

f_1 : 社会資本に対する政策 (公共事業など),

f_2 : 民間資本に対する政策 (民間による設備投資など),

f_3 : 労働力に対する政策 (労働者の派遣など),

d_{01} : 初期社会資本密度,

d_{02} : 初期民間資本密度,

l_0 : 初期労働力密度,

p_0 : 初期生産量密度

を表す。更に、 s_1 , s_2 , δ_1 , δ_2 , n_0 はすべて経済的な効果を表す正のパラメータである。

注意 2.1. (1) 経済動向を考察する際、重要な概念として「フロー」が存在する。[3] によれば、「フロー」とは「一定期間の間に生じる量」であり、その代表的な例として「GDP, 消費支出, 投資, 政府支出, 政府財政赤字, 経常収支, 資本収支, 総支出」を上げている。そこで、「フロー」とは「一定期間の間に取引される貨幣の総量」であると我々は解釈した。しかし、「フロー」を取り扱っていたのでは、我々が目指しているリアル・タイムでの経済動向のシミュレーションと経済予測は不可能であるという結論に達し、論文

[2]において「フロー」に代わる新しい概念として「密度関数」を導入した。簡単に説明すれば、我々が提案した「密度関数」とは「瞬間瞬間に流れる貨幣の量（実測不可能）」であり、「フロー」と「密度関数」との関係を述べると「フローは一定期間上の密度関数の積分（実測可能）で与えられる」である。厳密な定義は、論文 [1] に委ねるとする。

(2) 局所経済動向モデル (RETM) におけるそれぞれの常微分方程式が表現する経済的な

位置付けや正のパラメータ $s_1, s_2, \delta_1, \delta_2, n_0$ が表現する経済的な効果については論文 [2] に委ねることとする。

3. 数値シミュレーション結果

3.1. 外力項の取り扱い

経済活動の中には必ず経済政策が働いている。つまり、(RETM) における経済政策の効果（外力）を表すデータ f_1, f_2, f_3 は次の条件を一般には満たす。

$$\exists t_1 \in [0, T] \quad \text{s.t.} \quad f_1(t_1) \neq 0,$$

$$\exists t_2 \in [0, T] \quad \text{s.t.} \quad f_2(t_2) \neq 0,$$

$$\exists t_3 \in [0, T] \quad \text{s.t.} \quad f_3(t_3) \neq 0.$$

数学的に言い換えれば、(RETM) は非自励系である。

しかし、本報告では無政策（経済政策なし）、つまり、

$$f_1 \equiv 0, \quad f_2 \equiv 0, \quad f_3 \equiv 0 \quad \text{on } [0, T]$$

という条件のもとで数値シミュレーションを実行する。数学的には、自励系の微分方程式系を数値シミュレーション実施の対象とする。従って、数値シミュレーションの結果が実在するデータとは一致しないであろうことが容易に予想される。

にもかかわらず、我々が自励系の (RETM) を数値計算しようと考えた背景には、経済政策の働きは

(1) 生産量が増加傾向にあるときには、その増加率を加速させる。

(2) 生産量が減少傾向にある場合には、その減少率を減速させる。

であり、基本的には経済政策によって生産量を増加傾向から減少傾向へ、逆に、減少傾向から増加傾向へ変化させることは難しいのではないかと考えたからである。そこで、我々は生産量の増加傾向や減少傾向が自励形の (RETM) で再現できるのかどうかによって我々のモデルの妥当性についてまず検討することとした。

3.2. 初期データの取り扱い

生産量密度については、Cob-Douglas 型の生産関数を採用する。実際、初期値の段階で等号が成立する、つまり、等式

$$p_0 = cd_{01}^{\alpha} d_{02}^{\beta} l_0^{\gamma}$$

が成立するように定数 c を定め、

$$p(t) = cd_1(t)^\alpha d_2(t)^\beta l(t)^\gamma$$

と定義する。ここで、 α, β, γ はすべて正の定数で、条件 $\alpha + \beta + \gamma = 1$ を満たす。

フローは密度関数の積分なので、線形近似を考えれば、フローは密度の平均とみなすことができる。そこで、数値計算を実施する初年度の社会資本（フロー）・民間資本（フロー）・労働量・生産量の統計データ [4] の値を d_1, d_2, l, p の初期値 d_{01}, d_{02}, l_0, p_0 として採用する。

3.3. パラメーターの基本設定

パラメータは、次のように設定する。

$$n_0 = \frac{l_0}{p_0}, \delta_1 = 0.013, \delta_2 = 0.0438, s_1 = \frac{d_{01}}{p_0}, s_2 = \frac{d_{02}}{p_0} \quad (3.1)$$

とする。ただし、地域ごとの経済成長の傾向によって修正する必要があるため $n_0, \delta_1, \delta_2, s_1, s_2$ を何倍かしている。修正するためにそれぞれのパラメータを何倍したかをグラフの表題の部分に表示する。実際、 $n_0, \delta_1, \delta_2, s_1, s_2$ をそれぞれ a, b, c, d, e 倍したときには、 $a - b - c - d - e$ と表現する。

3.4. 数値シミュレーションの具体例

グラフの見方を説明する。

- (1) 1 番目のグラフは、1975 年を初年とする 10 年間の数値シミュレーション結果 (d_1, d_2, l, p) と実在の統計データ [4] の値（社会資本，民間資本，労働，生産）を表している。
- (2) 2 番目のグラフは、1975 年を初年とする 5 年間の数値シミュレーション結果と実在の統計データ [4] の値を表している。数値シミュレーション結果を表す。
- (3) 3 番目のグラフは、1980 年を初年とする 5 年間の数値シミュレーション結果と実在の統計データ [4] の値を表している。

また、数値シミュレーション結果における数値は、密度関数の値を特定の時間区間（1 年間）上で積分して得られたフローの値（民間資本・社会資本・労働量・生産量）を意味する。

計算結果 1 (札幌市)

図 1. 札幌 1-8-1-0.1-0.11

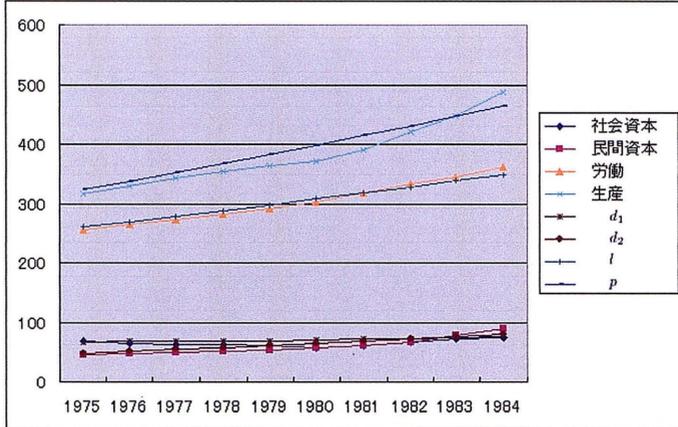


図 2. 札幌 1-10-1-0.1-0.1

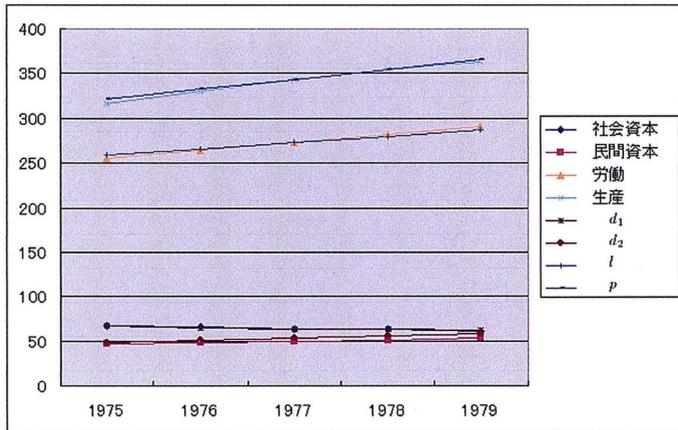
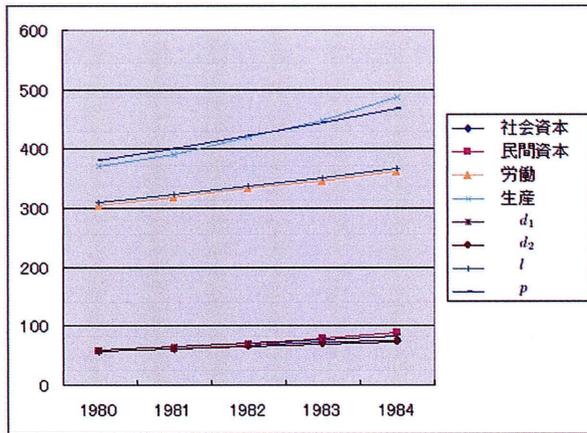


図3. 札幌 1-1-1-0.1-0.1



計算結果 2 (川崎市)

図 1. 川崎 1.3-5-1-0.1-0.1

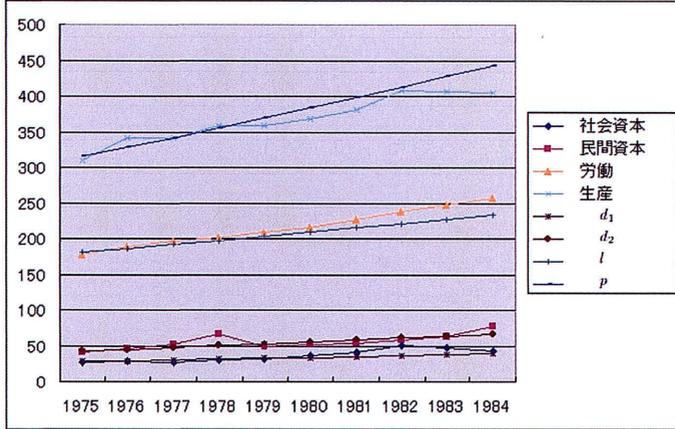


図 2. 川崎 1-5-1-0.1-0.1

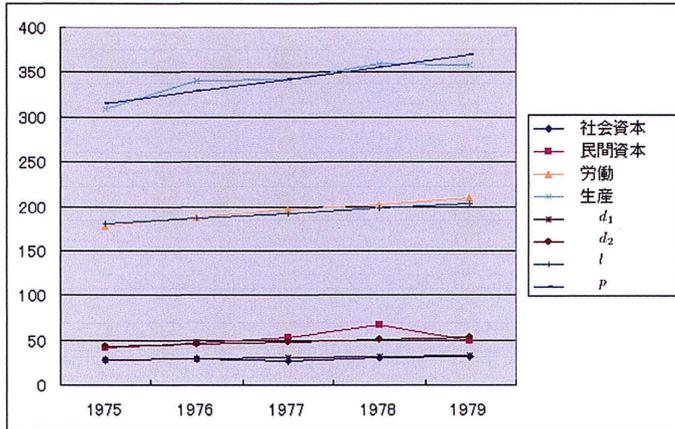


図3. 川崎 0.8 - 4 - 1 - 0.1 - 0.12

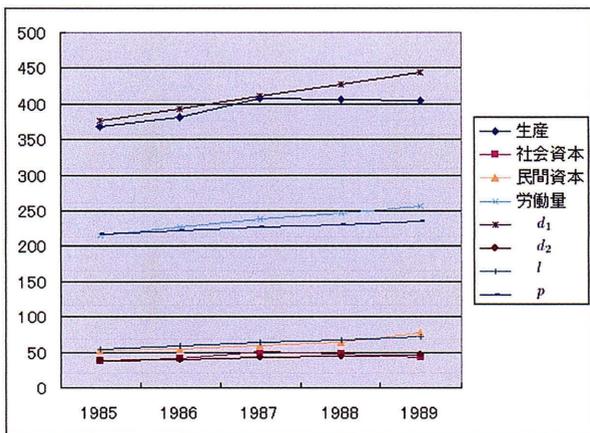
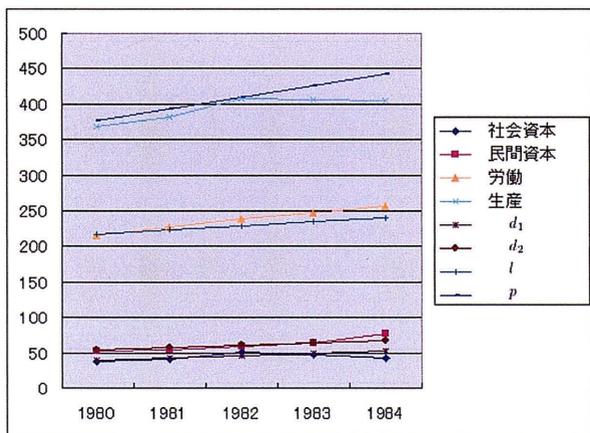


図4. 川崎 1 - 1 - 1 - 0.1 - 0.1



計算結果3 (横浜市)

図1. 横浜 1-5-1-0.1-0.1

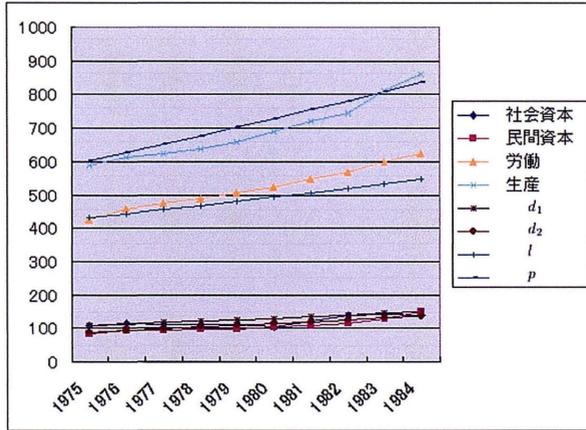


図2-1. 横浜 1-8-1.5-0.1-0.1

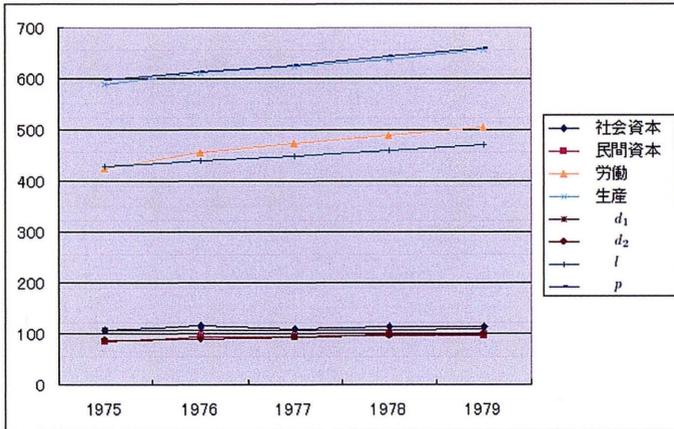


図2-2. 横浜 1-5-1-0.1-0.1

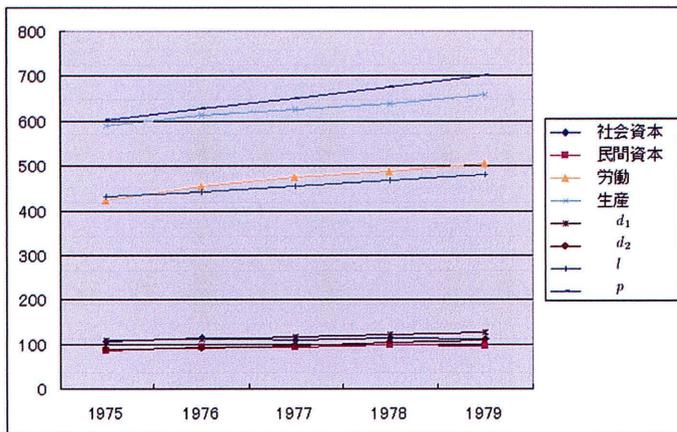


図3. 横浜 1-1-1-0.1-0.1

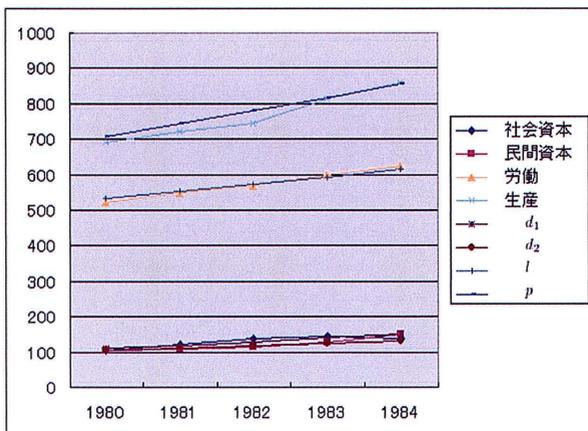


図1: 横浜02 1-1-1-0.1-0.1

計算結果 4 (名古屋市)

図 1. 名古屋 1.1 - 10 - 1 - 0.1 - 0.13

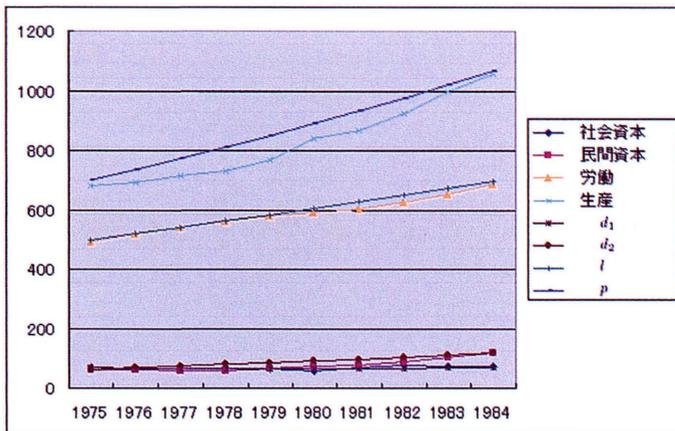


図 2. 名古屋 1 - 10 - 1 - 0.1 - 0.1

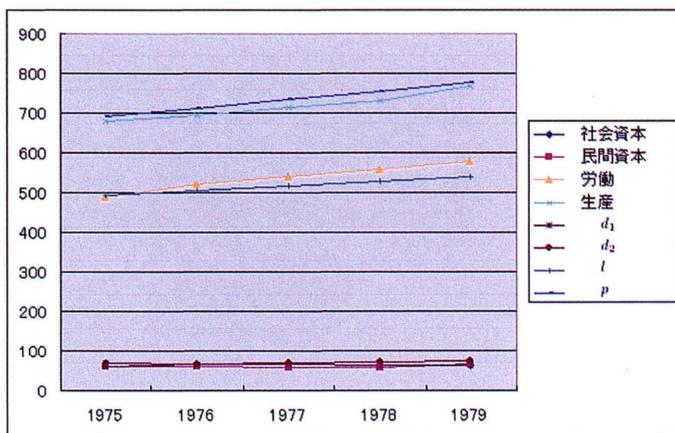
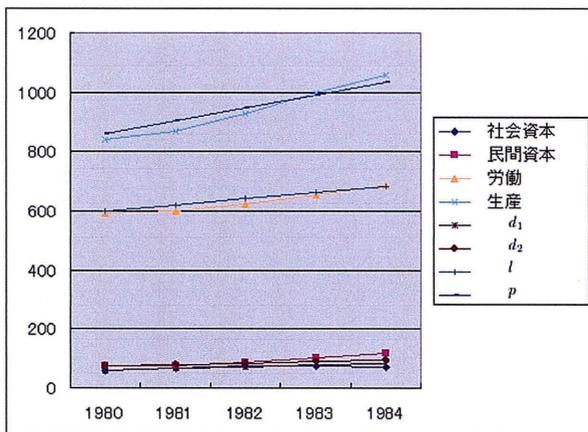


図3. 名古屋 1-1-1-0.1-0.1



計算結果5 (京都市)

図1. 京都 1-10-1-0.1-0.1

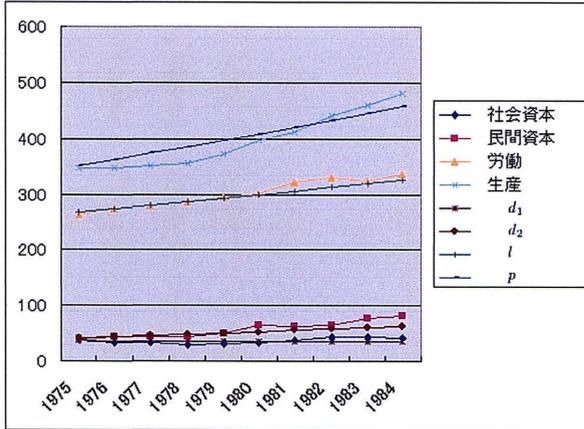


図2-1. 京都 0.8-13-1-0.1-0.1

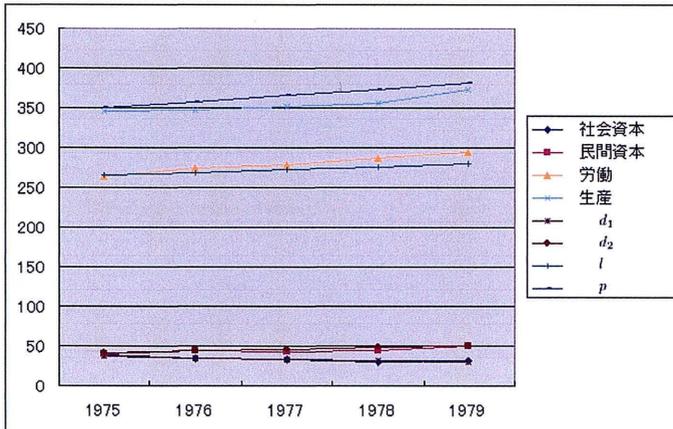


図 2-2. 京都 1-10-1-0.1-0.1

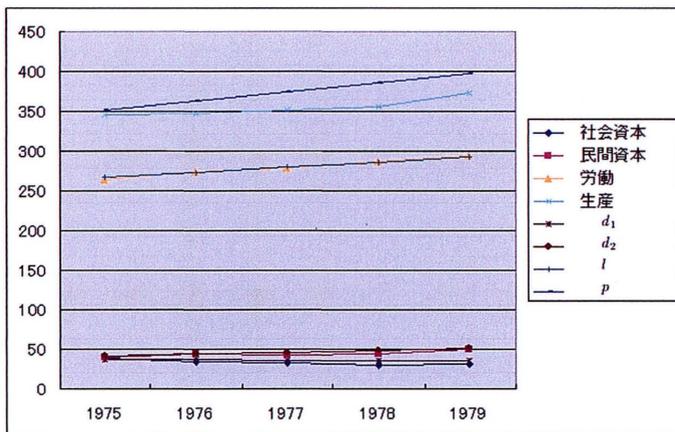
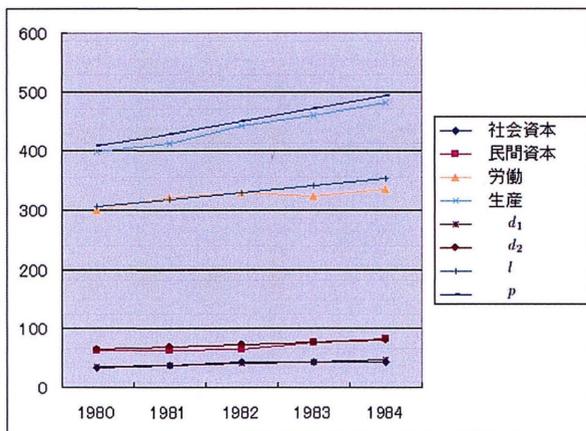


図 3. 京都 1-1-1-0.1-0.1



計算結果 6 (大阪市)

図 1. 大阪 1-6-1-0.1-0.13

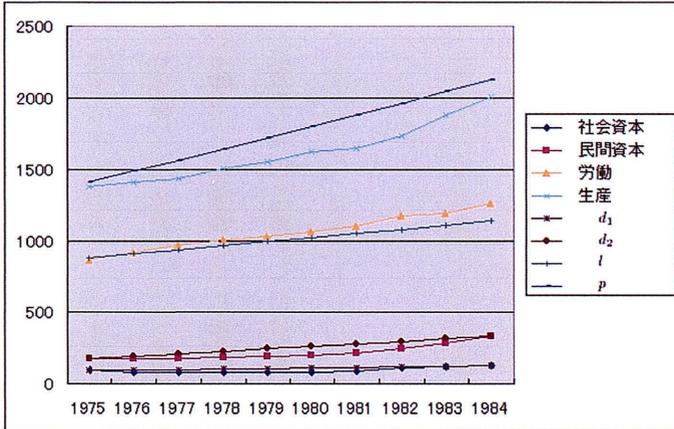


図 2. 大阪 1-10-1-0.1-0.1

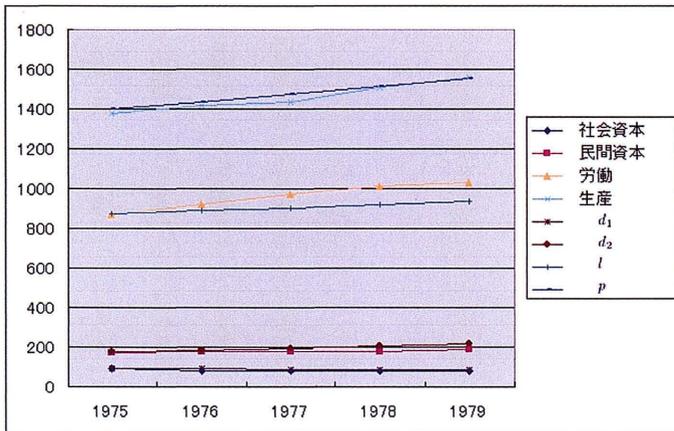
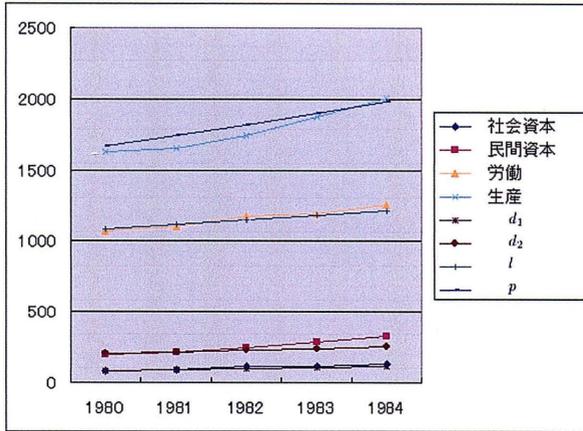


図3. 大阪 1 - 1 - 1 - 0.1 - 0.1



計算結果 7 (神戸市)

図 1. 神戸 1 - 10 - 2 - 0.1 - 0.1

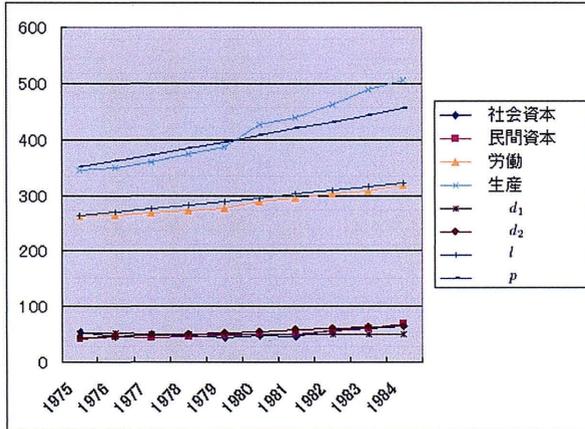


図 2. 神戸 1 - 10 - 1 - 0.1 - 0.1

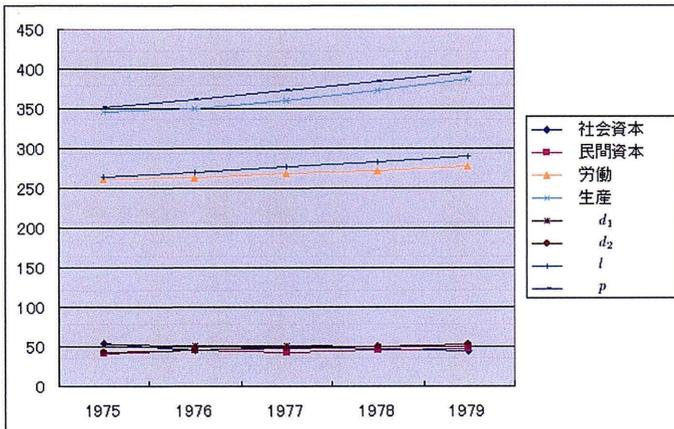
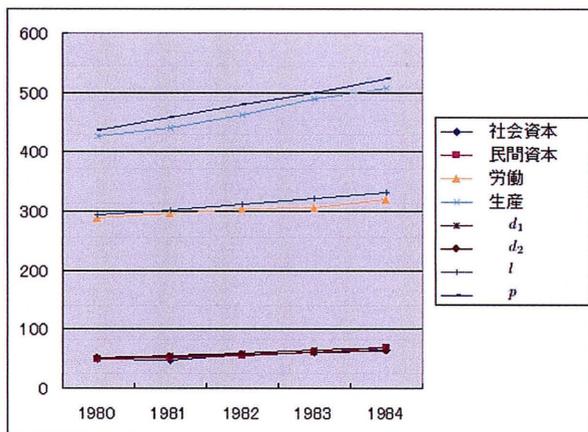


図3. 神戸 1 - 1 - 1 - 0.1 - 0.1



計算結果 8 (広島市)

図 1. 広島 1-6-1-0.1-0.1

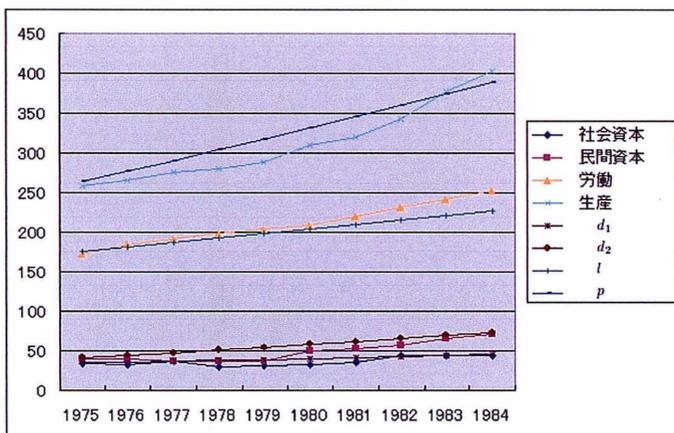


図 2. 広島 1.3-10-1.8-0.1-0.1

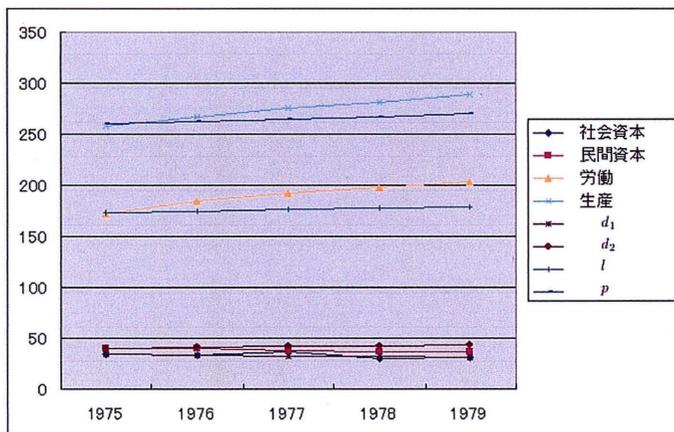
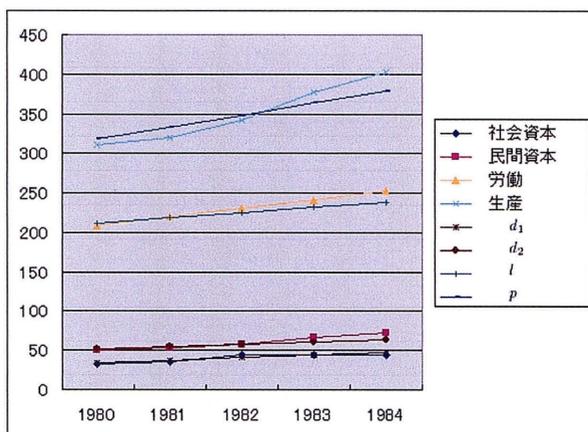


図3. 広島 1 - 1 - 1 - 0.1 - 0.1



計算結果 9 (北九州市)

図 1. 北九州 1 - 8 - 1.5 - 0.1 - 0.09

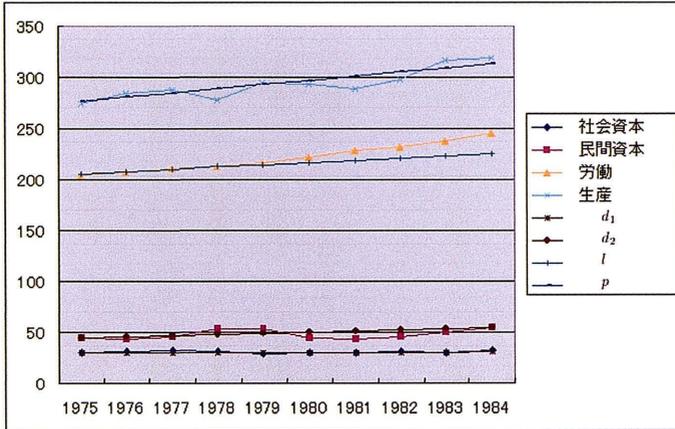


図 2. 北九州 1 - 10 - 1.5 - 0.1 - 0.1

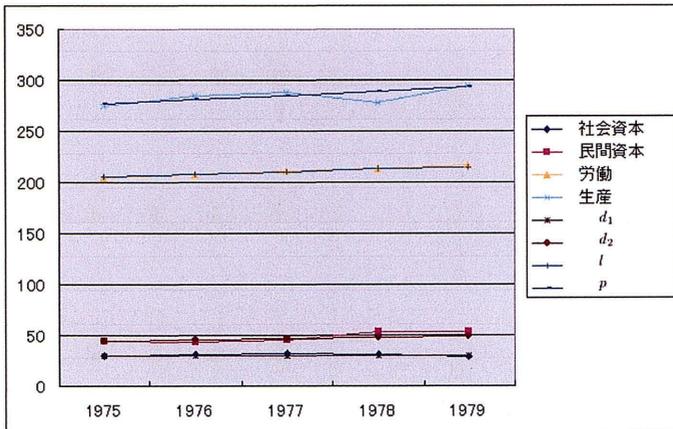
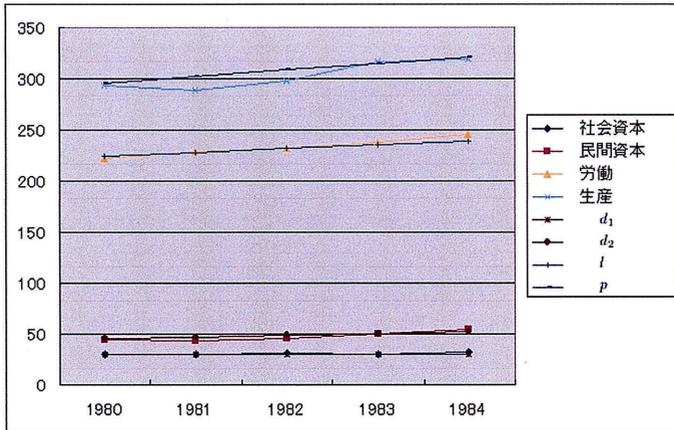


図3. 北九州 1-8-1.5-0.1-0.1



計算結果 10 (福岡市)

図 1. 福岡 1-8-1-0.1-0.13

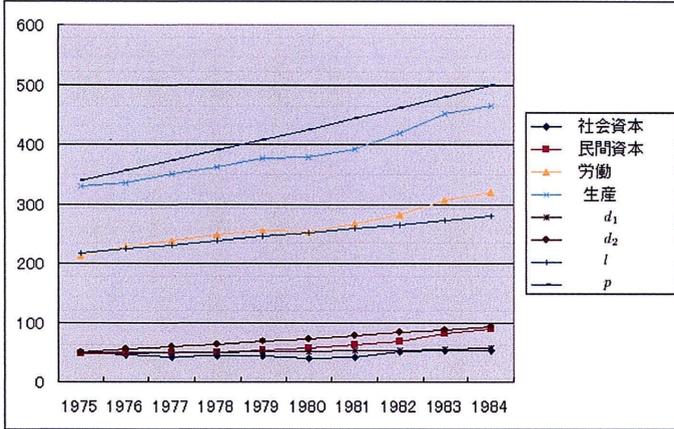


図 2-1. 福岡 1.3-10-1-0.1-0.1

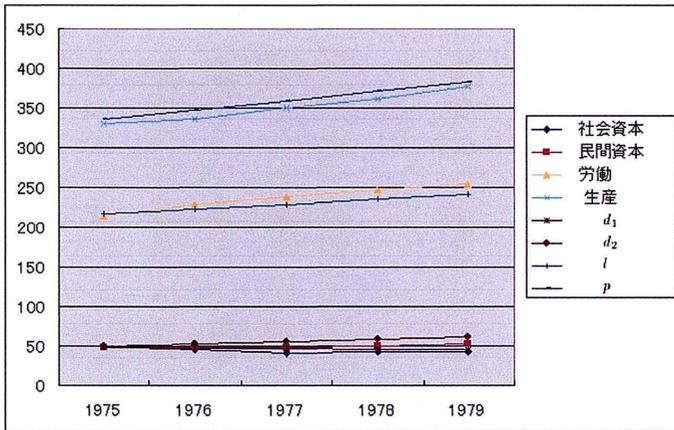


図 2-2. 福岡 1-10-1-0.1-0.1

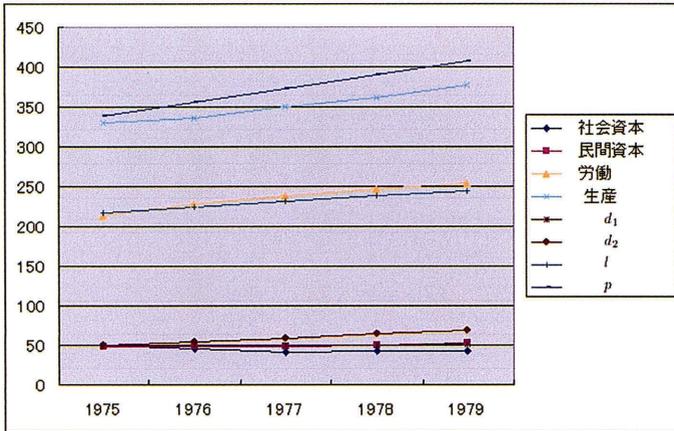
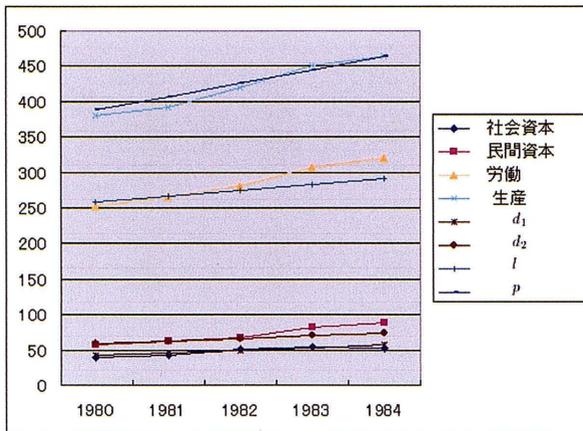


図 3. 福岡 1-1-1-0.1-0.1



4. 結語

数値シミュレーション結果を総合的に判断すれば、本報告の主目的である生産量の動向の再現は十分に達成できたと判断できる。従って、経済政策を適正に評価し、非自励系の地域経済動向モデル (RETM) で数値シミュレーションを実行すれば、かなりの精度で市町村単位での経済動向を予測することが可能なのではないかと考えられる。

しかし、その一方で、数値シミュレーションを実施する段階において様々な問題が生じている。それを列記して結語に代える。

- (1) (RETM) における正のパラメータ $n_0, \delta_1, \delta_2, s_1, s_2$ を決定する際に、我々は、まずその正定数を (3.1) で与え、その後、それぞれのパラメータを a, b, c, d, e 倍している。例えば、計算結果 1 (札幌市) 図 1 ではそれぞれのパラメータを 1, 8, 1, 0.1, 0.11 倍している。今後、この正のパラメータをどのように決定し、それが経済動向にどのような関連があるのかを明確にする必要がある。
- (2) (RETM) に対する理論的な解析において、条件「 $n_0 < 1$ 」は必要不可欠である。そこで、この条件が (RETM) の中でどのような役割を果たしているのかを明確にする必要がある。言い換えれば、条件「 $n_0 < 1$ 」が実際の経済動向で妥当な仮定であるかどうかを検討する必要がある。
- (3) (RETM) では、各地点における経済動向を予測するに至っていない。つまり、空間方向 (市町村における土地方向の拡がり) での経済効果の波及を考察するに至っていない。今後、このようなレベルでの考察が可能なモデルを (RETM) を基礎方程式として提案する必要がある。

謝辞：本研究は、広島修道大学総合研究所調査研究費 (2003 年度・2004 年度) 研究課題「ある種の経済モデルの構築とその解析」の援助を受けて実施されたものであることを明記するとともに、この場をお借りして心から感謝の意を表します。

参考文献

1. N. G. Mankiw, D. Romer and D. N. Weil, A contribution to the empirics of economic growth, *Quarterly Journal of Economics*, **107**, 407-437, 1992.
2. A. Kadoya, K. Shirakawa and A. Ito, Mathematical models for describing the regional economic trend, in preparation.
3. 伊藤 元重, 入門経済学第 2 版, 日本評論社, 2001.
4. 県民経済計算年報昭和 62 年度版, 経済企画庁経済研究所.