水工学における自由表面解析の進歩

奥村 博司
近畿大学農学部国際資源管理学科

Development of Free Surface Analysis in the Field of Hydraulics

Hiroshi OKUMURA

Department of International Resource Management, Faculty of Agriculture, Kinki University, 3327－204 Nakamachi, Nara, 631－8505, Japan

Synopsis

Numerical methods of unsteady free surface flow were developed in order to compute the exact shape of a free surface. Initially,the MAC (Marker-and-Cell) method,based on N-S equations and Rectangular Eulerian mesh, were used. However, results were unstable. Therefore, several modifications were developed.

First, a line-segment approximation of a free surface and optimization of boundary conditions were modeled. Next, a volume-tracking model (e.g., the VOF method) was considered.

Unfortunately, these models had some disadvantages. A third method was developed in order to overcome these weaknesses.

This report describes the features of these models, the relationships between them, and also discusses developments in the field of hydraulics as regards free surface analysis.

Ⅰ．序

水工学の分野においては，水路の流れを求めること，すなわち，開水路における水位・流速の決定・予測が，水利構造物を設計する上での必要不可欠な事項となっている。当初，この分野の数値解析手法では，厳密な流れ解析よりむしろ，水面形や平均流速の決定に重きがおかれてきたといえ，そのため，洪水追跡の際の非定常流解析を除けば，不等流解析による水面形の決定や模型実験が広く行われてきた。このことは，実際の水利構造物を含む流れが自由表面を伴った3次元の乱流構造を持ち，一般的な境界条件でのコンピュータシミュレーションが容易に行えなかったことにその原因があった。

したがって，単純な水面形や，実験で保証されている規格化された構造物（堰等）に関する流れの範囲では，従来の基準に準拠した解析で十分であった。

しかしながら，最近では，各種ハードウェアやソフトウェアの進歩に伴い，頭首工近傍等の局所流れや前方水位を含む流れの解析時，あるいは流れの内部構造を調べたい場合や景観等に配慮した水利構造物とその周辺の流れを考えたい場合等，模型実験に頼ることなく，コンピュータシミュレーションにより，簡便に設計変更と流況確認が行える設計システムが可能になりつつある。

その場合，浅水波方程式を用いる手法，いわゆる非定常流解析では限界があり，ナビア・ストークス方程式（N－S方程式）に基づく2・3次元解析を実行しなければならない。そのため，動的な境界としての自由表面（水面）の存在が無視できなくなってくる。自由表面位置を決定しなければ計算領域が定まらず，流速等の計算は不可能になるからである。

本報文においては，数値流体力学における差分法の一手法であるVOF法（Volume of Fluid）を中心に据え，水工学の分野での自由表面解析の進歩について解説する。

また，ここでは乱流解析や曲線座標系には踏み込まず，パーソナルコンピュータの高性能化にともなう小規模計算システムを前提とした実用的な解析手法を目指し，構造物を含む開水路において，重力の影響の卓越した流れに関して，水面形，流速分布等を求めることを前提としている。

Ⅱ．差分法によるN-S方程式の定式化の基本

1．流速と圧力の決定

ここでは基礎方程式として，以下の非圧縮性2次元ナビア・ストークス方程式と連続の式，

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial U^2}{\partial x}+\frac{\partial UV}{\partial y}= -\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial x}\right)+F_x \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial UV}{\partial x}+\frac{\partial V^2}{\partial y}= -\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)+F_y \quad (2)$$

$$D=\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0 \quad (3)$$

を用いる。U，Vはそれぞれx，y方向の流速成分，Pは圧力，Fx，Fyは重力加速度（$Fx=0$），νは動粘性係数，tは時間を表す。

この方程式をFig.1の定義点を用いて時間に関しては前進差分，空間に関しては風上差分にて展開すると，各セル毎に以下の式が得られる。

$$U_{i,j}^{n+1}=\eta_{i,j}^{n}-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(P_{i+1,j}-P_{i,j}\right) \quad (4)$$

$$V_{i,j}^{n+1}=\xi_{i,j}^{n}-\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(P_{i,j+1}-P_{i,j}\right) \quad (5)$$

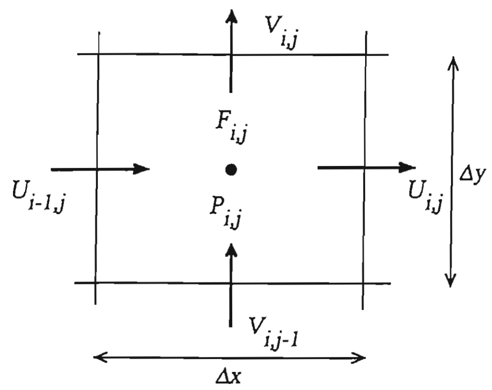

Fig.1 変数配置

ただし，ξ^n，η^nはそれぞれt=nにおける（1），（2）式の各項の既知の値をまとめたものであり，各計算サイクルの最初に一度だけ計算しておけばよい。この項の展開は標準的であり，文献[1) 2) 4)]を参照されたい。

したがって，U，Vの$t=n+1$時の値が計算領域における圧力場から陽に求められる。しかし，このU，Vの値は連続式（3）を満足していない。(4)，（5）式で求められる$n+1$ステップの値U^{n+1}，V^{n+1}は近似値である。

ゆえに，(4)，(5）式における圧力場に，初期条件としては，たとえば，静水圧分布，以後の計算サイクルでは前サイクルにおけるPの計算値を与える。そして，求められた第一回近似流速を用いて，各セルでの連続条件を満たす最終流速値を求めることにする。

この時，流速と圧力を関連づけた（6）式[3)]を導入することにより，その解決を図る。

$$P^{l+1}=P^{l}-\tau_{1}(\nabla V) \tag{6}$$

すなわち，

(a) 各セルにおけるnステップの既知圧力とdivergence値を使用して圧力の修正値P^{l+1}を求める。

(b) その新圧力値を用いて新流速値を決定する。

(c) 新流速値により，新たにdivergenceを求め，新圧力をP^{l}として再び（a）に戻る。ただし，τ_{1}は緩和係数。

Dの値が一定の値より小さくなるまでこのサイクルを繰り返すことになる。ただし，本報文においては，サイクルの最初に（4），(5）式でnステップにおける既知値を用いてU，Vの第1近似値を計算したのちは，(6）式と組み合わせる新流速決定式としては[2)]で提案された（7），(8）式を用いる。

$$U^{l+1}_{i\pm1,j}=U^{l}_{i\pm1,j}\pm\delta P\frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{7}$$

$$V^{l+1}_{i,j\pm1}=V^{l}_{i,j\pm1}\pm\delta P\frac{\Delta t}{\Delta y} \tag{8}$$

$(\delta P=P^{l+1}-P^{l})$

2．セルの旗付けと境界条件の取り扱い

前節で述べたアルゴリズムは，流体の内部にのみ有効であり，境界を含む部分ではそれぞれ特別な付帯条件や計算法を考慮しなければならないが，(4)，(5）式からも明らかなごとく，圧力，流速値は各セル単位で計算される。

そこでMAC法ではFlaggingという操作を通じて，各セルごとにF，E，B，O，Sという旗づけを行う。これらは，内部セル，空セル，固定境界セル，障害物セル，自由表面セル，にそれぞれ対応しており，Fセル以外では，それぞれに応じた境界条件が用意されている。詳細は文献[4) 5) 8) 9)]を参照されたい。

また，任意形状境界の取り扱いに関しては，ABMAC法[2)]において提案された，直交格子の各セルにおける流速点，圧力点における値と，セルに一致しない（移動）任意形状境界の流速，圧力値とを関連付ける関係式が必要となる。それが（9）式である（τ_2は緩和係数)。

$$p^{l+1}=P^{l}-\tau_{2}(\dot{V}_{p}-\dot{V}_{r})\bullet\dot{n} \tag{9}$$

この式の意味は，任意形状境界を含むセル（Mセルとする）においては，Fセルでもちいられる流速・圧力緩和式（6）のdivergenceのかわりに，セル内の移動境界での中点の流速$\vec{Vp}$（周辺の格子点流速より内挿される）と，その中点の移動速度$\vec{Vr}$（条件として与えられる）の差$\vec{Vb}$の法線方向成分$\vec{n}$（=0）を導入することにある。結局，δPが所定の値以下になるまで（7)，(8)，(9）式で，流速と圧力を決定していくことになる（Fig.2)。

水平方向運動のみを考えれば，(9）式は簡略化

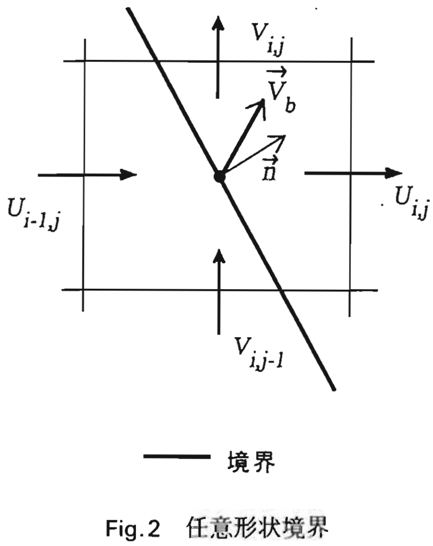

Fig.2 任意形状境界

されて，

$$p^{l+1}=P^{l}-\tau_{2}(\vec{U}_{p}-\vec{U}_{r})\bullet\vec{n} \qquad (10)$$

となる。すなわち，垂直な境界の移動速度（$\vec{Ur}$とする）と移動境界の中点での水平方向計算速度（$\vec{Up}$とする）を一致させる様に流速と圧力を同時緩和させる。ここでは，$\vec{Up}$は$U_{I,\ J}$と$U_{I-1,\ J}$から一次内挿し，$U_{I-1,\ J}$はセル内における連続条件より求めることができる。

この場合でも，上述のごとく流速の変換には（7）（8）式をもちいるため，MセルにおいてもFセルと同じアルゴリズムで連続的に計算が行えることがわかる。さらに，（9）式で$\vec{Vr}=0$とすれば，（9）式は任意形状の構造物セルの圧力・流速に対応していることが理解されよう。直交格子系の解析において，任意境界や可動構造物境界条件との橋渡しを受け持つ関係式である。

以上に述べた定式化は，基本式が保存系表示式であっても，その本質は代わらない。

Ⅲ．自由表面解析の進歩

N－S方程式における自由表面を含む流れの数値解法の発展は，その表面の圧力と位置のより正確な取り扱い，及び，それら境界の形状処理法の進歩に負う所が大きい。それらは主に差分法で改良されてきた。本報文では，その系列であるVOF法（Volume of Fluid法）を取りあげて，自由表面の取り扱い手法について，その基本とさらに進んだ応用について展望する。

当初，自由表面の位置決定法を明確に提案したのは，MAC法（Marker and Cell Method）である[5)10)]。この手法は，計算格子として固定直交座標（円筒座標）を用い，N-S方程式の数値解析法としては画期的な成功を収めた。

そこでは，流体をマーカーの集合で表現し，各マーカーの周囲の流速の重み平均でマーカーを移動・追跡することにより，各時間ごとの流体領域を求めた。すなわち，マーカーの有無が流体の有無になり，境が自由表面となった。残念ながら，適用範囲の広さにもかかわらず，この手法における自由表面決定法にはいくぶんのあいまいさが見受けられ，計算の進展に伴ない不安定性が増す可能性を内包していた。このことは，マーカーによって，自由表面を完全に表現し得ないことによっても理解できる。

このことの解決法として，自由表面における圧力と流速をテイラー展開を利用してより高精度に評価し，自由表面上に配置したマーカーを移動させることにより自由表面形状をラグランジェ的に決定する手法（SUMMAC法）[6)]が提案された。

この手法は，浅水域の有限振幅波の解析に用いられ好結果をもたらした。しかしながら，この手法における自由表面形状の決定法は比較的なめらかな表面変形に適合していると考えられる。自由表面を線分で表現することにより，理論的には大きな変形にも対応可能であるが，3次元問題へ拡張する場合，処理がかなり複雑になるからである。次に，水面近傍流速と水位を関連づける自由表面の形状関数（11）式を導入することにより，マーカーの介在なしに自由表面の決定をおこなう方法が考案された（SOLA法）[4)]。

$$\frac{\partial h}{\partial t}=V-U\frac{\partial h}{\partial x} \quad (h\text{は水位}) \qquad (11)$$

もちろんその形状関数の定義条件（水面勾配条件）を越えての適用はできないのではあるが，条件内の現象に関しては，マーカを用いる手法に比較して格段の安定性と簡便性を発揮することが確認されている[7)]。

ここで整理すると，自由表面流の解析にあたって，MAC法は現象への適用範囲が最も広い手法であるが，不安定性という欠点をもち，その改良版であるSUMMAC法は，複雑な処理が必要となり，3次元問題等で適用範囲が限られるが，安定性の高い手法であること，そして，SOLA法は適用範囲はかなり限定されるが，最も安定した解析法であることが理解されよう。

これらの長所・欠点を踏まえ，より広い適用範囲と安定性をもつ解析手法を目指して開発された手法がVOF法[1)]である。

VOF法では，各セルにおいて流体の移動量を把握し，その流体量から自由表面を決定する。MAC法の様に点の集合で水面を決めるのでなく，SOLA法の様に関数近似したりするのでもない。セル内の流体量をもちいて自由表面を決定する手法である。

Ⅳ．VOF法の特性

VOF法の基本は各セルにおける流体のボリュームを関数F（X, Y, t）（$0 \leqq F \leqq 1$）で表わし，その流動値を追跡するところにある。

その結果，$F=1$はFULLセル，$F=0$はEMPTYセル，その中間はSURFACEセルとなり，それぞれ流体内部，外部，境界部を示す。

この意味で本手法は境界よりもむしろ領域を重視した解法といえよう。

また，自由表面の勾配とその位置はFの値と境界の法線方向との関連で求めることができ，F値により水面形が一義的に決定される。

さらにその際，その定義より，自由表面は一価関数である必要はなく（各セル内においては直線近似），境界面の複雑な変形を伴う現象をもシミュレートできる。

一方，VOF法は差分法であるのでN-S方程式を解くMAC法系列の基本式とアルゴリズムがそのまま使用され，F関数の移流式（12）式を結合させて自由表面解析を行なうことが可能である。

$$\frac{\partial F}{\partial t}+U\frac{\partial F}{\partial x}+V\frac{\partial F}{\partial y}=0 \tag{12}$$

結局，VOF法とは，（12）式を計算格子上で解くことに他ならない。（12）式の評価法については次項で述べる。

Ⅴ．ドナー・アクセプター法による自由表面解析

オリジナルのVOF法では，ドナー・アクセプター法を採用し（12）式を評価する。この手法では，セル間のFの移流を考える時，移流元のドナーセルの水面情報だけでなく，移流先のアクセプターセルの情報も使うことが特徴となっている。

すなわち，一つのセルの右側面が法線方向に右向きの流速Uを持つ時，単位時間δtに右隣のセルに移流するFの量をドナー，アクセプター両セルのF値であるF_D，F_Aから決定する。

他の三面からの流体量Fの出入を同様に処理すれば，一つのセルの流体の総得失量が計算され，他のセルに拡張すれば全領域におけるFの流動が求められる。これで（12）式の評価がおこなえる。

この時，δt時間に境界面を移流するドナーセル領域をV_xとすると

$$V_x=U\delta t \tag{13}$$

により，セルの右側面からのFの単位長さあたりの移流率δFは簡単に求められる（Fig.3）。

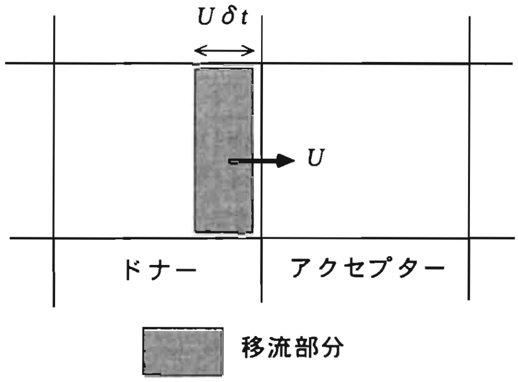

Fig.3　ドナーとアクセプターによる流体量の移動概念

しかしながら，自由表面を含むセルの移流量を計算するためには，次の評価式を準備しなければならない。

$$\delta F=MIN(F_{AD}|V_x|+CF, F_D\,\delta X_D) \tag{14}$$

$$CF=MAX\{(1.0-F_{AD})|V_x|-(1.0-F_D)\,\delta X_D, 0.0\} \tag{15}$$

ここでδX_Dはドナーセルの幅でありF_{AD}は以下の基準による。

（1）平均水面と移流面が垂直：$F_{AD}=F_D$
（2）平均水面と移流面が水平：$F_{AD}=F_A$
（3）ドナーセルの上下流の一方が空セルである時：$F_{AD}=F_A$

Ⅵ．（14），（15）式とF_{AD}の基準について

ドナーセルにおいてセル内で水面を直線で近似すると，流体が下側にある場合には，セルの四辺を水面が横切るパターンは以下の6つに分類され

る（Fig.4）。

実際の移流にあたっては平均水面の垂直・水平が問題であり，F_{AD}の選択によりδFが計算される。

この時，水面勾配はセルの対角線勾配との大小比較でその垂直・水平が決定される。したがって，Fig.5では（a）は水平水面，（b）は垂直水面となる。また，隣り合う2方向セルが自由表面セルである（c）と（d）は，水面勾配に応じて，水平か垂直と判断され，（e）と（f）は隣り合うセルがすべて空セルと自由表面セルであって，いずれもδFの計算には注意が必要である。

平均水面が水平時（Fig.4（a））にはFig.5により説明される以下の移流が計算される。

$$\delta F = F_D |V_X| \tag{16}$$

平均水面が垂直時はFig.6によるが，4通りに区別される。すなわち，Case1の場合F_Dはすべてアクセプターセルに流入してしまうことは明らかである。

（14）式において$CF=0$であり（後述），次式が得られる。

$$\delta F = F_D \delta X_D \tag{17}$$

Case2の場合，F_Dのうち流入できる割合を考えれば，

$$\delta F = F_A |V_X| \tag{18}$$

である。このCase1，2ではCase3，4の場合と違ってCFの値は無視してもよい。CFは以下のCase3，4の場合に評価される。

Case3の場合，FDはまったく移動せず，Case4の場合一部分が移流する。このことは逆に考えれば，Case3の場合はドナーセルの空白部の一部が移流し，Case4の場合は，空白部全部が移流していると考えてよい。

ゆえに，アクセプターセルから空白部がドナーセルに流入していると考えれば，アクセプターセルの空白部（$1-F_A$）の移流部分は（18）式と同様に

$$\delta F = (1 - F_A) |V_X| \tag{19}$$

によって評価される。また，ドナーセルの空白部分は，（$1-F_D$）δX_D　で表現される。Case3の場合，

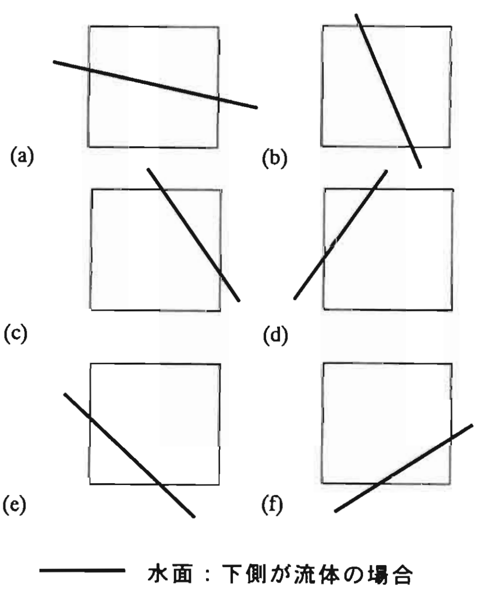

Fig.4　ドナーセルにおける水面形パターン

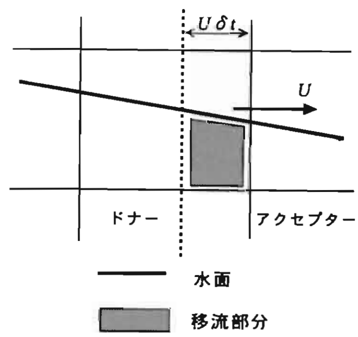

Fig.5　水平自由表面でのＦの移流

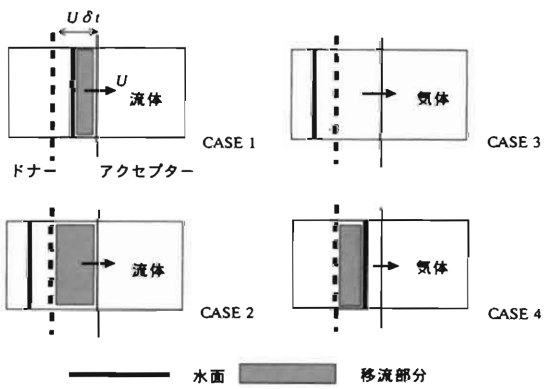

Fig.6　垂直自由表面でのＦの移流

この値が（19）式の値より大きいためドナーセルからのFの流入はなく，Case4の場合は逆であるので，それらの差がアクセプターセルの流入するF値になる。

当然，CFの値はCase1，2では0になるわけであり，無視してもよかった理由になっている。

これらをまとめて，式表示したものが，（14），（15）式に他ならない。

Fig.5，Fig.6では水平水面と垂直水面で説明したが，Fig.4（f）が関係するFig.7（a）の場合，水面は凸形状であるが，7（b），7（c）で示されている移流量は全く同じ方法によって評価される。

また，凹形状の水面形を特徴とする，Fig.4（e）が関係するFig.7（d）の場合も同様である。いずれも，となりあうセルの水面情報をFの移流計算に用いる。

Ⅶ．VOF法の改良とレベルセット法

改良型VOF法（たとえば文献11））では，F値の移流量の計算時に，各セル内で水平（垂直）の水面形を仮定しているが，改良型では，実際に近い水面勾配で移流量の計算を行う。Fig.8において，$Fa > Fb$の場合，隣接するセルを横切る自由表面の可能水面形は4種類のみである。そこで，その自由表面を$Y=aX+b$で近似し，FaとFbの値を利用することによってaとbをきめることが可能であるため，隣接セルの中央での自由表面の勾配が一意に決定される。この水面形状を利用することにより，Fig.5により，Fの移流量をより厳密に評価できることになる。

また，F値の代わりに密度関数等のスカラ関数ϕを導入することによって，より精密な自由表面解析を行う手法も提案されている。（20）式のごとくスカラ関数を定義すれば，

$$\phi(x,y,z,t)=c \tag{20}$$

$c=0$の場合，自由表面が運動後も自由表面を維持するためにはスカラ関数の全微分が0でなければならないことより，（21）式が成り立つ必要があり，この移流方程式を満足するように自由表面が決定される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0 \tag{21}$$

このスカラ関数をうまく選べば，いろいろな応用性が有ると考えられている（文献[12), 13)]）。レベルセット法と呼ばれるこの手法は，自由表面を点や線でなくスカラ量として評価すると言う観点から考えれば，広い意味でVOF法の発展とも考えられよう。

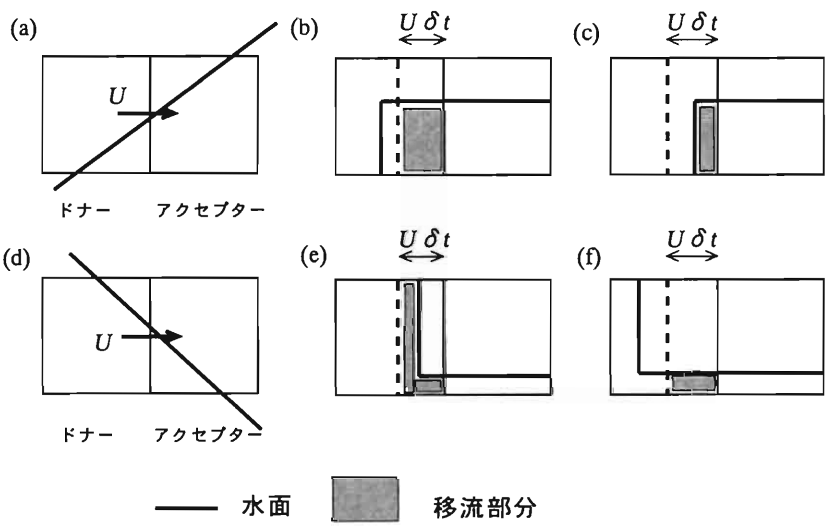

Fig.7 なめらかでない自由表面でのFの移流

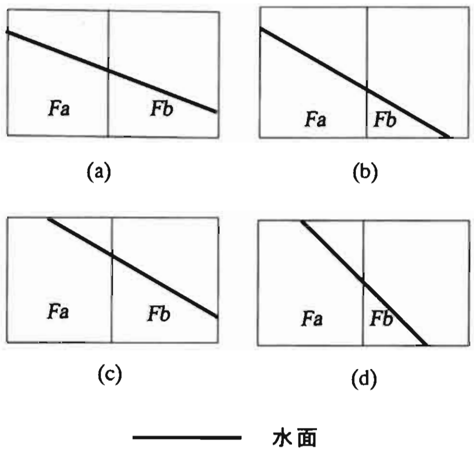

Fig.8 可能な水面パターン

Ⅷ. 結び

水工学の計算に数値流体力学の手法を取り入れることにより，実用的な水面解析システムの可能性が高まってきている。VOF法は上述のごとく，水面構造を考慮にいれた非常に柔軟な解法である。自由表面形状の決定法にやや正確さを欠くところがあるが，原理の単純さがそれを補っている。したがって水工学の分野においても，その改良法も含めて，十分に応用可能な手法であると考えられるが，具体的な適用例を含め，実際の現象への適用における有劣や，その改善法についてはさらに検討する必要がある。

今後，計算機能力のさらなる飛躍に伴い，プリプロセッサ・ポストプロセッサを含めた3次元の実用モデルのパーソナルコンピューティングが可能になった場合でも，ここで述べられた自由表面解析手法がそのまま活用できよう。なぜなら，VOF法系のアルゴリズムは3次元への拡張が容易であるとともに，他の解析手法においても，本報文での水面解析手法の考え方が応用可能となるからである。必要に応じて，他のモデルと結合させれば，より進んだシミュレーションが可能となる。

引用文献

1) B. D. Nichols, C. W. Hirt and R. S. Hotchkiss: SOLA-VOF, LA-8355 (1980)

2) J. A. Viecelli: Computing Method for Imcompressible Flow Bounded by Moving Walls, J. Comput, Phys. 8, pp. 119-143 (1971)

3) A. J. Chorin: A Numerical Method for Solving Imcompressible Viscous Flow Problem, J. Comput. Phys. 2, pp. 12-26 (1967)

4) C. W. Hirt, B. D. Nichols and N. C. Romero: SOLA, LA-5852 (1975)

5) A. A. Amsden, F. H. Harlow: The SMAC Method, LA-4370 (1970)

6) R. K. C. Chan, R. L. Street: A Numerical Model for Water Wave. Stanford Univ. Tech. Rep. 135 (1970)

7) 武本行正，奥村博司，鳥井清司:任意形状のセキを越える流れの数値解法，農土学会論文集 89，PP. 38-47 (1980)

8) 奥村博司，武本行正ら:非圧縮性粘性流体の数値解析プログラム（その2），京大大型計算機センター広報Vol. 14，No:1，PP. 31-40 (1981)

9) C. W. Hirt, J. P. Shannon: Free-Surfacestress Conditions for Imcompressibe Flow Calculations, J. Comput. Phys. 2, pp. 403-411 (1967)

10) J. E. Welch, F. H. Harlow, J. P. Shannon and B. J. Daly: The MAC Method, LA-3425 (1966)

11) N. Ashgriz, J. Y. Poo: FLAIR (Flux Line-Segment Model) for Advection and Interface Reconstruction, J. Comput. Phys. 93, pp. 449-468 (1991)

12) M. Sussman, P. Smereka, S. Osher: A Level Set Approach for Computing Solutions to Incompressible Two-Fhase Flow, J. Comput. Phys. 114, pp. 146-159 (1994)

13) 棚橋隆彦，槇原孝文:自由界面のダイナミックス，計算工学Vol. 2，No. 1，pp. 24-32 (1997)