倒立二輪の制御

総合理工学研究科　准教授　原 田　孝
（東大阪モノづくり専攻　機械力学・制御分野担当）

1　はじめに

「モノづくり」に対して，「コトづくり」や「モノゴトづくり」の重要性が唱えられている[1]．一般的には，「モノづくり」が製品のハードウエアをつくり，「コトづくり」は製品を機能させるためのソフトウエアをつくることを指す. 自動車やロボットなどに代表される現在の工業製品の殆どがハードウエアである「モノ」が，コンピュータ制御される「コト」によって構成されている．今後は「モノ」と「コト」が合体した，「モノゴトつくり」が，ますます重要になってくる．

大学における機械工学の学問体系は，材料力学，流体力学，熱力学，機械力学のいわゆる 4 力学を基幹科目としている．4 力を学ぶこと＝機械工学を習得することである．4 力が機械工学のたて糸とすれば，「モノづくり」という観点で見れば，設計製図科目が横糸の役割を果たしている．本学機械工学科の学部教育では，歯車減速機やうずまきポンプの設計を通して，実製品に対して 4 力がどのように関与しているかを垣間見る．卒業後においても，自動車の設計を例に挙げると，材料力学はボディの強度設計に，流体力学は空力設計に，熱力学はエンジン設計に，機械力学はサスペンションの振動設計に，というように，機械系エンジニアは 4 力を実践的に駆使して仕事を行う．

一方, 機械工学を「コトづくり」という観点で眺めると，制御工学がその横糸の役割を果たしている．自動車，工作機械，ロボット，家電，各種製造プラントなど，これらのモノを意のままに操るためには, 制御工学はなくてはならない重要な学問である．4 力において微分方程式という形式で定式化(モデル化)された，熱，流れ，機械の運動を制御対象とし，それらを操る制御系の構築方法を学ぶ．

大学における制御工学科目は，機械工学，電気工学，システム工学などの学科で広く教育に取り込まれている. 中でも機械工学においては，設計製図科目を通して「モノづくり」を習得し，さらに制御工学科目を通して「コトづくり」を習得し，合わせて「モノゴトづくり」を学習することができる学問体系となっている．

本報告書では，倒立振子を題材とし，機械工学をセカンドメジャーとする大学院前期課程の学生が, 機械工学における「モノゴトづくり」の醍醐味を俯瞰する教育プログラムを開発した内容を報告する．教育プログラムは，本学機械工学科の学部 2 年生後期に実施している, 制御工学演習実験の課題である「倒立二輪の制御」をベースとした．

2　教材ノートの作成

倒立二輪の安定化制御には，機械工学における，「機械力学」，「制御工学」などの専門科目に加え，「数値計算」，「微分方程式」などの基礎科目の多岐にわたる知識が必要となる．そこで，自学習のために専用の教材ノートを作成した(2 段組み 10 ページ)．以下にその内容を抜粋する．

2．1　教育の目的

倒立二輪の安定化制御を題材に, 機械システムを制御するための一連の手順を俯瞰し, その具体的な方法を習得することを目的とする．

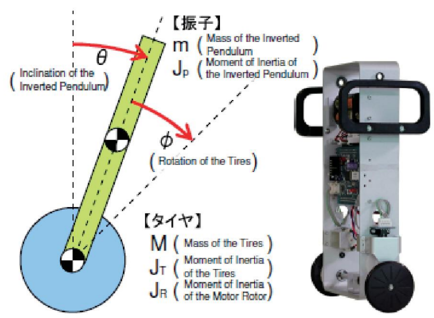

Fig.1 倒立二輪

ここでいう一連の手順とは,

(1) モデル化

ラグランジュ方程式を用いて, 機械システムの運動方程式を導出する．[関連科目：機械力学]

(2) 物理パラメータ値の計測

モデルに登場する機械定数(質量，慣性モーメントなど)の値を求める．[関連科目：機械力学]

(3) 制御設計

モデルを線形化し，線形制御理論を用いて安定化制御(倒立二輪を安定して立たせる)する．古典制御と線形制御理論を用いる．[関連科目：制御工学]

(4) 微分方程式の解法

・微分方程式を解析的に解く．[関連科目：微分方程式]

・微分方程式を数値的に解き，倒立二輪の安定化制御の数値シミュレーションを行う．[関連科目：数値計算法]

(5) 制御実験

実験装置のしくみを理解する．

実際の倒立二輪を安定して立たせる．

センサ，アクチュエータ，CPU，プログラミング

２．２　運動方程式

倒立二輪，ロボット，自動車などの機械システムのモデル化とは，運動方程式を導くことである．運動方程式の導き方は，以下の３種類に大別される．

①　ニュートンの第２法則　動力学

$$f = m\ddot{x} \tag{1}$$

f: 外力，m: 質量, x: 変位，$\ddot{x}$:加速度

②　ダランベールの原理　静力学

$$f - m\ddot{x} = 0 \tag{2}$$

③　ラグランジュ方程式　解析力学

エネルギーから運動方程式を求める．

本教育プログラムでは，ラグランジュ方程式を用いて(1)単振り子，(2)剛体倒立振り子(3)倒立二輪の運動方程式を導出する．以下では，(2)剛体倒立振り子の運動方程式の導出の教育ノートの一部分を抜粋する．

[倒立二輪の運動方程式の導出]

倒立二輪の運動は，Fig.2 に示すタイヤの回転角度γと，ボディ(振子)の傾き角度θの 2 変数にて記述できる(2 自由度系)．ラグランジュ方程式を用いて，運動方程式を導出する．

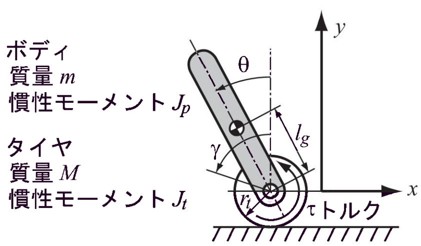

Fig.2 倒立二輪の力学モデル

ラグランジュ関数 L を

$$L = T - U \tag{3}$$

により求める．倒立二輪は 2 自由度系であるので，ラグランジュ関数 L を各変数γ,θに関し以下の微分計算を行い，運動方程式を導出する．

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\theta}} &= \tau_\theta \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \gamma} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\gamma}} &= \tau_\gamma \end{aligned} \tag{4}$$

式(5)を実際に計算し，倒立二輪の運動方程式が以下のように導かれる．

[倒立二輪の運動方程式]

$$\begin{aligned} &((i-1)^2 J_m + J_p + l^2 m)\ddot{\theta} + c\dot{\theta} - glm\sin\theta \\ &\qquad + (-i(i-1)J_m + lmr_t\cos\theta)\ddot{\gamma} - c\dot{\gamma} = -\tau \\ &(i^2 J_m + J_t + (m+M)r_t^{\,2})\ddot{\gamma} + c\dot{\gamma} \\ &\quad + (-i(i-1)J_m + lmr_t\cos\theta)\ddot{\theta} - c\dot{\theta} - lmr_t\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2 = \tau \end{aligned} \tag{5}$$

Table 1 力学パラメータ一覧

m	ボディ質量	l	質量中心位置
M	タイヤ質量	r_t	タイヤ半径
J_p	ボディ慣性モーメント	c	回転軸粘性係数
J_t	タイヤ慣性モーメント	K_t	モータトルク定数
J_m	ロータイナーシャ	i	減速比

２．３　物理パラメータ値の計測

物理パラメータ値の計測とは, 運動方程式に登場する機械的定数である, 質量, 慣性モーメント, 粘性係数, 長さ, 半径などの値を求めることを言う. 以下の計測方法がある.

①直接計測

重さ，長さなど，直接計測できる物理量を実測する．

②間接計測

粘性係数などの直接計測できない物理量は, 周波数応答, ステップ応答などの動的試験から間接的に求める.

③計算

質量や慣性モーメントなどは, 密度と形状から理論式を用いて手計算できる. 複雑な形状の慣性モーメントの厳密な手計算は困難であり, 一般的には複雑な形状を単純な円盤や棒などで近似して計算を行う.

④３次元 CAD

SolidWorks などの 3 次元 CAD は，複雑な形状の質量，質量中心，慣性モーメントを計算する機能を有している．

教育プログラムでは, SolidWorks の計算結果と手計算を比較させる.

２．４　制御系の設計

剛体倒立振子，倒立二輪は，何も制御しないと倒れてしまう．そこで，モータを制御して，振子を倒れないようにする(安定化制御)．安定化制御は，フィードバック制御では，目標値信号 r と，制御対象の出力 y との差(偏差)e を用いて，操作量を計算し，それを制御対象 P に与える制御方式である．

[線形化]

大学で学び，また，産業界でも広く用いられている制御理論は，制御対象が線形微分方程式（定数係数線形常微分方程式）で記述される，線形制御理論である．しかし，倒立振子を始めとするほとんどの制御対象は，非線形微分方程式で表現される．

線形制御理論を適用するために，まず，非線形微分方程式を線形化する．具体的には，目標値近傍で制御対象を線形近似する．

倒立二輪の線形近似式は，

$$\begin{aligned} &((i-1)^2 J_m + J_p + l^2 m)\ddot{\theta} + c\dot{\theta} - glm\theta \\ &\qquad + (-i(i-1)J_m + lmr_t)\ddot{\gamma} - c\dot{\gamma} = -\tau \\ &(i^2 J_m + J_t + (m+M)r_t^{\,2})\ddot{\gamma} + c\dot{\gamma} \\ &\qquad + (-i(i-1)J_m + lmr_t)\ddot{\theta} - c\dot{\theta} = \tau \end{aligned} \tag{6}$$

となる．

［古典制御を用いた剛体倒立振子の制御系設計］

古典制御とは，システムの入出力を伝達関数を用いて表現して，伝達関数を用いて設計する方法である．タイヤを固定した系に対して，古典制御を用いた制御系設計を行う．

(1)制御系の伝達関数

線形近似した，剛体倒立振子の運動方程式(6)を下記のように書き直す．

$$m_a\ddot{\theta}+c_a\dot{\theta}-k_a\theta=\tau \tag{7}$$

式(7)はマス-ダンパ-バネ系と同じ 2 階線形微分方程式であるが，バネ定数が負であることに注意する．式(7)をラプラス変換する．

$$(m_a s^2+c_a s-k_a)\Theta(s)=\mathrm{T}(s) \tag{8}$$

入力をモータのトルク $\mathrm{T}(s)$，出力を振子の角度 $\Theta(s)$ とした時の伝達関数 $G_P(s)$ は，

$$G_p(s)=\frac{\Theta(s)}{\mathrm{T}(s)}=\frac{1}{m_a s^2+c_a s-k_a} \tag{9}$$

式(9)の制御対象に対して，PD(比例微分)制御を適用する．

$$G_c(s)=(K_p+K_D s)E(s) \tag{10}$$

θ_f は振子角度の目標値であり，今回の場合は $\theta_f=0$ である．

システム全体のブロック線図は Fig.3 のようになる．

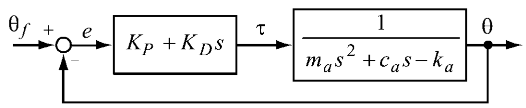

Fig.3 倒立振子 PD 制御のブロック線図

PD 制御を適用したときの，目標角度から実際の角度に到る，閉ループ伝達関数は，

$$G(s)=\frac{K_P+K_D s}{m_a s^2+(c_a+K_D)s-k_a+K_P} \tag{11}$$

となる．PD 制御を適用した式(11)では，

粘性係数　$c_a \rightarrow c_a+K_D$

バネ定数　$-k_a \rightarrow -k_a+K_P$

に変化した系と見なすことが出来る．2 次系をマス-ダンパ-バネ系と見なしたとき，微分ゲイン K_D は粘性係数を，比例ゲイン K_P はバネ定数を大きくする作用がある．

[極配置]

極の位置を希望する位置に来るように，フィードバックゲインを設定する制御設計方法を極配置と言う．極配置の理論体系は，システム制御工学で学習する現代制御理論の範疇であるが，2 次系(特性方程式が 2 次式)の場合は，係数比較で極配置を行うことができる．

特性方程式を変形する．

$$H(s)=m_a\left(s^2+\frac{c_a+K_D}{m_a}s+\frac{K_P+-k_a}{m_a}\right)=0 \tag{12}$$

設定したい極を，

$$s=\alpha_1+\beta_1 j,\alpha_2+\beta_2 j \tag{13}$$

とおく． 2 次方程式の解と係数の関係より，

$$\begin{cases}-(\alpha_1+\alpha_2)=\dfrac{c_a+K_D}{m_a}\\[2mm] \alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2=\dfrac{K_P-k_a}{m_a}\end{cases} \tag{14}$$

式(14)を K_P,K_D について解くと，

$$\begin{aligned}K_P&=m_a(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)+k_a\\ K_D&=-m_a(\alpha_1+\alpha_2)-c_a\end{aligned} \tag{15}$$

のように，極を希望する位置に配置する PD ゲインを導くことができる．

２．５　微分方程式の解法

単振り子，剛体倒立振子，倒立二輪のいずれもが，その運動方程式が非線形微分方程式であるので，解析解を求めることが出来ない．そこで，数値計算法を用いて，微分方程式を解析的に解く方法を Excel を用いて演習する．

時間の関数

$$y=y(t) \tag{16}$$

に対して，微分方程式が，

$$\dot{y}=f(t,y) \tag{17}$$

で与えられている．これを初期値，

$$y(0)=y_0 \tag{18}$$

のもとで，数値的に y を求める(オイラー法).

$$\begin{aligned}\dot{y}&=f(t,y)=\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}\\ y(t+\Delta t)&=y(t)+\Delta t\cdot f(t,y)\end{aligned} \tag{19}$$

より，現在値 $y(t)$ より，時間 Δt 後の $y(t+\Delta t)$ を再帰的に計算できる．数値計算では，時間刻みを Δt として，時刻 $m\Delta t$ のを m 番目のデータとして，時刻 $(m+1)\Delta t$ のを $m+1$ 番目のデータとして，

$$y(m+1)=y(m)+\Delta t\cdot f(t(m),y(m)) \tag{20}$$

のように数値アルゴリズムとして表現することが慣例である．オイラー法は計算誤差が小さくないので，実用的には，4次のルンゲ-クッタ法を用いて数値計算を行う．

$$\begin{aligned}k_{i1}&=f_i(t(m),y_1(m),y_2(m),...,y_n(m))\\ k_{i2}&=f_i\left(t(m)+\frac{\Delta t}{2},y_1(m)+\frac{\Delta t}{2}k_{11},...,y_n(m)+\frac{\Delta t}{2}k_{n1}\right)\\ k_{i3}&=f_i\left(t(m)+\frac{\Delta t}{2},y_1(m)+\frac{\Delta t}{2}k_{12},...,y_n(m)+\frac{\Delta t}{2}k_{n2}\right)\\ k_{i4}&=f_i(t(m)+\Delta t,y_1(m)+\Delta tk_{13},...,y_n(m)+\Delta tk_{n3})\\ k_i&=\frac{\Delta t}{6}(k_{i1}+2k_{i2}+2k_{i3}+k_{i4})\end{aligned} \tag{21}$$

３　教材ソフトウエアの開発と実験

安定化制御の教材用として，Excel を用いた制御シミュレーションソフトウエアを開発した（Fig.5)．ゲインを決定して挙動をシミュレーションし，実験と比較する．

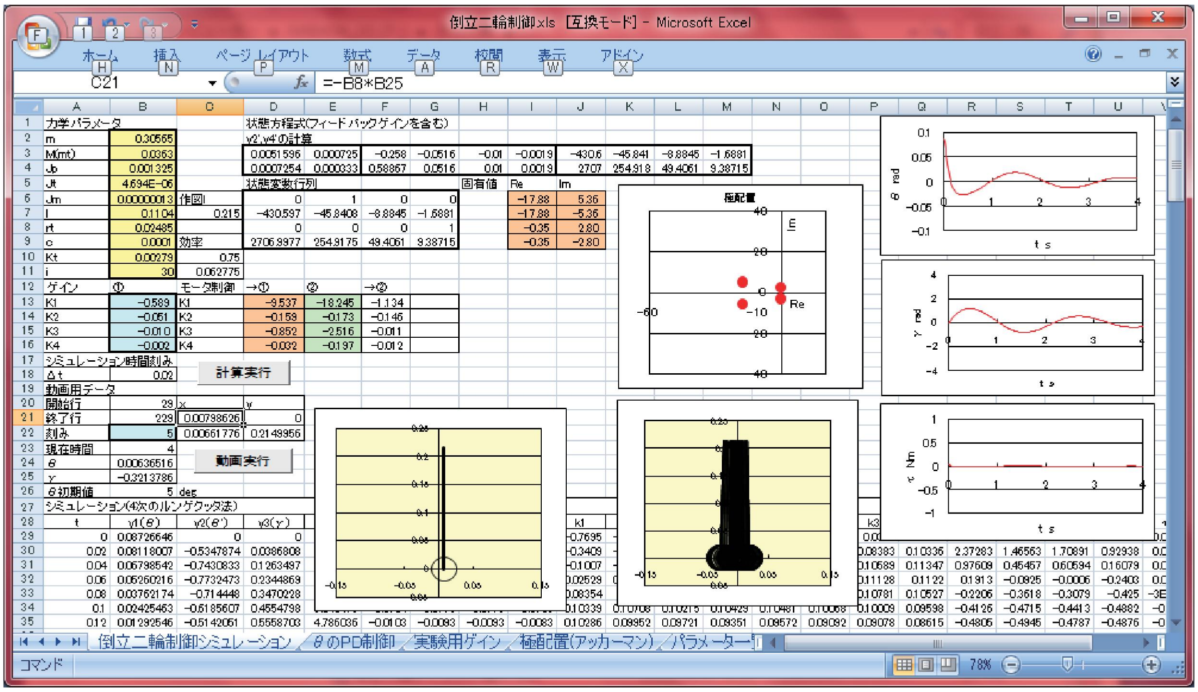

Fig.5 倒立二輪制御シミュレータ

3．1　数値シミュレーション例

タイヤを固定して制御系設計を行った場合は，倒立二輪は倒れないものの，Fig.6 に示すように，タイヤの位置も固定されない．次に，極配置図を参考にし，タイヤの位置を制御するフィードバックゲインを決定すると，Fig.7 のボディ，タイヤ共に安定位置に収束する．

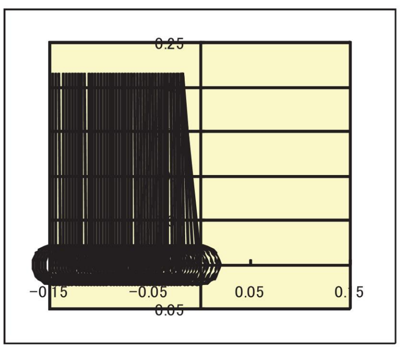

Fig.6 シミュレーション結果(タイヤは静止していない)

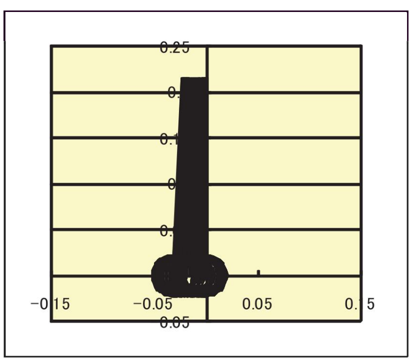

Fig.7 シミュレーション結果(タイヤ静止)

シミュレータで決定したフィードバックゲインを実際の倒立二輪に与えて，その挙動を観察し，レポートにまとめる．考察課題の一部を下記に例示する．

[考察 1]

(1)ボディ角度 PD 制御の場合，タイヤは静止しない．極の位置からその理由を考察しなさい．

(2)ボディ角度 PD 制御+タイヤ角度 D 制御の場合，タイヤは静止するが，目標位置(γ=0)に収束しない．極の位置からその理由を考察しなさい．

(3)ボディ角度 PD 制御+タイヤ角度 PD 制御の場合，タイヤは静止し，目標位置(γ=0)に収束する．極の位置からその理由を考察しなさい．

[考察 2] 決定した制御ゲインを倒立二輪に与え，シミュレーションの結果と実験結果とを比較しなさい．

4　まとめ

化学工業，製薬，食品などの製品開発には，固有の専門知識が必要であるが，これらの装置技術，製造技術はまさしく機械工学の範疇である．本教育プログラムでは，機械工学をセカンドメジャーとする他分野の技術者･研究者が，機械工学の「モノゴトつくり」を学び，研究開発から製造までを俯瞰する能力を体得することを意識した．本教育プログラムで「モノゴトつくり」のセンスを養った大学院生が，卒業後にそれぞれの分野で活躍されることを期待する．

参考文献

[1] 木村英紀：ものつくり敗戦―「匠の呪縛」が日本を衰退させる，日本経済新聞出版社，(2009)