

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年4月18日現在

機関番号：34419

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540160

研究課題名（和文） グラフの数え上げの研究

研究課題名（英文） Research on the enumeration of graphs

研究代表者

田澤 新成 (TAZAWA SHINSEI)

近畿大学・総合社会学部・教授

研究者番号：80098657

研究成果の概要（和文）：

自己補グラフの数え上げに特に興味をもった。1973年に発行された Harary and Palmer による書籍（Graphical Enumeration, Academic Press, New York and London）が標識自己補グラフの数え上げ問題は未解決であることをアナウンスした。この研究で標識自己補グラフの数え上げ問題を解決した。この研究を通し“副産物”を得た。（1）点の個数が指定された自己補グラフの自己同型群の位数のリストを求めることができる。（2）非標識な自己補グラフの数え上げに関し、1963年にすでに一つの公式が与えられていたが、本研究ではもう一つの公式を与えた。

研究成果の概要（英文）：

We have studied intensively the enumeration of selfcomplementary graphs. In 1973, Harary and Palmer announced an enumeration problem of labeled selfcomplementary graphs at the end of their book (Graphical Enumeration, Academic Press, New York and London, 1973). This research from April, 2010 to March, 2013 gave an answer of this problem. Moreover, this research gave following formulas: (1) A formula on the number of labeled selfcomplementary graphs with the given order of automorphism groups and (2) A formula on the number of unlabeled selfcomplementary graphs with the given order of automorphism groups of those graphs. This result will be appeared in “Utilitas Mathematica”.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010年度	600,000	180,000	780,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
2012年度	500,000	150,000	650,000
2013年度	0	0	0
2014年度	0	0	0
総計	1,600,000	480,000	2,080,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：グラフ・標識自己補グラフ・数え上げ・母関数

1. 研究開始当初の背景

グラフの数え上げはグラフ論の中で重要な一翼をなしている。グラフの数え上げには、

標識グラフの数え上げとグラフの“形”のみに注目する非標識グラフの数え上げに分けられる。

(1) 非標識グラフの数え上げは伝統的にポリヤの定理、バーンサイドの補題を用いるが、方法論として別な方法はないものかを研究対象にする。

(2) また、標識、非標識といった数え上げは普通別々に扱われる。この扱いを融合できないか。融合しての解決を図る数え上げ問題の考察をする。

(3) 数え上げ問題の中で、特異な性質をもっている自己補グラフの数え上げ問題があげられる。これは意味のある重要なものである。それは、グラフとその補グラフは構造的に補な関係で自己補グラフはその分岐点に位置しているからである。標識自己補グラフの数え上げ問題は 1963 年以降のオープンプロブレムである。標識自己補グラフの数え上げ問題の考察は、上記 (1)、(2) の考察に通じるものと考えられる。

2. 研究の目的

上記「研究開始当初の背景」で記載したように、本研究課題の研究の目的は以下の通りである。

- (1) 非標識グラフの数え上げには伝統的にポリヤの定理、バーンサイドの補題が用いられる。しかし、方法論として他の方法を求める。
- (2) 標識グラフの数え上げと非標識グラフのそれは、研究対象として独立か。これを問う。
- (3) 標識自己補グラフの数え上げ問題の解決。この問題はオープンプロブレムである。
- (4) 標識自己補 2 部グラフの数え上げ問題の解決

3. 研究の方法

標識自己補グラフの数え上げ問題の考察は結局、上記 (1)、(2) の考察と密接につながっていることがわかってきた。なぜならば、自己補グラフの定義そのものにグラフの同型性が含まれており、そこに同型性につながらない標識という概念が含まれているからである。そこで、(3) を集中的に研究することが肝要である。研究の方法は以下の通りである。

- (1) 自己補グラフの構成をうながす置換 (自己補写像と呼ぶ) の構造を精密に調べる。これは、どのような母関数が考えられるかにも役立つものである。そこで、有限群論の専門家である研究分担者「浅井恒信」氏の力を借りて研究を進めること。
- (2) 自己補グラフの具体的事例をコンピュータで確かめることは必須である。これは数式処理ソフトを活用して行う。
- (3) 標識自己補グラフの数え上げ問題の研究方針は、標識自己補 2 部グラフの数え上げ

問題の考察に通じると考えられるので、それを分担者「大野泰生」氏に担当してもらう。

4. 研究成果

本研究課題「グラフの数え上げの研究」を通して以下の成果を得た。

- (1) グラフそれぞれに一意的に番号を付与し、この番号を 2 進数に変換することにより対応するグラフを描画することができる非常に簡単な手法を案出した。これはグラフ論の研究に大いに役立つものである。特に、指定した位数 (点の個数) をもつ自己補グラフのすべてを描画することができる。
- (2) グラフの自己同型群の位数 (このグラフの群位数と呼ぶ) に関するものである。n 個の点をもつ (位数 n の) グラフの群の位数のリストを求めることができ、指定した群位数をもつグラフを上記 (1) に従って描画することができる。自己補グラフに対しても同様な結果を与える。この成果は、自己補写像の構造を精密に調べることから生まれた。
- (3) 非標識な自己補グラフの数え上げに関し、1963 年にすでに一つの公式が与えられていたが、本研究ではもう一つの公式を与えた。この公式は、ポリヤの定理によらないということが重要で、自己補写像に対応する母関数を構成することにより得られた。
- (4) 標識自己補 2 部グラフの数え上げ問題を考察した。これは、標識自己補グラフの数え上げと同様な方法で行われた。
- (5) 非標識自己補グラフの個数に関し提示された予想 (Royle 予想と呼ばれるで、「位数 n の非標識自己補グラフの個数は位数 n の偶サイズをもつ非標識グラフの個数と位数 n の奇サイズの非標識グラフの差に等しい」というものである) が、非標識自己補 2 部グラフについても同様な予想が成り立つと考えられ、その成立を証明した。これは「研究開始当初の背景」における (2) の考察に通じる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

- ① Makoto Ueno and Shinsei Tazawa,

- Enumeration of bipartite self-complementary graphs, *Graphs and Combinatorics*(掲載確定), 査読有
- ② Shinsei Tazawa, The enumeration of labelled self-complementary graphs, *Utilitas Mathematica* (掲載確定), 査読有
 - ③ Kumi Kobata and Yasuo Ohno, Edge colored complete graphs and a generalization of self complementarity, *Utilitas Mathematica* (掲載確定), 査読有
 - ④ 田澤新成, 標識偶ブロックの数え上げについて、近畿大学総合社会学部紀要、査読有、Vol.1, No.2, 2012, 19-23.
 - ⑤ 田澤新成, 標識グラフの数え上げ問題についての一考察、近畿大学総合社会学部紀要、査読有、Vol.1, No.1, 2011, 49-53.

[学会発表] (計 14 件)

- ① 田澤新成, 母関数とグラフの数え上げ、第 9 回組合せ論若手研究集会 (招待講演)、2013 年 3 月 16 日、慶應義塾大学
- ② Kumi Kobata and Yasuo Ohno, On enumeration of edge colored graphs, *Friday Seminar on Knot Theory*, 2013 年 2 月 1 日、大阪市立大学 数学研究所
- ③ 淺井恒信、庭崎隆, 有限群の p -部分群と斜準同型写像について、RIMS 研究集会「有限群とその表現、頂点作用素代数、代数的組合せ論の研究」、2013 年 1 月 10 日、京都大学数理解析研究所
- ④ 大野泰生, On the enumeration of certain edge-colored graphs, RIMS 研究集会「有限群とその表現、頂点作用素代数、組合せ論の研究」、2012 年 3 月 7 日、京都大学数理解析研究所
- ⑤ 小畑久美、大野泰生, A generalization of an enumeration on cyclic automorphism graphs for edge colored hypergraphs, *Friday Seminar on Knot Theory*, 2012 年 2 月 3 日、大阪市立大学 数学研究所
- ⑥ 田澤新成, Riddell 型方程式について、研究集会「数え上げについての種々の問題およびその周辺」、2011 年 1 月 2 日、島根大学 (島根県)
- ⑦ 田澤新成, グラフのインデックスを利用してのグラフの描き方について、研究集会「数え上げについての種々の問題およびその周辺」、2011 年 1 月 2 日、島根大学 (島根県)
- ⑧ 菱岡由衣、田澤新成, 標識自己補 2 部グラフの数え上げについて、研究集会「数え上げについての種々の問題およびその周辺」、2011 年 1 月 2 日、島根大学 (島根県)

- ⑨ 小畑久美、大野泰生, 辺着色 hypergraph における巡回自己同型について、日本数学会・秋季総合分科会・応用数学分科会、2011 年 9 月 28 日、信州大学 (長野県)
 - ⑩ 小畑久美、大野泰生, 辺着色有向グラフと巡回自己同型、日本数学会・年会・応用数学分科会、2011 年 3 月 20 日、早稲田大学 (東京都)
 - ⑪ 小畑久美、大野泰生, A generalization of an enumeration on self-complementary graphs for edge colored bipartite graphs, 2010 年度応用数学合同研究集会、2010 年 12 月 17 日、龍谷大学 (滋賀県)
 - ⑫ 田澤新成, 標識自己補グラフの数え上げの考察、研究集会「数え上げの問題とその周辺」、2010 年 10 月 29 日、鹿児島大学 (鹿児島県)
 - ⑬ 田澤新成, 2 部グラフの数え上げ問題の考察、研究集会「数え上げの問題とその周辺」、2010 年 10 月 29 日、鹿児島大学 (鹿児島県)
 - ⑭ 小畑久美、大野泰生, 辺着色 2 部グラフの巡回自己同型について、日本数学会・秋季総合分科会・応用数学分科会、2010 年 9 月 22 日、名古屋大学 (愛知県)
- [図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称：
 発明者：
 権利者：
 種類：
 番号：
 出願年月日：
 国内外の別：

○取得状況 (計 0 件)

名称：
 発明者：
 権利者：
 種類：
 番号：
 取得年月日：
 国内外の別：

[その他]
 ホームページ等

6. 研究組織
 (1) 研究代表者

田澤 新成 (TAZAWA SHINSEI)
近畿大学・総合社会学部・教授
研究者番号：80098657

(2) 研究分担者

浅井 恒信 (ASAI TSUNENOBU)
近畿大学・理工学部・准教授
研究者番号：70257963

大野 泰生 (OHNO YASUO)
近畿大学・理工学部・教授
研究者番号：70330230

(3) 連携研究者

()

研究者番号：