

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年3月31日現在

機関番号：34419

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2010～2012

課題番号：22540036

研究課題名（和文） 多変数保型形式の整数論的研究

研究課題名（英文） Study on the arithmetic theory of automorphic forms of several variables

研究代表者

長岡 昇勇（NAGAOKA SHOYU）

近畿大学・理工学部・教授

研究者番号：20164402

研究成果の概要（和文）：一変数のモジュラー形式の場合にセールやスイナートン＝ダイヤー等が考察した「 p 進理論」や「標数 p 」のモジュラー形式の理論を多変数のモジュラー形式、例えばジークルモジュラー形式やエルミートモジュラー形式の場合に拡張を試み、成果を得た。具体的に、 p 進理論においてを得るという新たなモジュラー形式構成法を開発した。また、標数 p 理論においては、ある虚 2 次体上の 2 次エルミートモジュラー形式のなす環の構造を決定した。また p 進理論の応用として一変数の場合、ラマヌジャンが発見したモジュラー形式のフーリエ係数の間に成立している合同式を、多変数のモジュラー形式の場合に拡張した。これらは一変数のモジュラー形式の単なる拡張としてのみならず、ある重さのエルミートカusp形式が存在するという事実の発見につながった。さらにこれらの成果ジークルモジュラー形式の場合、ベクトル値の場合まで範囲を拡張し研究を行い、テータ作用素とよばれるモジュラー形式の微分作用素の p 進的性質の解明を行った。

研究成果の概要（英文）：The p -adic theory of modular forms initiated by J.-P. Serre and H.P.F.Swinnerton-Dyer was established in the case of one variable by several people. I tried to generalize the theory to the case of several variables, for example, Siegel modular forms and Hermitian modular forms, and obtained several results. More specifically, I established a constructing method by taking a p -adic limit of a sequence of ordinary modular forms. Concerning the mod p theory, I studied the structure of the graded ring of Hermitian modular forms and determined the structure in some cases. Moreover, I generalized some congruence properties of Siegel modular forms originated with Ramanujan. This result was applied to show the existence of cusp forms of several variables. I studied the p -adic theory and mod p theory of modular forms of several variables and produced fruits. Moreover, the case of vector-valued was considered. In particular, the p -adic theory of the theta operator, which is a kind of differential operator on modular forms, was developed.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2010 年度	1,100,000	330,000	1430,000
2011 年度	700,000	210,000	910,000
2012 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：整数論、保型形式、 p 進理論

1. 研究開始当初の背景

モジュラー形式の $\text{mod } p$ 理論や p 進理論は Serre や Swinnerton-Dyer によって創始され、一変数の場合、さまざまな分野に応用があることが示されてきた。しかしながら、多変数の場合は研究がなされておらず、例えばジーゲルモジュラー形式の場合でさえ、未着手であった。

2. 研究の目的

目標をつぎの点に絞って研究の目標とした。

(1) $\text{mod } p$ モジュラー形式の理論を多変数モジュラー形式の場合に展開する。例えば、その典型的な例であるジーゲルモジュラー形式やエルミートモジュラー形式といった多変数モジュラー形式について $\text{mod } p$ の graded ring の構造を調べる。

(2) モジュラー形式の p 進理論についても多変数モジュラー形式の場合に、その性質を調べる。

3. 研究の方法

(1) $\text{mod } p$ のモジュラー形式の次数付環の構造は、一変数の場合 H.P.F. Swinnerton-Dyer によって決定された。これを多変数の場合に拡張することが、目標であった。この研究をすすめていく際、鍵となる事実が、重さが $p-1$ でそのフーリエ係数が、定数項が 1, それ以外がすべて p で割り切れるような性質をもつモジュラー形式の存在である。一変数の場合は、重さ $p-1$ のアイゼンシュタイン級数をとれば、von Staudt-Clausen の結果より、このような性質をもつモジュラー形式の存在証明は容易であった。ジーゲルモジュラー形式の場合は、報告者が S. Boecherer 教授との共同研究により、存在を証明した (Deligne 予想の解決)。

(1) p 進モジュラー形式の性質を多変数の場合に調べるうえで、基本的な場合は、アイゼンシュタイン級数を取り、その p 進的な性質を調べることが順当である。報告者は、ジーゲルモジュラーアイゼンシュタイン級数の場合に、適当な p 進極限を取り、それがジーナスタータ級数と一致するという著しい結果を得た。これをアイゼンシュタイン級数の対極にあるカスプ形式について調べることは意義があり、研究目標の一つといえる。

4. 研究成果

研究目的の各項目に即して、得られた結果を紹介していく。

(1) まず、モジュラー形式の $\text{mod } p$ 理論の

多変数化であるが、S. Boecherer 教授との共同研究により、様々な結果が得られた。論文⑤においては、J.-P. Serre が一変数の場合に証明した事実：レベルが p で重さが 2 のモジュラー形式は、レベルが 1, 重さが $p+1$ のモジュラー形式に合同である。この事実が多変数の場合に成立するかどうかを調べた。結論は、Yoshida-lift とよばれる一変数からの持ち上げで得られるモジュラー形式を含むような広範囲のモジュラー形式のカテゴリーについて成立することを確かめた。また、論文③では、エルミートモジュラー形式の場合に、 $\text{mod } p$ モジュラー形式のなす環の構造を決定した。これは、「研究の目的」で述べたジーゲルモジュラー形式以外の多変数モジュラー形式の場合に $\text{mod } p$ 理論を拡張するという目的の一部を達成したことを示している。また S. Boecherer 教授との共同研究のテーマの一つとして、ベクトル値ジーゲルモジュラー形式の場合への $\text{mod } p$ 理論の拡張がある。これについては、以前の研究で、テータ作用素とよばれる、 $\text{mod } p$ のモジュラー形式上作用するような微分作用素を考察し、結果を得ているが、これをベクトル値ジーゲルモジュラー形式の場合に、拡張して定義し、その性質を調べている。これについても結果を得ており共著の論文を投稿中である。また、論文①では、古くから知られていた「Ramanujan の合同式」をアイゼンシュタイン級数とあるカスプ形式の間の合同式として捉え、多変数の場合にどのように拡張されるかをみた。この研究の副産物として、ある重さのエルミートカスプ形式の存在証明が得られている。

(2) モジュラー形式の p 進理論について成果を挙げることができた。論文⑥では、水野氏との共同研究により、一変数の場合に成立することが知られている Mazur の合同式とよばれるモジュラー形式間に成り立つが、2 次のジーゲルモジュラー形式の場合にも成立する例があることを示した。Mazur の合同式は数論幾何学でもしばしば使われる合同式で、我々の結果の応用が期待される。論文⑤では、一変数の場合、Serre が証明し、ジーゲルモジュラー形式の場合は、代数幾何学を用いて市川尚志氏が証明した結果：モジュラー形式の間に p 進的な合同があれば、それらの「重さ」の間にまた p 進的な合同が存在する、のまったく別証明を与えている。そのアイデアは、レベルをもつ一変数のモジュラー形式の場合の Katz の結果に帰着するというもので、利点は、エルミートモジュラー形式の場合に

も容易に適用できる点にある。論文②では、「 p 進カusp形式」を扱っている。これまで報告者の研究の中心は、 p 進アイゼンシュタイン級数であり、この結果は、北海道大学の河村尚明氏や京都大学の竹森翔氏らによって発展させられ、 p 進解析族の存在証明までなされている。このような、 p 進アイゼンシュタイン級数の多変数化の発展に比してカusp形式の場合の p 進理論については手つかずの状態であったと言えよう。論文②では特別なカusp形式の列を考え、その p 進極限が、レベル p 、重さが 2 のカusp形式となることを示している。特別なカusp形式の列とは、報告者と中村佳嗣氏の共同研究で得られた「フーリエ係数が容易に計算可能な」カusp形式で、具体的にはエルミートアイゼンシュタイン級数の 2 次ジークル上半空間への制限と 2 次ジークルアイゼンシュタイン級数の差として構成されるカusp形式である。エルミートアイゼンシュタイン級数もジークルアイゼンシュタイン級数も、その p 進極限が、綿密に計算されているので、その「差」の p 進極限も具体的に計算される。この結果は、カusp形式の列で、その p 進極限が(レベル p の)カusp形式となるという調和のとれた主張であるが、興味深い点は、これは重さが 2 の場合に限られた事実であるという点である。現在進行中で、この研究期間に得られた(論文として投稿中)の結果について述べる。これも、モジュラー形式の合同に関する結果である。Igusa は、2 次のジークルモジュラー形式のなす次数付環の構造を決定した。これは 4 個の偶数の重さを持つモジュラー形式(具体的には 2 個のアイゼンシュタイン級数と 2 個のカusp形式)と一個の「奇数の重さ」をもつカusp形式で生成される。この奇数の重さをもつカusp形式は、重さが 35 であり、Igusa は、テータ零値の組み合わせで表示したが、その表示ではフーリエ係数の具体的な計算には不適である。Ibukiyama は彼の微分作用素を用い、その簡明な表示を得た。我々の研究結果は、この Igusa の重さ 35 のカusp形式のフーリエ係数を Ibukiyama の表示に従って数値計算を行うことにより発見したものである。結果を述べると、Igusa のカusp形式にテータ作用素を施したものが、素数 23 を法として零になるというものである([学会発表]の①)。この結果は単なる数値計算による「現象の発見」とどまらず、菊田氏の[「奇数の重さの場合の Sturm 型定理」と報告者と Boecherer 氏によるテータ作用素の分析により、証明が与えられた。ここで現れる素数 23 の意味であるが、現時点では解明されていないが、Ramanujan のデルタ関数の持ち上げ(Klingen アイゼンシュタインリフト)が満たす合同にも 23 が現れており、その分析が待たれる。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

- ① T. Kikuta, S. Nagaoka, Ramanujan type congruences for modular forms of several variables, The Ramanujan Journal (査読有), Published online: 15 March 2013, DOI: 10.1007/s11139-012-9423-5
- ② H. Kodama, S. Nagaoka, Y. Nakamura, On level p Siegel cusp forms of degree two, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences (査読有), 2012 巻, 2012, 1-9.
- ③ T. Kikuta, S. Nagaoka, On Hermitian modular forms mod p , The Mathematical Society of Japan (査読有), 63 巻, 1 号, 2011, 211-238.
- ④ S. Boecherer, S. Nagaoka, Congruences for Siegel modular forms and their weights, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitaet Hamburg (査読有), 80 巻, 2010, 227-231.
- ⑤ S. Boecherer, S. Nagaoka, On Siegel modular forms of level p and their properties mod p , manuscripta mathematica (査読有), 132 巻, 2010, 501-515.
- ⑥ Y. Mizuno, S. Nagaoka, Some congruence for Saito-Kurokawa lifts, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitaet Hamburg (査読有), 80 巻, 2010, 9-23.

[学会発表] (計 5 件)

- ① 菊田俊幸, 兒玉浩尚, 長岡昇勇
A congruence property of Igusa's cusp form of weigh 35,
日本数学会年会, 2013 年 3 月 22 日, 京都大学
- ② 長岡昇勇,
 p 進 Siegel モジュラー形式について,
研究集会「Siegel モジュラー形式の p 進理論」, 2013 年 2 月 16 日, 佐賀大学
- ③ 菊田俊幸, 長岡昇勇,
多変数モジュラー形式の場合における Ramanujan 型の合同について,
日本数学会秋季総合分科会, 2012 年 9 月 18 日, 九州大学
- ④ S. Boecherer, 長岡昇勇

On p-adic properties of Siegel modular forms,

日本数学会秋季総合分科会, 2012年9月18日, 九州大学

⑤ S. Boecherer, 長岡昇勇

Congruences for Siegel modular forms and their weights,

日本数学会秋季総合分科会, 2011年10月1日, 信州大学

[図書] (計 1件)

「カラー図解数学事典」,

浪川幸彦, 成木勇夫, 長岡昇勇, 林芳樹 (翻訳), 2011年, 共立出版

[産業財産権]

○出願状況 (計 0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

○取得状況 (計 0件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

長岡 昇勇 (NAGAOKA SHOYU)

近畿大学・理工学部・教授

研究者番号: 20164402

(2) 研究分担者 なし

()

研究者番号:

(3) 連携研究者 なし

()

研究者番号: