

平成 22 年 3 月 31 日現在

研究種目：基盤研究（C）  
研究期間：2007 ～ 2009  
課題番号：19540061  
研究課題名（和文）多変数保型形式の整数論的研究  
  
研究課題名（英文）Study on the arithmetic theory of modular forms of  
several variables  
  
研究代表者  
長岡 昇勇（NAGAOKA SHOYU）  
近畿大学・理工学部・教授  
研究者番号：20164402

研究成果の概要（和文）：これまで研究されてきた一変数のモジュラー形式の場合の  $p$  進理論を多変数のモジュラー形式の典型的な例であるジーゲル・モジュラー形式、エルミート・モジュラー形式の場合に拡張を試み、成果を得た。その一つに  $p$  進アイゼンシュタイン級数の理論があり、ある種の  $p$  進アイゼンシュタイン級数がジーナス・テータ級数と一致するという現象を解明した。

研究成果の概要（英文）：The  $p$ -adic theory of modular forms was studied only in the case of one variable. I tried to generalize the theory to the case of several variables, for example, Siegel modular forms and Hermitian modular forms, and produced fruits. One of them can be formulated as the coincidence between the  $p$ -adic Eisenstein series and the genus theta series.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合 計
2007 年度	700,000	210,000	910,000
2008 年度	600,000	180,000	780,000
2009 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総 計	1,800,000	540,000	2,340,000

研究分野：数物系科学  
科研費の分科・細目：数学・代数学  
キーワード：整数論、保型形式、モジュラー形式

1. 研究開始当初の背景  
有限体上のモジュラー形式や  $p$  進モジュラー形式については、いくつかの研究がなされていたが、その結果は一変数のモジュラー形式の場合に限られており、多変数の場合が未開拓であった。  
2. 研究の目的  
目標をつぎの二点に絞って研究を行なった。
- (1) 有限体上のモジュラー形式の理論の多変数化、とくにそれらのなす次数付環の構造決定を目指す。  
(2)  $p$  進モジュラー形式の多変数化、とくに  $p$  進アイゼンシュタイン級数の概念の多変数化を試みる。

### 3. 研究の方法

(1)  $\text{mod } p$  のモジュラー形式のなす次数付環の構造は、一変数の楕円モジュラー形式の場合は H. P. F. Swinnerton-Dyer によって決定されており、これは多変数のジーゲル・モジュラー形式の次数が 2 の場合に、報告者の研究によって決定されている。これを他の多変数モジュラー形式の場合、例えばエルミート・モジュラー形式の場合に考察していく。候補として、Krieg や Dern によって研究されている判別式が  $-3, -4$  の虚二次体のばあいを考察する。

(2)  $p$  進アイゼンシュタイン級数が他のタイプのモジュラー形式と一致する現象は、報告者の前の研究の中で発見されたものである。この現象の本質を探ることが目標であった。すなわち、ジーゲル・モジュラー形式固有の現象であるか、他の多変数モジュラー形式にも現れる大きな枠組みに組み込まれる現象であるかを追求していく。

### 3. 研究成果

(1)  $\text{mod } p$  のモジュラー形式のなす次数付環の構造に関連して次のような成果が得られた。

- ① 次数付環の構造を決定する際のキーポイントであるある種の合同条件を満たすモジュラー形式の存在証明に成功した。すなわち、重さが  $p-1$  でそのフーリエ展開が  $\text{mod } p$  で 1 と合同なモジュラー形式の存在は永らく予想として (Deligne 予想) として残っていたが、この予想を肯定的に解決した (論文⑤)。
- ② 上記予想に関連して、エルミート・モジュラー形式の場合に考察し、この場合に存在証明に成功した (論文③)。上記①で述べた重さ  $p-1$  でフーリエ展開が  $\text{mod } p$  で 1 と合同となるようなモジュラー形式の存在は、 $\text{mod } p$  のモジュラー形式のなす環の構造決定に関わる重要な問題であるが、エルミート・モジュラー形式で対応する虚 2 次体の判別式が  $-3, -4$  の場合に、その存在を証明した。特に判別式が  $-4$  の場合は、その存在の必要十分条件を与えた。
- ③ 次数付環の構造をある種のエルミート・モジュラー形式の場合に決定した。すなわち、虚 2 次体で判別式が  $-3, -4$  の場合、その体に対応する 2 次のエルミート・モジュラー形式を考える。その中で symmetric 形式のなす部分環について、その構造を決定することができた (論文は投稿中)。

- ④ 我々の研究の発端となる J. -P. Serre の論文「 $p$  進モジュラー形式と  $p$  進ゼータ関数」において、重さが 2 のモジュラー形式の  $\text{mod } p$  での興味深い結果が述べられている。これは、重さ 2、レベル  $p$  のガンマ・ゼロ型のモジュラー形式が重さ  $p+1$  の全モジュラー群のモジュラー形式と合同であるというものであった。これは対応するリーマン面の種数の記述とも関連して興味深いものであるが、報告者は S. Boecherer 教授との共同研究により、ある条件下で同様の結果が成立することを証明した (論文①)。

(2) モジュラー形式の  $p$  進理論については以下の結果を得た。

- ① 前回の研究 (2004-2006) において、アイゼンシュタイン級数のある種の  $p$  進極限をとることによって、その極が「真の」モジュラー形式になることを確認した。この現象は、Neben 型と呼ばれる副次的なモジュラー形式で Haupt 型の場合は同様の現象が確認されなかった。この現象が実際起こりえることを、重さが 2 のジーゲル・アイゼンシュタイン級数の場合に証明した (論文④)。この論文ではその具体的なフーリエ展開が構成されており、かつて Hecke が構成したレベル  $p$ 、重さ 2 のアイゼンシュタイン級数のジーゲル・モジュラー形式への拡張となっていることが具体的に見て取れる。
- ② 上記①の結果の応用として次のような結果を得た (論文は投稿中)。これまでの研究のなかで 2 種類の群に関係するアイゼンシュタイン級数を考察してきた。一つはジーゲル・モジュラー群によるものであり、もう一つはエルミート・モジュラー群によるものである。そこで双方の関連を調べ、エルミート・アイゼンシュタイン級数のジーゲル上半空間への制限を考え、同じ重さのジーゲル・アイゼンシュタイン級数との差を考えた。これは、カスプ形式と呼ばれる特別なモジュラー形式になることが双方のフーリエ係数を比較することにより確かめられるが、2 次のカスプ形式の空間の構造は、既に Igusa によって調べられており、我々の構成したカスプ形式はそのいずれかと一致するはずである。この結果、今まで複雑な等式を用いて計算されていた Cohen の関数の簡明な表示を与えることが可能となった。また、重さが 10 と 12 のところに現れる Igusa のカスプ形式のフーリエ係数が Cohen の関数と

Krieg の関数で表示できるという結果も得られた。また、双方のアイゼンシュタイン級数は、その  $p$  進極限が具体的に把握できるものであることに注意すれば、我々のカスプ形式の  $p$  進極限が具体的に計算可能となる。これを  $p=11$  の場合に実行すると、フーリエ係数が具体的に計算でき、Yoshida lift と呼ばれるモジュラー形式と一致することが確認された（論文は投稿中）。

#### 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 5 件）

- ① S. Boecherer, S. Nagaoka, On Siegel modular forms of level  $p$  and their properties mod  $p$ , manuscripta mathematica(査読有)に掲載決定
- ② Y. Mizuno, S. Nagaoka, Some congruence for Saito-Kurakawa lifts, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitaet Hamburg(査読有)に掲載決定
- ③ T. Kikuta, S. Nagaoka, Congruence Properties of Hermitian modular forms, Proceedings of American Mathematical Society (査読有)、137 巻、2009、1179–1184
- ④ T. Kikuta, S. Nagaoka, On a correspondence between  $p$ -adic Siegel Eisenstein series and genus theta Series, Acta Arithmetica(査読有)、134 巻、2008、111–126
- ⑤ S. Boecherer, S. Nagaoka, On mod  $p$  poperties of Siegel modular forms, Mathematische Annalen (査読有)、338 巻、2007、421–433

〔学会発表〕（計 3 件）

- ① 長岡昇勇、On Siegel modular forms of level  $p$  and their properties mod  $p$ 、ドイツ Oberwolfach 数学研究所講演会、2009 年 12 月 18 日、ドイツ Oberwolfach 数学研究所
- ② 長岡昇勇、On Hermitian modular forms mod  $p$ 、日本数学会総合分科会、2009 年 9 月 26 日、大阪大学
- ③ 長岡昇勇、modular 形式のある合同について、日本数学会総合分科会、2008 年 9 月 27 日、東京工業大学

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.kindai.ac.jp/~nagaoka>

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

長岡 昇勇 (NAGAOKA SHOYU)

近畿大学・理工学部・教授

研究者番号：20164402

##### (2) 研究分担者 なし ( )

研究者番号：

##### (3) 連携研究者 なし ( )

研究者番号：