様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年４月３０日現在

研究種目：若手研究（B）
研究期間：2006～2008
課題番号：18740019
研究課題名（和文）非アーベル岩澤理論の展開

研究課題名（英文）Development of non-abelian Iwasawa theory

研究代表者
尾﨑　学（OZAKI MANABU）
近畿大学・理工学部・准教授
研究者番号：80287961

研究成果の概要：代数体の制限分岐非アーベル拡大に関して，岩澤理論的な手法によって新たな立脚点を与えるような幾つかの研究成果を得た．少し詳しく述べると，Z_p-拡大体上の最大不分岐 pro-p-拡大のガロワ群の構造について新たな知見を得ると共に，有限次代数体の最大不分岐 pro-p-拡大のガロワ群の構造についても，古典的問題， 例えば有限次代数体上の最大不分岐 pro-p-拡大のガロワ群としてどのような群が現れるかという問題に対して大きな前進を見た．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	900,000	0	900,000
2007 年度	900,000	0	900,000
2008 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	2,700,000	270,000	2,970,000

研究分野：数論
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：岩澤理論， Z_p-拡大,不分岐拡大， ガロワ群， イデアル類群

１．研究開始当初の背景

代数体の最大不分岐拡大，あるいは分岐を制限した最大拡大のガロワ群の構造を調べることは，多様体の幾何学に於ける基本群が果たす役割の重要性を鑑みれば分るように，数論に於いて非常に重要な研究課題である．これらのガロワ群の pro－p アーベル商（p は素数）は，類体論や岩澤理論によりかなりの深い理解がなされていると言えるが，その全体像の解明は甚だ困難であり，現在も様々な角度から研究がなされている．

２．研究の目的

本研究は岩澤理論の手法に基づいて代数体の不分岐，制限分岐拡大の理解を目指して「非アーベル岩澤理論」の構築・展開に取り組むものである．具体的な研究目標は以下の

２つに大別される：

(1)古典的な岩澤類数公式を非アーベル的拡張である,非アーベル岩澤公式の証明：
古典的な岩澤公式は，Z_p-拡大 K/k の各中間体 k_n 上の最大不分岐アーベル p-拡大のガロワ群の位数を記述する公式である．近年の申請者の研究により，K/k の岩澤μ-不変量が 0 である場合には，k_n の冪零類 i(>0)の最大不分岐 p-拡大（一般に非アーベル拡大）のガロワ群に対しても公式が与えられている．本研究ではμ-不変量が正の場合も含めた一般の場合に公式を与えることを目標とする．そのために，Γ≅Z_p が作用する pro-p 群（pro-p Γ-operator group）の構造に関する群論的な研究を深める．特に，K/k のμ-不変量が正である特別な場合の公式を記述する際に導入した新しい不変量，κ-不変量が pro-p Γ-operator group である K 上の最大不分岐 p-拡大のガロワ群の如何なる構造不変量なのかを解明する．

(2) Z_p-拡大体上の最大不分岐，あるいは制限分岐 p-拡大のガロワ群の構造の研究：
Z_p-拡大体上の最大不分岐，あるいは最大 S-分岐（S は素点の有限集合）アーベル p-拡大のガロワ群は岩澤加群と呼ばれ，これが古典的な岩澤理論の主たる研究対象であった．
非アーベル岩澤理論に於いては，アーベル商のみならず最大不分岐，最大 S-分岐 p-拡大のガロワ群そのものの構造を目標とする．特に申請者が導入したこれらのガロワ群の構造不変量である高次λ-不変量やκ-不変量について数値実験も援用しつつ研究を行う．
そして古典的な岩澤理論のときと同様に，その構造の理解から有限次代数体上の最大不(S-)分岐 p-拡大の構造に関する情報を引き出すことが非アーベル岩澤理論の基本思想である．これに関しては有限次代数体上の最大不分岐拡大のガロワ群の構造に関する Fontaine-Mazur の予想との関係も視野に入れた研究を行う．即ちこの予想と，無限次代数体である Z_p-拡大体上の最大不分岐 p-拡大のガロワ群の構造との関係を明らかにする．当面は虚 2 次体上の Z_p-拡大を中心に起きている現象の解明の手がかりを得るべく研究を進める．

３．研究の方法
本研究を遂行するに当たっては，関連する研究者との研究連絡を密に取る必要がある．特に本研究の研究協力者である水沢靖氏，藤井俊氏と，定期的に議論を行った．そして，フランスに滞在し，C. Maire 氏, A. Movahhedi 氏ら，各地の研究者と議論を行った．
また，数論研究者の出席するセミナー・研究集会に参加して，関連分野の研究者の研究に触れたり，本研究に関して異なる観点からの意見を訊いた．本研究遂行には幅広い数学の知識が必要となるため，関連分野の数学の図書・資料を購入した．なお，研究遂行中に得られた成果は適宜国内外の研究集会において発表を行い，関連する研究者の意見を訊いて研究推進に役立てた．

４．研究成果
(1) 有限次代数体の Z_p-拡大体上の最大不分岐 p-拡大のガロワ群の構造の解明は本研究における主要研究目標の１つである．特に，これまでの研究を通じて「有限次代数体 K の円分的 Z_p-拡大体上の最大不分岐 p-拡大のガロワ群 G は非可換な自由 pro-p 群にはならないであろう」という予想に到達しており，この予想の検証は現時点での非常に重要な問題である．そこで p=2, K が虚 2 次体の場合に研究を行い，K が非常に特別な条件を満た

す場合を除いて，G は非可換な自由 pro-2 群にならないことを証明することに成功した．特に G が非可換な自由 pro-2 群になるにあるのであれば，それは G の階数が 2 の場合に限られることも分かった．上に述べた「非常に特別な条件」は K に対応する 2-進 L-函数の零点たちが Q-上線型従属という条件を含んでおり，この零点に関する条件を満たすような虚 2 次体はかなり多くの数値実験を行っても発見されていない，p-進 L-函数の零点たち（自明な零点を除く）は常に Q-上線型独立である可能性も考えられる．本研究を通じて、p-進 L-函数の零点たちの性質がアーベル拡大のみならず非アーベル拡大のガロワ群の構造とも密接な関係があることが垣間見られた．

(2)　代数体上の最大不分岐 p-拡大（p は素数）のガロワ群の構造の解明は本研究における主要研究目標の１つである。特に代数体上の最大不分岐 p-拡大のガロワ群として現れる pro-p 群の特徴付けは数論に於ける非常に基本的な問題であって、これまでの私の研究によって素数 p が「円の p-分体の最大不分岐 p-拡大が有限次拡大」という性質を持つときには、(A) 任意の有限 p-群が、ある有限次代数体上の最大不分岐 p-拡大のガロワ群として現れる、(B) 任意の可算生成 pro-p-群が、ある代数体（無限次も許す）上の最大不分岐 p-拡大のガロワ群として現れる、という事実の証明に成功していた。しかし、上の条件を満たす素数 p が無数に存在するかどうかは現時点では分からないので、相当に制約的な条件と言わざるを得ない。しかし、本研究によって、この素数 p に関する条件を仮定しないでも主張 (A)、(B) が成立することを証明することに成功した。この定理によって、例えば、代数体の単項化問題で長らくの懸案であった、「群論的に存在する単項化現象は、実際にある代数体において起きるのか？」という問題が肯定的に解決される。証明は、これまでの代数的整数論で使われてきた手法を総動員して、それらに新たな手法を加えて行われる非常に複雑精妙なものであって、別の代数的整数論の問題にも応用できる可能性が十分にあるものである。特に、イデアルの単項化に関する問題に新たな進展を齎すものと期待される。

(3) 代数体上の最大不分岐 p-拡大（p は素数）のガロワ群の構造の解明は本研究における主要な研究目標の１つである．本年度はこの目的のため，有限次代数体のイデアル類群上に新たな pairing を定義してその諸性質を研究した．この新しい pairing は，代数曲線の Jacobi 多様体の等分点の群上で定義されている Weil pairing の類似物であり，極めて自然な対象であると考えられる．Weil pairing は交代，非退化で 1 の冪根の群に値をとるが，この新しい pairing は，対称であり，非退化とは限らない上に，その値はある単数群の Galois cohomology 群にとる．このように，この新しい paring は一見扱い難いのであるが，本研究によって実はこの paring は考えている代数体の最大不分岐メタアーベル拡大のガロワ群の群論的な構造によって完全に決定されることが判明したため，逆にこの pairing からそのガロワ群の構造に関しても情報が得られることが分かった．詳しく言うと，この pairing はイデアルの単項化と，Artin 写像を用いて定義されているのであるが，それが最大不分岐メタアーベル拡大のガロワ群から群論的に定まる cohomology 群の cup 積で表せることを示したのでである．実際，イデアル類群の 2-part が(2,2)型のアーベル群の場合に，pairing の

様子から，最大不分岐メタアーベル 2-拡大のガロワ群がどのような構造を持つかをある程度判別できることも本研究によって判明した．この paring は岩澤理論的な状況，Z_p-拡大体上でも定義されるので，今後のその研究が非アーベル岩澤理論において非常に重要な役割を果たすと考えられる．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）
① 尾崎学， Construction of abelian fields of degree p with λ_p=μ_p＝0, Int. J. Open Probl. Comput. Sci. Math.に掲載予定，査読あり
② 尾崎学， Construction of maximal unramified p-extensions with prescribed Galois group, 数理解析研究所講究録 1521, pp150-155, (2006)，査読なし

〔学会発表〕（計２件）
① 尾崎学， Construction of maximal unramified p-extensions with prescribed Galois group, 日韓整数論セミナー2008, 2008 年 11 月 13 日，東北大学

② 尾崎学，与えられた p-群をガロワ群に持つ最大不分岐 p-拡大の構成 ，第 13 回早稲田大学整数論研究集会，2008 年 3 月 12 日，早稲田大学

６．研究組織
(1)研究代表者
尾崎　学（OZAKI MANABU）
近畿大学・理工学部・准教授
研究者番号：80287961