

平成 21 年 4 月 30 日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2006～2008

課題番号：18540102

研究課題名（和文） 大域的特異点論による多様体の構造の研究

研究課題名（英文） Study on the structure of manifolds by global singularity theory

研究代表者

佐久間 一浩（SAKUMA KAZUHIRO）

近畿大学・理工学部・教授

研究者番号：80270362

研究成果の概要：向き付け不可能な 4 次元微分可能閉多様体から安定平行化可能な 4 次元多様体へのジェネリック写像のカスプ特異点を消去するための一次障害類はトム多項式であり、二次障害類は、4 次のシュティーフエル・ホイットニー類であることを発見した。定義域が向き付け可能な場合は、カスプ特異点と臍点のトム多項式（2 次シュティーフエル・ホイットニー類と 1 次ポントリヤーギン類）が唯一の障害類である。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	900,000	0	900,000
2007 年度	700,000	210,000	910,000
2008 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	2,200,000	390,000	2,590,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：幾何学・微分トポロジー

キーワード：可微分写像、特異点、多様体、特性類、トム多項式

1. 研究開始当初の背景

可微分写像の特異点論は、Whitney, Thom による 1950 年代の研究に始まる。彼らは、「モース理論」の拡張として、モース関数の場合が値域の次元が 1 次元であるのに対して、値域が 2 次元、つまり 2 次元ユークリッド空間の可微分写像に現れる特異点を考察し、折り目特異点とカスプ特異点がジェネリックに現れることを突き止めた。Thom は、さらに、写像が適当なジェット横断性の条件を満たすときに、特異点のトム多項式概念を定義し、実際にそれが特性類の多項式で書けることを示した。トム多項式は、特異点を消去するための障害類を与えるが、1980 年

代になって、安藤良文（山口大）がジェット切断を拡張するための第一次障害類がトム多項式であるという解釈を与えた。その観点からは当然二次障害類があつてしかるべきであるが、それにはジェット・バンドルのファイバーのホモトピー型の決定というホモトピー論として難問があるため、二次以上の障害類については何も論ぜられることはなかった。一方で、1970 年頃、ロシアのエリアシュベルグが折り目写像（特異点としては折り目特異点のみをもつ可微分写像）の存在問題をホモトピー原理により解決した。この解は、ホモトピー群の任意の元が折り目写像をいつでも含むかという、マザーの問題の

対する完全な解答を含んでいた。さらに、21世紀に入って、安藤によりエリアシュベルグのホモトピー原理が2次のジェットレベルでのホモトピー原理に精密化された。また、私が提出した問題「向き付け可能な4次元閉多様体から3次元ユークリッド空間への折り目写像の存在のための必要十分条件を与えよ」に対して、2003年、2004年に佐伯修、Sadykovにより独立に異なる手法で解決された。この解は同時に(4, 3)次元対ではカusp特異点を消去するための二次障害類が存在することも明らかにした。

2. 研究の目的

多様体間の可微分写像の特異点の大域的な研究は、関数の場合の「モース理論」の拡張に該当する研究で、関数の場合に比べて写像の特異点の研究は難しいが、成果が得られればそれは意義深い。そこで、特異点を消去するための障害類を決定するのが目的である。微分可能写像の特異点論を通して、多様体の構造を調べる。特に、定義域多様体の次元が大きいまたは等しいときの良い写像の存在または障害の研究を行う。この場合、写像が沈め込みでない限り、一般に避けがたい特異点が生じる。写像が沈め込みならば、大抵はファイバー束と見なせるがそのときでさえ、ファイバー束の構造群が大きな群のときには、ファイバー束の分類は難しい問題である。我々の目的は、沈め込みとはならない場合、すなわち写像に特異点が生じる場合に、特異ファイバー構造をもつ多様体の構造を微分位相幾何学の観点から分類しようとするにある。特異点の近傍では、陰関数定理が成り立たないため、特異点の考察は局所的にも極めて難しい。そこで、現れる特異点型を折り目に限定して、特異ファイバー束の構造を調べるのが我々の主要問題である。これは、1950年代60年代に盛んであった「多様体の埋め込み・はめ込み問題」と方法論的には共通した問題意識に基づいている。値域の次元が平面の場合には、Thom-Levine-Eliashbergの定理により完全に解決している。さらに値域の次元が3次元の場合には、Sadykovにより定義域多様体が向き付け可能かつ次元が偶数で8次元以上ならば存在する。本研究課題では未解決の次元対(6, 3)や値域が4次元の場合の折り目写像の存在問題に取り組む。

3. 研究の方法

内在的微分を用いて定義されるであろう二次トム多項式概念の定式化と向き付け不可能なカテゴリにおける4次元多様体論との関連を調べることがその方法論となる。ジェット・バンドルと内在的微分を使って定義されるある部分バンドルの

ファイバーのホモトピー型の計算が重要である。部分バンドル上のジェット拡大の一次障害類はトム多項式である。そこで、トム多項式が消えている場合に、二次障害類を計算することが目標となる。このような結果が存在する例は、(4, 3)または(4, 6)次元対でしか見つかっていない。どちらも定義域多様体が向き付け可能な場合に限定されている。(4, 6)次元対の場合は、Smale-Hirschによるはめこみ写像のホモトピー原理による。Szucsは2004年に出版された論文の中で、こうした障害類がポストニコフ不変量として解釈できることを示した。一方で、(4, 4)次元対では無機づけられた4次元閉多様体の整係数二次コホモロジー群上で定義される交点形式の代数構造がその障害を与えていることが分かる。このときに、4次元多様体の向きへの入れ方は本質的で、例えば、複素射影平面とその向きを逆にしたものとの連結和の上では、特異点消去のための障害類は全く消えているが、複素射影平面の二つの連結和の上ではカusp特異点消去のための障害が存在する。したがって、多様体の向き付けあるいは向き付け不可能であることは問題を考察する上でのデリケートな条件付けとなっている。

4. 研究成果

滑らかな多様体間の無限階微分可能写像の特異点集合と定義域多様体の位相構造や微分構造の間には密接な関連がある。本研究では、60年代、70年代に確立されたトム、レビン、エリアシュベルグのカusp特異点解消定理の拡張版を考察した。彼らの結果は値域が2次元ユークリッド空間の場合の考察であるが、本研究では値域が3次元および4次元ユークリッド空間の場合の写像の特異点解消と定義域多様体の特徴付け定理を得るのが目的である。最近の3次元ポアンカレ予想の解決から、4次元ホモトピー球面から3次元ユークリッド空間への定値折り目写像が存在すれば、そのホモトピー球面は4次元球面に微分同相であることが従う。さらに、特異点集合は2次元球面に微分同相であるが、その埋め込みが滑らかに自明であることが分かる。定義域が4次元閉多様体のとき、4次元ユークリッド空間への折り目写像の存在のための必要十分条件は、向き付け可能ならば、安定平行化可能であることであり、向き付け不可能ならば、2次と4次Stiefel-Whitney類が消えることであるという特徴付けが得られる。特に、後者の場合は2次のStiefel-Whitney類はカusp特異点のThom多項式であるが、

4 次の Stiefel-Whitney 類は Thom 多項式とは直接関連しない障害類であり、Thom 多項式をジェット切断の第一次障害類の見なす立場からは第二次障害類が見いだされた例となる。実際、その証明は Postnikov 分解と障害理論に基づき、第二次障害類として上記のコホモロジー類が現れることが計算される。

(4, 5) 次元対でも二次障害類が存在することが分かった。向き付け可能な 4 次元閉多様体が 5 次元ユークリッド空間へはめ込み可能であるための必要十分条件は、4 次元多様体が安定平行化可能であることなの分かる。4 次元では、安定平行化可能であることと符号数が消えて、スピンであることは同値である。このことからただちに、例えば K^3 曲面はスピンだが符号数は 16 で、0 でないので、はめ込みは存在しない。一方、5 次元へのジェネリックな写像は 1 次元の特異点集合となるホイットニー傘特異点が一般に現れるが、そのトム多項式はいつでも消えていることが計算できる。したがって、 K^3 曲面からのジェネリック写像には符号数が消えない (すなわち、ポントリャーギン類が消えない) ことから、トム多項式は消えているが、特異点は消せない二次障害類がポントリャーギン類であることが従う。

値域の次元が 3 次元の場合の折り目写像が存在するための必要十分条件を求める問題がほぼ完全に解決した。定義域が 4 次元の場合は、すでに解決しているので、問題は 5 次元以上である。5 次元以上の奇数次元では、カusp 特異点のトム多項式が唯一の障害類であることが分かった。特に、 $(4m+3)$ 次元の場合は、カusp 特異点のトム多項式が消えているので、いつでも折り目写像が存在することになる。5 次元では、多様体がスピンならばカusp のトム多項式が消えているので、いつでも折り目写像が存在することが従う。一方、6 次元以上の偶数次元の場合が問題は微妙で、向き付け可能な 8 次元以上ならば、Sadykov により彼による Chess 予想の解決の方法論の拡張で、カusp 特異点のトム多項式が消えていて、折り目写像がいつでも存在することが示された。筆者は、6 次元の場合を考察して、(向き付け可能性の仮定なしに) オイラー標数が偶数で、カusp 特異点のトム多項式が消えているならば、折り目写像が存在することが証明できた。しかし、例えば 6 次元実射影空間から 3 次元ユークリッド空間への折り目写像が存在するかどうかはわからない。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① K. Sakuma, Existence problem for fold maps, JARCS Proceedings, World Scientific Publ., 2007, pp. 342-387.
- ② T. Ootsuka, K. Sakuma, Braid groups and topological quantum computing, World Scientific Publ., 2008, pp. 55-89.
- ③ K. Sakuma, A note on a recursive formula on the Arf-Kervaire invariant, Int. J. Open Problems Compt. Math., vol.1, 2008, pp. 66-70.

[学会発表] (計 7 件)

- ① K. Sakuma, Existence problem of fold maps, International Singularity Conference at Beijing Chemical Institute of Technology, China, 2006 年 5 月.
- ② K. Sakuma, Global Singularity Theory, Colloquim Talk in Math. Department of Brigham Young University, U. S. A., 2006 年 9 月.
- ③ R. Sadykov, O. Saeki, K. Sakuma, Obstruction to eliminating singularities, 日本数学会春季総合年會、トポロジー分科會、埼玉大学、2007 年 3 月.
- ④ K. Sakuma, Braid groups and topological quantum computing, TQC symposium at Kinki University, 2007 年 8 月.
- ⑤ 佐久間一浩、平方剰余法則とアレキサンダー多項式の特異値、トポロジーセミナー、九州大学、2008 年 4 月.
- ⑥ K. Sakuma, A question on the special value of Alexander polynomial, KOOK セミナー、大阪市立大学、2008 年 5 月.
- ⑦ 佐久間一浩、A recursive formula of the Arf-Kervaire invariant、日本数学会春季総合年會、トポロジー分科會、東京大学、2009 年 3 月.

[図書] (計 2 件)

- ① 青木貴史・大野泰夫・尾崎学・佐久間一浩・中村弥生、「微分積分学 28 講」、培風館、2009 年.
- ② 青木貴史・大野泰夫・尾崎学・佐久間一浩・中村弥生、「線形代数学 28 講」、培風館、2009 年.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

佐久間 一浩 (SAKUMA KAZUHIRO)

近畿大学・理工学部・教授

研究者番号：80270362

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし