

平成 21 年 4 月 14 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2006 年度～2008 年度

課題番号：18540197

研究課題名 (和文) 微分方程式系の完全 WKB 解析

研究課題名 (英文) Exact WKB analysis of systems of differential equations

研究代表者

青木 貴史 (AOKI TAKASHI)

近畿大学・理工学部・教授

研究者番号：80159285

研究成果の概要：大きなパラメータを自然な形で含む連立非線型微分方程式系の形式解を構成するためには、主要部を決定する代数方程式系を解く必要がある。方程式の階数や方程式の個数が大きい場合は代数方程式系が複雑なものとなり、一見したところでは主要部が決定可能かどうかの判定は困難である。本研究では、この問題に関して主要部が決定可能であることを保証する幾つかの条件を与えた。これらの条件を実際の例に適用して重要な方程式系に対する形式解の存在が証明された。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	1,300,000	0	1,300,000
2007 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	630,000	4,030,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：正則列，フックス型微分方程式，超幾何微分方程式，多重ゼータ値，インスタントン解，完全 WKB 解析，モノドロミー行列，形式解

1. 研究開始当初の背景

完全 WKB 解析とは A. Voros により提唱された解析方法で、4 次のポテンシャルをもつシュレディンガー方程式の解析に用いられ

た。量子力学創成期に考案された WKB 法を厳密化し、形式解のボレル変換・ボレル和を通じて解析的解の性質を研究するのが完全 WKB 解析である。1983 年に Voros が発表

して以来、F. Pham や E. Derabaere らによっても活発に研究されたが、90年に佐藤幹夫、河合隆裕、竹井義次と申請者・青木の共同研究によりこの方法は2階フックス型線型常微分方程式に応用され一般的条件のもとにモノドロミー行列を計算することに成功した。通常はアクセサリーパラメータと呼ばれる大域的パラメータが実は完全WKB解の主部が定めるリーマン面の種数の個数だけあり、そのリーマン面の周期積分にあたるものが解明された。このような構造は、大きなパラメータを微分方程式に自然に導入して初めて浮かび上がる点が興味深い。続いて、河合・竹井・青木は高階（3階以上）の線型常微分方程式の完全WKB解析を試み、変わり点の近傍における局所理論の確立に成功した。さらには「仮想変わり点」の概念を導入し Berk-Nevins-Roberts が1982年に発見した「新しいストークス曲線」の「発生源」を突きとめた。最近、C. Howls, A. Olde Daalhuis らによる、ある種の偏微分方程式や積分表示をもつ関数の漸近解析において新しいストークス曲線が注目されている。彼らは「2次のストークス曲線」の導入を提唱しているが、この曲線も「仮想変わり点」を通して本質が理解できる。もちろん、高階線型常微分方程式の大域的漸近解析は多くの困難な問題を含み、未だにその全容は明らかではないが、最近の研究によってかなり解明が進んだと言える。たとえば、変わり点付近の局所理論に関しては青木・河合・小池・竹井 (Advances in Math., 2004)によって標準型が与えられ、局所的な接続公式が得られた。この論文では、同時に無限階微分方程式に対して完全WKB解の構成も併せて議論されており、単独線型の場合に通常変わり点近傍での局所理論は完成したと言える。これらの議論は青木・河合・小池・竹井(Ann. Inst. Fourier,

2004)で擬微分方程式に拡張された。この分野に関してこれらの結果は他の追随を許さない先進的なものとなっている。大域解析については青木・河合・竹井(Journal of Math. Phys., 2001)で与えられた「完全最急降下法」がある。これは、ラプラス積分による解の表示を一般化して多項式係数線型常微分方程式の解の大域解析を行う方法であり、原理的には係数の次数が高々2の場合には大域挙動が解析可能であることが判った。「仮想変わり点」の応用としては量子力学における固有値のレベル交叉に関する遷移確率の計算がある(青木・河合・竹井 Journal of Physics, 2002)。完全WKB解析の有効性は線型微分方程式に留まらない。パンルヴェ方程式に対して河合・竹井による完全WKB解の局所理論、青木・河合・竹井によるインスタント解の構成、竹井による接続係数の計算等は N. Joshi, M. Kruskal らによるパンルヴェ方程式の漸近解析と相まってパンルヴェ超越関数の解析に新たな切り口を与えた。この方向での研究は現在、パンルヴェ階層に属する高階非線型微分方程式の解析に向かっており河合、竹井、小池、西川、佐々木らによりPI階層、野海山田方程式を中心にLax系と非線型方程式のストークス幾何の関わり、「仮想変わり点」の役割等に関して盛んに研究が行われている。

2. 研究の目的

当研究は大きなパラメータを持つ微分方程式系に対する完全WKB解析の基礎理論を確立し、その解として定まる関数の解析を行うことを目標とした。主な研究対象は高階パンルヴェ方程式系（非線型常微分方程式系）およびホロノミック系（線型偏微分方程式系）の2つに分けられるが、元来パンルヴェ方程式は線型微分方程式のモノドロミー保存変形から得られたので、両者は密接に関係してい

る。いずれの場合も完全WKB解析を主な解析手段とするので、自然な形で大きなパラメータを導入した方程式系を考える。具体的には前者に係わる研究目的として

- (1) 完全WKB解（零パラメータ解）の構成
 - (2) 零パラメータ解の個数の評価
 - (3) 零パラメータ解の主部が定めるリーマン面の解析
 - (4) 零パラメータ解相互の関係の解明
 - (5) 一般WKB解（インスタント解）の構成
 - (6) ストークス現象の解析
- を当初設定した。また、後者、すなわち線型方程式に係わる研究に関しては、
- (7) 完全WKB解の定式化と構成
 - (8) 変わり点およびストークス曲線の定式化と解析
 - (9) 大域的接続問題の解析と接続公式の計算
 - (10) 接続公式の応用等の研究
- を目的とした。

3. 研究の方法

研究対象となる微分方程式の適切なサンプルに対して数式実験および数値実験を行い、注目した構造に関する情報を集める。得られた情報を解析して数学的構造を見出す。その構造の普遍性を更に他のサンプルで検証し、確証が得られた段階で数学的証明を与える。基本的にはこの手順の繰り返しで研究成果を得た。個々の問題に関しては研究分担者、連携研究者とのディスカッションを通じて解決の糸口を見出した。具体的には代数幾何的方法、多重スケール解析の方法、階乗を含む級数に対する優級数の方法等を活用した。

4. 研究成果

(1) 緩正則列の概念を導入し、それを利用して大きなパラメータを含む野海・山田系の完全WKB解（零パラメータ解）の主要部が代

数方程式系の解として定まることを証明した。併せて零パラメータ解の個数の評価と零パラメータ解の主部が定めるリーマン面の構造を明らかにし、零パラメータ解が構成可能であることを証明した。

(2) 緩正則列の概念を重み付きで次数を測った多項式系に適用可能であることを見出し、その応用としてパンルヴェ階層に属する高階微分方程式系に対して、その零パラメータ解の主部が代数方程式系の解として確定することを証明し、零パラメータ解が構成可能であることを示した。また、I型パンルヴェ階層の4階方程式についてはインスタント解が構成可能であることを示した。

(3) 微分方程式の解の接続公式の応用として、高さと深さが等しい等号付き多重ゼータ値の重さと深さを固定した和がリーマンゼータ値の有理係数多項式で書けることを証明した。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計8件）

- ① T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei, The Bender-Wu analysis and the Voros theory. II, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, **54** (2009), 19–94. 査読有
- ② T. Aoki, Y. Kombu and Y. Ohno, A generating function for sums of multiple zeta values and its applications, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **136** (2008), 387–395. 査読有
- ③ T. Aoki and N. Honda, Principally tame regular sequences associated with the fourth Painlevé hierarchy with a large parameter, *Proceedings of the Japan Academy*, **84**, Ser. A (2008), 42–47. 査読有
- ④ T. Aoki, Multiple-scale analysis for

higher-order Painlevé equations, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B5** (2008), 89–98. 査読有

⑤ T. Aoki and T. Iizuka, Monodromy matrices of a second order Fuchsian differential equation with five singular points, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B5** (2008), 117–127. 査読有

⑥ Y. Matsui and K. Takeuchi, Topological Radon transforms and their applications, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B5** (2008), 225–240. 査読有

⑦ Y. Nakamura, On invariants of Reiffen's isolated singularities, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B5** (2008), 7–13. 査読有

⑧ T. Aoki and N. Honda, Regular sequences associated with the Noumi-Yamada equations with a large parameter, *Algebraic Analysis of Differential Equations*, T. Aoki, H. Majima, Y. Takei and N. Tose (Eds.), Springer, 2008, pp. 45–53. 査読有

[学会発表] (計 6 件)

① 青木貴史, Introduction to the symbol theory of pseudodifferential operators, RIMS 共同研究 無限階擬微分作用素の超局所解析と漸近解析 (代表者 青木貴史), 2009 年 2 月 13 日, 京都

② 青木貴史, 多重ゼータ値と超幾何関数, RIMS 共同研究 微分方程式のモノドロミーをめぐる諸問題 (代表者 木村弘信), 2009 年 2 月 3 日, 京都

③ T. Aoki, Tame regular sequences and applications, Holomorphic partial differential equations, small divisors and summability, CIRM, 1 February 2008, Luminy

④ T. Aoki, Construction of formal solutions of Painlevé hierarchies, Workshop on Theoretical and Applied Sciences, 5 March 2007, Rome

⑤ 青木貴史 高階 Painlevé 方程式の多重スケール解析, RIMS 研究集会 微分方程式系の代数解析と完全 WKB 解析 (代表者 青木貴史), 2006 年 12 月 12 日, 京都

⑥ T. Aoki, Sum relations for multiple zeta values and the Gauss hypergeometric function, Applied Asymptotics and Modeling, ICMS, 26 June 2006, Edinburgh

[図書] (計 1 件)

① T. Aoki, H. Majima, Y. Takei and N. Tose (Eds.), *Algebraic Analysis of Differential Equations*, Springer, 2008

6. 研究組織

(1) 研究代表者

青木 貴史 (AOKI TAKASHI)

近畿大学・理工学部・教授

研究者番号: 80159285

(2) 研究分担者

本多 尚文 (HONDA NAOFUMI) (平成 18・19 年度)

北海道大学大学院・理学研究院・准教授

研究者番号: 00238817

大野 泰生 (OHNO YASUO) (平成 18 年度)

近畿大学・理工学部・准教授

研究者番号: 70330230

中村 弥生 (NAKAMURA YAYOI) (平成 18・19 年度)

近畿大学・理工学部・講師

研究者番号: 60388494

松井 優 (MATSUI YUTAKA) (平成 20 年度)

近畿大学・理工学部・講師

研究者番号: 10510026

(3) 連携研究者

本多 尚文 (HONDA NAOFUMI) (平成 20 年度)

北海道大学大学院・理学研究院・准教授

研究者番号: 00238817

中村 弥生 (NAKAMURA YAYOI) (平成 20 年度)

近畿大学・理工学部・講師

研究者番号: 60388494