学位論文審査結果の報告書

氏　　名	新井　富裕
生年月日	昭和　60年　5月　28日
本籍（国籍）	富山県
学位の種類	博　士　（工　学）
学位記番号	産　第　45　号
学位授与の条件（博士の学位）	学位規程第５条該当
論文題目	On modular relations

審査委員

（主　査）	金光　滋	印
（副主査）	中野　吉正	印
（副主査）	塚田　春雄	印
（副　査）		印
（副　査）		印

論文内容の要旨

ノルムの定義されるあらゆる対象に対し，ゼータ関数Z(s)が右半平面$\sigma := \mathrm{Re}\, s >> 0$で定義され，多くの場合全平面に有理型関数に解析接続される．その際，左半平面への接続を与えるものが，ゼータ対称性というゼータ関数の対称性を表す関数等式である．これまで知られてきた多くのゼータ関数の場合，$\sigma > 1$でディリクレ級数で定義されたゼータ関数に対し，右半平面から左へ何らかの方法で解析接続され，その後，関数等式による折り返しによって，左半平面$\sigma < 0$に接続されるという段階をとる．この$0 < \sigma < 1$の帯状の部分一臨界領域一は多くの場合非常に複雑であり，リーマン以来150年以上たった今日でもほとんど手つかずの状態である．臨界領域の考察には，右半平面においてオイラー積をもつ状況が必要であり，ここにゼータ関数はオイラー積をもつ場合と持たない場合の二種類に大別される．オイラー積をもつ場合は主に数論的対称であり，必ずしも仮定しない場合は，広く科学全般に応用がある．リーマンが1859年の論文で導入したリーマンゼータ関数$\zeta(s)$はオイラー積をもつ数論的なゼータ関数の最も根源的例であり，臨界領域における無限この零点は中心線$\sigma = \frac{1}{2}$上にすべて位置するであろうというリーマン予想は，数学における未解決問題の最右翼に属する．

本論文では，オイラー積を仮定しない場合に関数等式と同値な等式一モジュラー関係式一を，フォックスH-関数の範囲で網羅的に求めることを目的とする．とはいえ，ゼータ関数のクラスは巨大なものであり，その片鱗を垣間見ることでさえ不可能に近い．そこで，本論文では，代数体Ωのデデキンドゼータ関数$\zeta_\Omega(s)$を主な対象とし，さらに，Ωの拡大次数が≤ 2の場合に現今知られているすべてのモジュラー関係式を同定・導出し，応用を述べる．その際，H. コーエン，A.F. ラヴリック等に従って，虚2次体の場合，尖点形式に付随するゼータ関数，定値2項2次形式に付随するいわゆるエプシュタインゼータ関数に関する結果を網羅する．実2次体の場合は，不定値2項2次形式に付随するエプシュタインゼータ関数ならびにディリクレ約数問題をも含むような議論の展開をおこなう．ディリクレの約数問題は$d(n) = \sum_{d|n} 1$一nの約数の個数一の総和関数$\sum_{n \le x} d(n)$の漸近式を求めるものであるが，$d(n)$の生成関数が$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta^2(s)$であることか

ら，実２次体のデデキンドゼータ関数として扱うことができる．

金光－塚田近刊「ゼータ関数大全Ｉ－モジュラーリレイションシュープリマシー」においては，関数等式に加えてプロセシングガンマ関数をかけわせて加工したモジュラー関係式の一般形を求めているが，本論文では，まず，プロセシングガンマ関数のない，アンプロセストモジュラー関係式を上記デデキンドゼータ関数の場合に求めた．その際，N．S．コシュリャコーフの導入した幾つかの特殊関数 X,Y,K,L－関数が重要な役割を果たす．本論文ではこれらの特殊関数を同定し，表示などを導出した．X－関数を用いた場合，リーマンゼータ関数の場合，保型関数の中でもっとも基本的な楕円シータ関数の変換公式が，虚２次体の場合，尖点形式の変換公式が得られる．さらに，ラマヌジャンの公式でパラメタが極限とした場合には，最も重要なデデキンドエータ関数の変換公式も得られる．実２次体の場合は，マクドナルドの公式に至り，翻って，マース波動形式の変換公式に至る．

X－関数を用いた場合，とくに虚２次体に対応する場合 Y－関数がサイナスカルディナリス関数に帰着するため，情報理論でよく知られたシャノンの信号サンプリング定理に対応する結果が得られる．

K－関数の場合がコシュリャコーフ理論の白眉であり，変形ベッセル関数の類似物が現れる．論文では，コシュリャコーフの結果を拡張・訂正し，モジュラ関係式を一般的観点からすべて導出した．

さらに，K－関数の場合の結果を用いて，ラマヌジャンの公式として知られている積分形のモジュラー関係式をすべて一般的な観点から導出した．

論文では，有理数体，虚２次体のデデキンドゼータ関数は，統一的に扱えるよう，関数等式に現れるガンマ因子は $\Gamma(Cs)$ 型の一般なものとして扱った．これにより，ハンブルガーの定理などへの応用が可能となる．さらに，加工型モジュラー関係式も多く求め，合流型超幾何関数係数，イーワルド展開等，これまで知られてきた多くのモジュラー関係式を統一的に導出し，それらの同定，一般化を行った．

論文審査結果の要旨

研究対象となる系Oにおいて，2 つの元の間の近さ―ノルム―を測ることはその 2 元の違いを知るために本質的である．各元aに対しノルムNaが定義されるあらゆる対象$O=\{a\}$に対し，複素変数$s=\sigma+jt$の関数としていわゆるゼータ関数がディリクレ級数$Z(s)=\sum_{a\in O}\frac{1}{(Na)^s}$によって定義される．ゼータ関数は，最初右半平面$\sigma=\mathrm{Re}\,s>>0$（十分大）で定義され，多くの場合，全平面に有理型関数に解析接続される．数学のみでなく，自然科学・工学の多くの分野でゼータ関数を考察することで，その対象に関する豊饒な結果が得られて来ている．その際，左半平面への接続を与えるものが，ゼータ対称性ともいうべきゼータ関数の対称性を表す関数等式である．これまで知られてきた多くのゼータ関数の場合，（たとえば）$\sigma>1$でディリクレ級数によって定義されたゼータ関数に対し，右半平面から左へ何らかの方法で解析接続され，その後，関数等式による折り返しによって，左半平面$\sigma<0$に接続されるという段階をとる．この$0<\sigma<1$の帯状の部分―臨界領域―は多くの場合非常に錯綜を極めており，リーマン以来 150 年以上たった今日でも，ヴェイユ等による結果を除いて，ほとんど手つかずの状態である．臨界領域の考察には，右半平面においてオイラー積をもつ状況が必要であり，ここにゼータ関数はオイラー積をもつ場合と持たない場合の二種類に大別される．オイラー積をもつ場合は主に数論的対称であり，必ずしも仮定しない場合は，広く科学全般に応用がある．リーマンが 1859 年の論文で導入したリーマンゼータ関数$\zeta(s)$はオイラー積をもつ数論的なゼータ関数の最も根源的例であり，臨界領域における無限個の零点は中心線$\sigma=\frac{1}{2}$上にすべて位置するであろうというリーマン予想は，数学における未解決問題の最右翼に属する．

本論文では，オイラー積を仮定しない場合に関数等式と同値な等式―モジュラー関係式―を，フォックスH-関数の範囲で網羅的に求めることを目的としている．とはいえ，ゼータ関数のクラスは巨大なものであり，その片鱗を垣間見ることでさえ不可能に近い．本論文では，代数体Ωのデデキンドゼータ関数$\zeta_\Omega(s)$を主な対象とし，さらに，Ωの拡大次数が≤ 2の場合に現今知られているすべてのモジュラー関係式を同定・導出し，応用を

論文審査結果の要旨

述べている．その際，H. コーエン，A. F. ラヴリック等に従って，尖点形式に付随するゼータ関数，定値 2 項 2 次形式に付随するいわゆるエプシュタインゼータ関数に関する結果を，虚 2 次体のデデキンドゼータ関数の場合とみなすことですべて網羅している．実 2 次体の場合は，不定値 2 項 2 次形式に付随するエプシュタインゼータ関数ならびにディリクレ約数問題をも含むような議論の展開をおこなっている．ディリクレの約数問題は $d(n)=\sum_{d|n}1$ —n の約数の個数—の総和関数 $\sum_{n\le x}d(n)$ の漸近式を求めるものであるが，$d(n)$ の生成関数が $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{n^s}=\zeta^2(s)$ であることから，実 2 次体のデデキンドゼータ関数として扱っている．

金光-塚田近刊「ゼータ関数大全 I —モジュラーリレイションシュープリマシー」においては，関数等式に加えてプロセシングガンマ関数をかけわせて加工したモジュラー関係式の一般形を求めているが，本論文では，まず，プロセシングガンマ関数のない，アンプロセストモジュラー関係式を上記デデキンドゼータ関数の場合に求めている．その際，N. S. コシュリャコーフの導入した幾つかの特殊関数 X,Y,K,L -関数が重要な役割を果たす．本論文ではこれらの特殊関数を同定し，表示などを導出している．

(i) X -関数を用いた場合．リーマンゼータ関数の場合，保型関数の中でもっとも基本的な楕円シータ関数の変換公式が，虚 2 次体の場合，尖点形式の変換公式が得られる．さらに，ラマヌジャンの公式でパラメタが極限とした場合には，最も重要なデデキンドエータ関数の変換公式も得られる．実 2 次体の場合は，マクドナルドの公式に至り，翻って，マース波動形式の変換公式に至る．

(ii) Y -関数を用いた場合．虚 2 次体に対応する場合，Y -関数がサイナスカルディナリス関数に帰着するため，情報理論でよく知られたシャノンの信号サンプリング定理に対応する結果が得られている．

(iii) K -関数の場合がコシュリャコーフ理論の白眉であり，変形ベッセル関数の類似物が現れる．論文では，コシュリャコーフの結果を拡張・訂正し，モジュラ関係式を一般的観点からすべて導出している．

(iv) さらに，K -関数の場合の結果を用いて，ラマヌジャンの公式として知られている積分形のモジュラー関係式をすべて一般的な観点から導出して述べている．

論文審査結果の要旨

ガンマ因子は$\Gamma(Cs)$型の一般なものも扱っている．これにより，ハンブルガーの定理などへの応用が可能となる．さらに，加工型モジュラー関係式も多く求め，リース和の応用等，これまで知られてきた多くのモジュラー関係式を統一的に導出し，それらの同定，一般化を行っている．

本論文の内容は，第７回日中セミナー報告集に64ページの長途論文として掲載され，通常論文の優に５編に相当する，したがって学位論文に相当するものと認める．