平 成 2 5 年 度

博 士 学 位 論 文

内 容 の 要 旨

及 び

審 査 結 果 の 要 旨

(平成 26 年 3 月)

近畿大学大学院

総合理工学研究科

学位論文審査結果の報告書

氏　　名	西本　美香
生年月日	昭和・平成61年　4月　9日
本籍（国籍）	大阪府
学位の種類	博　士（　理　学）
学位記番号	理　第　79　号
学位授与の条件（博士の学位）	学位規程第５条該当
論文題目	Parametric Stokes phenomena of the Gauss hypergeometric differential equation with a large parameter

審査委員

（主　査）	青木　貴史	印
（副主査）	大野　泰生	印
（副主査）	中村　弥生	印
（副　査）		印
（副　査）		印

論文内容の要旨

本論文に含まれる主な結果は4つ挙げられる．まず，Gaussの超幾何微分方程式に大きなパラメータを導入した方程式のStokes曲線のグラフ論的な特徴付けをパラメータにより記述した．次に，この方程式の3つの確定特異点それぞれに関してVoros係数と呼ばれる形式的べき級数を定義し，その具体形を求めた．続いて，これらの形式的べき級数がある領域でBorel総和可能であり，領域ごとにそのBorel和の具体形を求めた．最後にこの結果を用いて超幾何微分方程式のWKB解に対してパラメータに関するStokes現象を記述する公式を見出した．以上の結果をより詳しく述べる．

序章に続いて第2章では大きなパラメータを持つGaussの超幾何微分方程式が定式化される．Gaussの方程式

$$x(1-x)\frac{d^2w}{dx^2}+(c-(a+b+1)x)\frac{dw}{dx}-abw=0$$

において大きなパラメータηを$a=\frac{1}{2}+\alpha\eta$, $b=\frac{1}{2}+\beta\eta$, $c=1+\gamma\eta$とおいて導入する．ここでα, β, γは複素数の定数である．さらに未知関数の変換を行い，上の方程式から1階項を消去すると，次の方程式を得る：

$$\Big(-\frac{d^2}{dx^2}+\eta^2Q(x)\Big)\psi=0$$

ここで，$Q=Q_0+\eta^2Q_1$，ただし，

$$Q_0(x)=\frac{(\alpha-\beta)^2x^2+2(2\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma)x+\gamma^2}{4x^2(x-1)^2},\quad Q_1(x)=-\frac{x^2-x+1}{4x^2(x-1)^2}$$

である．本論文ではこの方程式を考察している．出発点となるのはWKB解と呼ばれる形式解である．それはこの方程式の形式解で

$$\psi_\pm=\frac{1}{\sqrt{S_{\mathrm{odd}}}}\exp\left(\pm\int S_{\mathrm{odd}}dx\right)$$

の形を持つものである．ここでS_{odd}は方程式に付随するRiccati方程式$S_x+S^2=\eta^2Q$のη^{-1}に関する形式的べき級数解の奇数次部分である．この形式解は，パラメータに関する一般的な条件の下にStokes曲線で囲まれた領域（これをStokes領域という）においてBorel総和可能となることが知られている．

Stokes曲線の形状は，各特異点$0, 1, \infty$に流れ込むStokes曲線それぞれの本数によりグラフ論的に分類される．この本数を3つ並べた(n_0,n_1,n_2)をStokes曲線全体の成すグラフの指数と呼ぶ．Stokes曲線が非退化である場合に，指数には4通りの可能性があることは過去の研究で知られていた．本論文では(α,β,γ)空間（複素3次元Euclid空間）の中に和が稠密となる4つの領域Π_1からΠ_4を定め，それぞれの領域が4通りの指数に対応することを見出した．すなわち，超幾何微分方程式に対するStokesグラフのタイプをパラメータによって特徴付けた．これが第1の結果(Theorem 3.2)であり，第3章で与えられている．

第4章では超幾何微分方程式のVoros係数が定義され，その具体形が与えられる．C_0, C_1, C_2をそれぞれ特異点$b_0=0$, $b_1=1$, $b_\infty=\infty$から出発し，単純変わり点（Q_0の単純零点）を回り，出発点に戻る周回路とする．S_{odd}は，各特異点において，その主部S_{-1}と同じく単純極を持ち，留数は等しい．従って次の積分は形式的べき級数として意味を持つ：

$$V_j=\frac{1}{2}\int_{C_j}(S_{\mathrm{odd}}-S_{-1})dx \quad (j=0,1,2)$$

これを特異点 b_j の Voros 係数と呼ぶ．本論文の第 2 の主結果は V_j の形式的べき級数としての具体形を完全に求めたことである．例えば原点 b_0 の Voros 係数 $V_0=V_0(\alpha,\beta,\gamma;\eta)$ は

$$V_0=-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n\eta^{1-n}}{n(n-1)}\left\{(1-2^{1-n})\left(\frac{1}{\alpha^{n-1}}+\frac{1}{\beta^{n-1}}+\frac{1}{(\gamma-\alpha)^{n-1}}+\frac{1}{(\gamma-\beta)^{n-1}}\right)+\frac{2}{\gamma^{n-1}}\right\}$$

となる (Theorem 4.2)．これを求める方法は、まず V_j を特徴付ける差分方程式系を導出し，次にその差分方程式系を形式的無限階微分作用素を用いて解く，というものである．V_0 を特徴付ける差分方程式系のうち α に関するものは

$$\begin{aligned}V_0(\alpha+\eta^{-1},\beta,\gamma;\eta)-V_0(\alpha,\beta,\gamma;\eta)&=\frac{1}{2}\log\frac{\alpha+\frac{1}{2}\eta^{-1}}{\gamma-\alpha-\frac{1}{2}\eta^{-1}}-\frac{\eta}{2}\Big\{-\alpha\log\alpha\\&+(\alpha+\eta^{-1})\log(\alpha+\eta^{-1})-(\gamma-\alpha)\log(\gamma-\alpha)+(\gamma-\alpha-\eta^{-1})\log(\gamma-\alpha-\eta^{-1})\Big\}\end{aligned}$$

という形をしている．同様に β,γ に関する差分方程式を導出し，それを解いて V_0 を得る．同様に V_1, V_2 も得られる．

第 5 章では，第 4 章で求めた Voros 係数の Borel 和可能性を論じている．パラメータ空間における Stokes 領域の連結成分ごとに各 Voros 係数が Borel 総和可能であり，それらの Borel 和が具体的にガンマ関数を用いて書き下せることを示した．例えば，上で例示した V_0 のある Stokes 領域での Borel 和は

$$\frac{1}{2}\log\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+(\gamma-\beta)\eta)\Gamma^2(-\gamma\eta)(-\alpha)^{-\alpha\eta}(-\beta)^{-\beta\eta}(\alpha-\gamma)^{(\alpha-\gamma)\eta}\eta}{\Gamma(\frac{1}{2}-\alpha\eta)\Gamma(\frac{1}{2}-\beta\eta)\Gamma(\frac{1}{2}+(\alpha-\gamma)\eta)(\gamma-\beta)^{(\gamma-\beta)}(-\gamma)^{-2\gamma\eta-1}}$$

となる (Theorem 5.3)．連結成分は合計 32 あり，それぞれについて 3 つの Voros 係数の Borel 和 96 通りをすべて計算している．それらはすべて異なるわけではなく，同じものや符号のみ違うものなど，本質的に同じものも見られる．第 6 章は，これらの関係を調べることから始まる．本質的に同じ Borel 和の関係，特に符号の変化に関する規則をすべて明らかにしている (Theorem 6.1)．なお，Borel 和の具体形は一部 Appendix で与えられている．続いて第 6 章では Voros 係数に関してパラメータ空間において隣接する Stokes 領域で求めた 2 通りの Borel 和の関係について調べている．上で Borel 和を取った領域に隣接するある領域では Borel 和が

$$\frac{1}{2}\log\frac{\Gamma^2(-\gamma\eta)(-\alpha)^{-\alpha\eta}(-\beta)^{-\beta\eta}(\alpha-\gamma)^{(\alpha-\gamma)\eta}(\beta-\gamma)^{(\beta-\gamma)\eta}2\pi\eta}{\Gamma(\frac{1}{2}-\alpha\eta)\Gamma(\frac{1}{2}-\beta\eta)\Gamma(\frac{1}{2}+(\alpha-\gamma)\eta)\Gamma(\frac{1}{2}+(\beta-\gamma)\eta)(-\gamma)^{-2\gamma\eta-1}}$$

という形を持つ．これらを比較すると，差が単純な指数関数で書けることが分かる (Theorem 6.2)．この結果を用いると，もとの方程式の WKB 解のパラメータに関する Stokes 現象が記述可能となる．例えば，上に挙げた 2 つの Stokes 領域に対応する方程式の WKB 解の Borel 和を $\psi^{\mathrm{I}}_{\omega_1}$, $\psi^{\mathrm{I}}_{\omega_2}$ と書くことにすると，これらの間には $\psi^{\mathrm{I}}_{\omega_1}=(1+\exp(2\pi i(\gamma-\beta)\eta))^{-\frac{1}{2}}\psi^{\mathrm{I}}_{\omega_2}$. という関係が成り立つ (Theorem 6.3)．変わり点同士が Stokes 曲線が結ばれるタイプの退化を挟んで引き起こされるすべての場合について，これに相当する式を導出している．これにより，同タイプのパラメータに関する Stokes 現象が完全に記述された．

論 文 審 査 結 果 の 要 旨

超幾何関数および超幾何微分方程式は300年近い歴史をもち，現在でもなお新しい結果が生まれつつある重要かつ興味深い研究対象である．現代の科学技術を支えてきた種々の特殊関数の理論の土台が超幾何微分方程式である．本研究の成果は，汲めども尽きぬ超幾何微分方程式の深遠なる世界に新たなる光を投じる．以下，本論文の4つの主要結果および関連結果の意義について述べる．

第1の主結果は，超幾何微分方程式に大きなパラメータを自然に導入した際に付随して現れるStokes曲線のグラフ論的な分類の特徴付けを超幾何微分方程式固有のパラメータの領域と対応付けるという方法で行った．既存の研究では，Stokes曲線のグラフ論的分類は，Stokes曲線が各特異点に何本流れ込むかを勘定して得られる次数列 (order sequence，本論文ではindexと呼んでいる) として，どのようなものが現れ得るか，ということのみが研究され，非退化の場合には4通りとなることが知られていた．本論文のTheorem 3.2では，この4通りの次数列が超幾何微分方程式のパラメータ (α,β,γ) のなす3次元複素ユークリッド空間の中の領域と対応し，その領域が完全に記述可能であることが示されている．これらの領域の和集合はパラメータ空間の中で開かつ稠密となり，退化する場合以外のすべての場合を尽くしている．このようなことが可能であることは関連分野の研究者も予想しなかったが，申請者は修士論文で得た超幾何微分方程式のStokes曲線の退化に関する研究成果から出発し，多くの数値実験を繰り返すうちにこの事実を発見し証明を行った．この結果は本論文のこの後に続く研究の基盤を与えるものである．すなわち，この結果により超幾何微分方程式の形式解のパラメータに関するStokes現象が起こる場所を特定したという意義を持ち，そのStokes現象を記述するという次の問題に繋がった．

第2の結果で与えられているVoros係数は，超幾何微分方程式に対して本論文で初めて定式化されたものである．Weber方程式や退化Whittaker方程式に対するVoros係数は既存の研究で与えられており，形式解のパラメータに関するStokes現象を解析するために基本的な概念であった．これらはいずれも不確定特異点に対するVoros係数を定義するもので，確定特異点に対して対応する概念が定義可能であることは，本論文において初めて示された．この点だけでも興味深い事実である．さらに，本論文ではその具体形を3つの確定特異点すべてに対して与えている．具体的表示を求めるための方法の出発点は既存のWeber方程式や退化Whittaker方程式の研究で用いられたアイデアを超幾何微分方程式に拡張したものである．すなわち，昇降演算子を用いてパラメータに関する差分方程式を求めている．実際の計算は既存研究と比較して格段に複雑である．たとえばRiccati方程式の解の主要部分の積分の実行だけでも，相当な注意深さが要求されるものとなっている．しかも，複素領域における多価関数の周回積分を考えるため分枝の取り方にも配慮が必要となる．本論文では，これらを正確に実行している．さらに，既存の研究ではパラメータが1つのみであったのに対し，超幾何微分方程式では3つのパラメータがあるため，それに応じて複雑となる．単なる見かけ上の複雑さに留まらず，この差分方程式を解くためには既存の手法が使えないという本質的困難が現れる．既存の研究では，Borel変換したものに対する割り算と逆変換により求まったものが，変数が3つあるために1つの変数のみに注目できないからである．この困難を克服するためのアイデアとして本論文では形式的無限階微分作用素

$$\eta^{-1}\partial_\alpha(\exp(\eta^{-1}\partial_\alpha)-1)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n B_n}{n!}\eta^{-n}\partial_\alpha^n$$

が用いられた．ここで B_n は n 次 Bernoulli 数を表し $\partial_\alpha = \partial/\partial\alpha$ である．この作用素は η^{-1} の形式的べき級数でパラメータに関して適当な斉次性を課したものの空間に作用し，差分の逆を与える．このような作用素を他のパラメータ β，γ に対しても用いることにより，3 連立差分方程式を解くことに成功した．本論文では超幾何微分方程式の 3 つの確定特異点それぞれに対して Voros 係数が与えられており，その具体形は示唆に富んでいる．それは退化のパターンに対応するパラメータについて Weber 方程式の Voros 係数を足し合わせた形をしており，局所的な議論と完全に整合している．

第 3 の主結果は，第 2 の主結果で求められた Voros 係数の Borel 和の具体形を与えたことである．Borel 和の計算は Borel 変換と逆 Laplace 変換の 2 つに分けられ，この計算自体は目新しいものではない．しかし，本論文で特徴的なことは，Borel 和を考えるべき領域が 32 個あり，それぞれについて 3 つの Voros 係数の Borel 変換と逆 Laplace 変換を計算している．つまり，192 通りの計算が必要となり，それを丹念に実行している．その結果，多数ある Borel 和の間に符号だけの違いをもつものが幾つかあることが見出されている．それは基本的に同じ index を持つ領域での Borel 和であるので，当初は一致することが期待されたが，実際に計算してみると符号が異なる場合が出てくるのである．これは平方根を取る際の分枝の選び方と関係しており，その符号の定め方も明らかにされている．異なる index を持つ領域に対する Borel 和の比較は最後の章の主題であるが，同じ index の領域間の比較は，今後ループ型の Stokes 曲線の退化に応じた Stokes 現象を解析する際の基礎となることが期待される．

第 4 の主結果では，本論文の題目にもあるように超幾何微分方程式のパラメータに関する Stokes 現象を明らかにしている．ここで扱われているのは Weber 型の退化のみであるが，それに限っても記述すべき Stokes 現象は 48 通りにのぼる．それらすべてについて，Stokes 現象を記述する公式を与えている．これらの公式を得るために前章までの結果が活用される．すなわち，Voros 係数を用いて WKB 解の規格化を変え，パラメータの変化に対して安定なものを使って WKB 解の Stokes 現象を Voros 係数の Stokes 現象に帰着する．すると，第 3 の主結果を用いて Voros 係数の Borel 和の隣接領域間での関係式が得られるので，それが WKB 解のパラメータに関する Stokes 現象の記述に反映されるのである．この結果により，超幾何微分方程式の WKB 解が Weber 型の退化に付随して引き起こす Stokes 現象が完全に分かったことになる．この意義は非常に大きい．

申請者は修士論文において超幾何微分方程式の WKB 解と超幾何関数の関係を研究し，定数倍の不定性を除いた線型関係式を得ている．この結果と本論文の第 4 の主結果を組み合わせると，超幾何関数のパラメータに関する漸近展開および Stokes 現象が相当部分明らかになる．残っている定数の不定性を除くことができれば，超幾何関数のパラメータに関する漸近挙動を表す新たな公式が得られることになる．

以上のように，本論文は新たな知見を多数含み，その学術的意義は大きく，博士（理学）の学位論文に相応しいものと認められる．