

の補題が多く研究者によって応用されてきたように、定理 4.3.1 も、今後、幾何学的関数論のさまざまな分野に応用される可能性を秘めている。この章の結果は論文

- (1) H. Shiraishi and S. Owa, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 55(2010), 207 - 2011
- (2) H. Shiraishi, S. Owa and H. M. Srivastava, Comput. Math. Appl. 62(2011), 2978 - 2987
- (3) H. Shiraishi, S. Owa, T. Hayami, K. Kuroki and H. M. Srivastava, PanAmerican Math. J. 21(2011), 63 - 77

を中心にまとめられた。

最後に第 5 章では、Miller および Mocanu の補題の新しい拡張と、Nunokawa の補題の応用が議論されている。章の前半では、解析関数の微分サブオーディネーションに関連した解析関数の性質が考察され、後半では、解析関数に対する Nunokawa の補題の応用して、原点で 1 位の極を持ち、原点を除く単位円板内で解析的な関数についての非常に興味深い性質が考察されている。特に、後半の結果は Nunokawa の補題を与えた群馬大学名誉教授の布川 慶先生との共同研究として得られた論文

- (1) M. Nunokawa, S. Owa, N. Uyanik and H. Shiraishi, Math. Comput. Modell. 55(2012), 1245 - 1250

を中心にまとめられている。白石 将君は、Jack の補題、Miller-Mocanu の補題、Nunokawa の補題に注目して、これらの補題の応用や新たな方向への発展に関連する多くの結果を発表し、幾何学的関数論の新しい展開の可能性を与えた。本学位論文の主論文の 9 編および副論文の 3 編はすべて査読の付いた外国の数学雑誌に発表されており、それらの論文の結果をまとめた本論文は博士（理学）の学位論文として十分に価値のある論文であると確信します。

氏 名	なか の 野 勇 気
学位の種類	博 士 (理学)
学位記番号	理 第 6 8 号
学位授与の日付	平 成 24 年 3 月 22 日
学位授与の要件	学位規程第 5 条第 1 項該当
学位論文題目	数値計算によるハードコアボソン系の研究

論文審査委員 (主 査)	教 授	松	居	哲	生
(副主査)	教 授	太	田	信	義
(副主査)	教 授	堂	寺	知	成

論文内容の要旨

1995年、トラップされたボース原子のガスによりボース凝縮が実現し、2002年には、光学格子上に原子の集団が配置させる事が可能になった。以降、光学格子上の冷却原子系は凝縮系物理学で最も注目される分野の一つとなった。光学格子はレーザーを用いる事で周期的なポテンシャルを作成し、原子を格子に配列出来る技術である。この光学格子のポテンシャルを強くすると、Mott 絶縁体 - 超流動転移が発生し、Mott 絶縁体相では、格子の各サイトへは、格子の各サイトの粒子数が同じ数(数個程度)存在する状態が観測されている。従来の実験では1格子点当たりの原子数は1以上であったが、今後1以下の系の実験も行われるであろう。

本論文では1格子点当たり、原子がゼロ個または1個の存在しか許されないハードコアボソンの集団を考え、平均粒子数密度が1以下の場合についての相構造などの物理量を数値シミュレーションにより計算し、将来に向けての大局的で半定量的な予言となることを目的とする。

具体的にはハードコアボソン (HCB) 系の第2量子化による数学的記述から出発し、擬スピ表示、複素射影演算子表示、などを導入することにより、十分高温領域での状態の経路積分表示を得ることに成功した。ハードコアボソンでは、通常のボソンでは生成消滅オペレータの関係に対し交換関係を用いる所を、同一格子点についてのみ、反交換関係を用いるように変更した。これにより、2重占有を禁止し粒子間斥力を表した。この経路積分表示では、1成分につき一つのCP<sup>1</sup>変数を用いて記述でき、確率過程によるモンテカルロシミュレーションが可能な複素数についての多重積分の形をしている。

この表示に基づいて丹念で広範囲なモンテカルロシミュレーションを行い、内部エネルギー、比熱、相関関数、臨界指数、等の物理量を計算し、物理的考察を行った。具体的モデルとしては、下記2種類のモデルについて解析した。

- (1) 2次元磁場中の1成分HCB 文献[1], [5]
- (2) 3次元2成分HCB系 [2], [3], [4]

(1) では、1成分HCBのハミルトニアンより、Single CP<sup>1</sup>モデルの導出を行った。作用Aは以下のような式で書き表される。

$$A = -\frac{t}{2} \sum_{x,\nu} (\bar{\phi}_{x+\nu} U_{x\nu} \phi_x + \text{H.c.}) - \mu \sum_x \rho_x,$$

$$U_{x,\nu} = \exp(iA_{x\nu}), \quad A_{x1} = -\frac{B}{2} x_2, \quad A_{x2} = \frac{B}{2} x_1, \quad B = 2\pi f.$$

磁場を  $f = 0, 1/2, 2/5$  とした時の相転移について調べ、従来の粒子数揺らぎを無視したXYスピモデルとの比較を行い、粒子数の揺らぎは臨界温度や臨界指数の値等を変更するが、相転移の大局的構造には影響を与えないことを確認した。HCBモデルの基底状態は、XYスピモデルと比較して、粒子密度  $\delta = 0.5$  の時は差が出ず、粒子密度が

$\delta \neq 0.5$  の時はHCBモデルの方がエネルギーが下がる事がわかった(図1)。

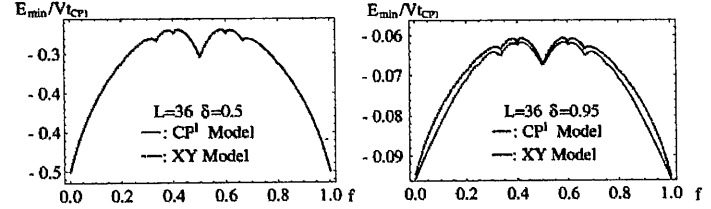


図1: Single CP<sup>1</sup>モデルとXYスピモデルとの基底エネルギーの比較

また、粒子数揺らぎについても下記のように定義して調べた。

$$\Delta_\rho \equiv \sqrt{\frac{1}{V} \sum_x (\rho_x - \bar{\rho})^2}, \quad \bar{\rho} \equiv \frac{1}{V} \sum_x \rho_x$$

その結果、低温で揺らぎは小さくなる傾向にあるが、 $\mu = 0.7$  で  $f = 2/5$  の時は、揺らぎは有限に残る事がわかった(図2)。これは、XYスピモデルに比べSingle CP<sup>1</sup>モデルの方が基底エネルギーが低く、基底状態にも、粒子数揺らぎが残る事が影響している為である。

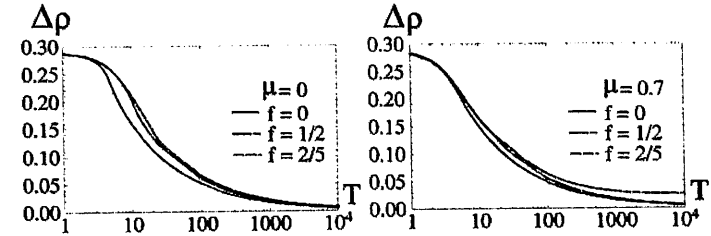


図2: Single CP<sup>1</sup>モデルの粒子数揺らぎ

(2) では、高温超伝導のt-Jモデルに類似したボソンのモデルであるBosonic t-Jモデルを元に経路積分を用いて、2つのCP<sup>1</sup>変数を用いた、Double CP<sup>1</sup>モデルの導出を行った。作用Aは以下のようにあらわされる。

$$A = c_1 \sum_{x,\nu} P_x P_{x+\nu} (m_{xy} (S_{x+\nu}^x S_{x\nu}^x + S_{x+\nu}^y S_{x\nu}^y) + m_z S_{x+\nu}^z S_{x\nu}^z) - \frac{c_3}{2} \sum_{x,\nu} (\bar{a}_{x+\nu} a_x + \bar{b}_{x+\nu} b_x + \text{H.c.}) - \mu \sum_x \rho_x,$$

$$\vec{S}_x \equiv \frac{1}{2} B_x^\dagger \vec{\sigma} B_x, \quad B_x \equiv (a_x, b_x)^t, \quad \rho_{hx} = 1 - \bar{a}_x a_x - \bar{b}_x b_x.$$

異粒子間相互作用である $c_1$ 項については $m_{xy} = m_x$ となる等方Bosonic t-Jモデル、 $m_{xy} = \alpha m_x$ となる異方性Bosonic t-Jモデルの2種類について調べた。結果、等方Bosonic t-Jモデルでは常磁性、反強磁性のほかに強磁性・超流動相、反強磁性・超流動相が存在することがわかった(図3)。異方性Bosonic t-Jモデルでは、常磁性、強磁性、反強磁性と強磁性・超流動相が存在することがわかった(図4)。また反強磁性・超流動相はホール密度が高い所でのみ発生する事がわかった。また、2成分間の引力が不十分な場合は、ボース粒子対の形成による超流動は存在しないことも確認された。

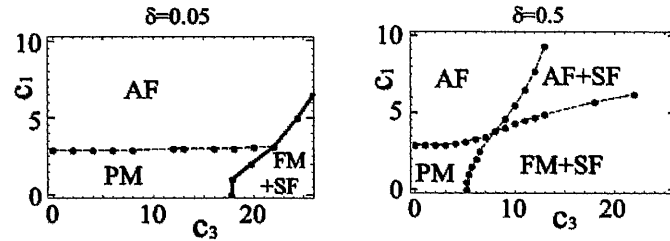


図3:等方Bosonic t-Jモデル  $P_z = 1$ の時の相構造

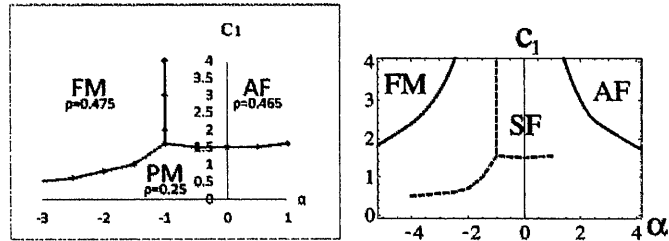


図4:異方性Bosonic t-Jモデル  $c_3 = 0$ の時(左) $c_3 = 20$ の時(右)

さらにシミュレーション方法の改善としては下記2種類の方法を開発した。

- (i) マルチカノニカル法の手続きの簡素化とエネルギーが2パラメータを含む場合への拡張 [6]
- (ii) 強いヒステリシスがある1次転移に対して計算の収束を早める更新候補の選択法の提案 [4]
- (i) では、マルチカノニカル法による状態密度 $\Omega(E)$ の計算および、物理量の計算を1成分HCB系の数値計算へ応用を行った。マルチカノニカル法では $f(E) = \ln \Omega(E)$ を、エネルギー領域を分割し1次関数で近似する事で求める。この各領域における関数の決め方

を開発した。また、 $\beta t, \beta \mu$ 等2つ以上のパラメータに応用すると $f(E_1, E_2) = \ln \Omega(E_1, E_2)$ といった、項別の2つのエネルギーについての状態密度を導出する必要があるが、これは困難である。その為 $\mu/t$ を定数として固定する事で、パラメータを1つに落とし、マルチカノニカル法を用いる手法を開発した。それにより、1成分HCB系においては化学ポテンシャルが含まれた場合での相転移を調べる事に成功した。

(ii) では、2成分HCB系の相転移において大きなヒステリシスのある1次転移が発生し、転移点が明確にはわからなくなっていた。転移点を調べる為には、長時間の計算を行いヒステリシスを狭める事が必要になってくる。その対策としてメトロポリス法の更新候補をヒステリシスの二つの状態を行き来出来るような選択法を開発し、それにより、ヒステリシスを狭める事に成功した。

### 関連論文

- [1] "Finite-temperature phase structures of hard-core bosons in an optical lattice with an effective magnetic field", Y. Nakano, K. Kasamatsu, and T. Matsui (Phys. Rev. A submitted) arXiv:1112.0145
- [2] Y. Nakano, T. Ishima, N. Kobayashi, K. Sakakibara, I. Ichinose, and T. Matsui, Phys. Rev B 83, 235116 (2011)
- [3] Y. Nakano, T. Ishima, N. Kobayashi, T. Yamamoto, I. Ichinose, and T. Matsui (Phys. Rev. A, in press) arXiv:1111.1537
- [4] Y. Nakano, T. Ishima, N. Kobayashi, K. Sakakibara, I. Ichinose, and T. Matsui (LT 26, Journal of Physics: Conference Series, in press)
- [5] A. Kato, Y. Nakano, K. Kasamatsu, T. Matsui, Phys. Rev. A 84, 053623 (2011)
- [6] "Z(2) Gauge Neural Network and its Phase Structure", Y. Nakano, Y. Takafuji, and T. Matsui (Physica A submitted)

論文審査結果の要旨

本論文は、近年凝縮系物理学の分野で注目を集め続けている光学格子上の冷却原子系を対象に選り、理論的な研究を行ったものである。特に、近い将来、実験が行われると期待される超低密度粒子数の系への応用を念頭に、1格子点当たり、原子がゼロ個または1個の存在しか許されないハードコアボソンの場合について解析を行っている。予想される相構造や臨界指数などが計算されていて、実験に対する大局的であつ半定量的な予言を与えるもので大変興味深い研究であるといえる。

研究ではハードコアボソン系の第2量子化による数学的記述から出発し、偽スピン表示、複素射影演算子表示、などの技術的部分を丹念に展開することで、最終的に数値シミュレーションが可能な経路積分表示を得ることに成功した。

さらにこの表示に基づいて丹念で広範囲なモンテカルロシミュレーションを行い、内部エネルギー、比熱、相関関数、臨界指数、等の物理量を近似なしに計算したことは評価される。またそれらに対する物理的考察も十分である。

計算物理学的観点からすると、エネルギーが2パラメータを含む場合へのマルチカノニカル法の適用、強いヒステリシスがある1次転移に対して収束を早める更新候補の選択法の提案、等の有効で実用的な工夫がみられる。

以上からこの論文の研究内容・結果は博士の学位に十分値するものと判断する。

氏名	<small>もはまんど あり ふあしひ あぐふらぐ</small> Mohammad Ali Fasihi Aghbolagh
学位の種類	博士(理学)
学位記番号	理第69号
学位授与の日付	平成24年3月22日
学位授与の要件	学位規程第5条第1項該当
学位論文題目	Study of Hamiltonians in Quantum Information Theory (量子情報理論におけるハミルトニアンの研究)

論文審査委員 (主査)	教授	中原	幹夫
(副主査)	教授	堂寺	知成
(副主査)	准教授	近藤	康