氏　　　名	白石　將 (しらいし ひとし)
学位の種類	博　士（理学）
学位記番号	理第67号
学位授与の日付	平成 24 年 3 月 22 日
学位授与の要件	学位規程第５条第１項該当
学位論文題目	Study on geometric properties of analytic functions （解析関数の幾何学的性質についての研究）
論文審査委員	（主　査）　教授　尾和重義 （副主査）　教授　青木貴史 （副主査）　准教授　中村弥生

論文内容の要旨

第1章　序論

単位円板 $\mathbf{U}=\{z : z\in\mathbb{C},\ |z|<1\}$ 内で定義された解析関数

$$f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$$

の全体を $\mathcal{A}$ とし、$\mathbf{U}$ で単葉な関数 $f(z)$ からなる $\mathcal{A}$ の部分族を $\mathcal{S}$ で表す。$\mathcal{S}$ の関数 $f(z)$ が $\mathbf{U}$ を原点に関して星型である領域 $f(\mathbf{U})$ に写像するとき、$f(z)$ は原点に関して $\mathbf{U}$ で星型であるといわれ、このような関数 $f(z)\in\mathcal{S}$ の全体は $\mathcal{S}^*$ で表される。星型領域に対する幾何学的な性質から、$f(z)\in\mathcal{S}^*$ であることと、$f(z)\in\mathcal{A}$ が

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>0 \qquad (z\in\mathbf{U})$$

を満たすことが同値であることが分かる。また、$\mathcal{S}$ の関数 $f(z)$ が $\mathbf{U}$ を凸型領域 $f(\mathbf{U})$ に写像するとき、$f(z)$ は $\mathbf{U}$ で凸型であるといわれ、凸型関数 $f(z)\in\mathcal{S}$ の全体は $\mathcal{K}$ で表される。凸型領域に対する幾何学的な性質によって $f(z)\in\mathcal{K}$ であることと、$f(z)\in\mathcal{A}$ が

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>0 \qquad (z\in\mathbf{U})$$

を満たすことが同値である。したがって、関数族 $\mathcal{S}^*$ および $\mathcal{K}$ についての解析的定義から、J.W.Alexander (1915 年) が $f(z)\in\mathcal{K}$ であることと $zf'(z)\in\mathcal{S}^*$ であることが同値であることを示した。

さらに関数族 $\mathcal{S}^*$ や $\mathcal{K}$ に対する解析的定義から、M.S.Robertson (1936 年) が

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\alpha \quad (0\leqq{}^{\exists}\alpha<1;\ z\in\mathbf{U})$$

を満たす関数族 $\mathcal{A}$ の部分族 $\mathcal{S}^*(\alpha)$、および

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>\alpha \qquad (0\leqq{}^{\exists}\alpha<1;\ z\in\mathbf{U})$$

を満たす関数族 $\mathcal{A}$ の部分族 $\mathcal{K}(\alpha)$ を導入した。ここで、関数 $f(z)\in\mathcal{S}^*(\alpha)$ は位数 α の星型関数、関数 $f(z)\in\mathcal{K}(\alpha)$ は位数 α の凸型関数であるといわれる。

加えて、星型関数と凸型関数に関する重要な関係として、$f(z)\in\mathcal{K}$ であるならば、$f(z)\in\mathcal{S}^*\left(\frac{1}{2}\right)$ であることが、A.Marx (1932 年) および E.Strohhäcker (1933 年) によっ

て示された。さらにこの関係の一般化として、$f(z)\in\mathcal{K}(\alpha)$ であるならば、それぞれの α に対して

$$\beta=\begin{cases}\dfrac{1-2\alpha}{2^{2-2\alpha}(1-2^{2\alpha-1})} & \left(\alpha\neq\dfrac{1}{2}\right)\\[2ex] \dfrac{1}{2\log 2} & \left(\alpha=\dfrac{1}{2}\right)\end{cases}$$

で与えられる値 β 対して $f(z)\in\mathcal{S}^*(\beta)$ であることが、T.H.MacGregor (1975年) によって証明された。T.H.MacGregor (1975年) は、この星型関数と凸型関数に関する関係を"従属関係"の理論における一つの従属関係式を考察することによって示した。ここで、$\mathbf{U}$ で定義された解析関数 $p(z)$, $q(z)$ に対して $p(z)=q(w(z))$ となるような $w(0)=0$, $|w(z)|<1$ を満たす解析関数 $w(z)$ が存在するとき、$p(z)$ は $q(z)$ に $\mathbf{U}$ で従属するといい、この従属関係は

$$p(z)\prec q(z)\qquad(z\in\mathbf{U})$$

によって表される。Schwarz の補題から、従属関係 $p(z)\prec q(z)\quad(z\in\mathbf{U})$ が成り立つならば、$p(0)=q(0)$ および $p(\mathbf{U})\subset q(\mathbf{U})$ を満たすことが分かる。そして特に $q(z)$ が $\mathbf{U}$ で単葉であるときは、これらが同値であることが知られている。

単葉関数を考える上で、最も有名な定理の1つに Jack の補題がある。これは、I.S.Jack (1971年) が提唱し、S.S.Miller, P.T.Mocanu (1975年) によって証明された補題で、$\mathbf{U}$ で解析的な関数

$$w(z)=\sum_{k=n}^{\infty}a_k z^k$$

について、$|w(z)|$ の最大値が $|w(z_0)|$ となるような $\mathbf{U}$ の点 z_0 に対して

$$\frac{z_0w'(z_0)}{w(z_0)}=m$$

と

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{z_0w''(z_0)}{w'(z_0)}\right)\geqq m$$

を満たすような n 以上の実数 m が存在することを示した定理である。

本論文では、Jack の補題やそれから派生した定理を使い、既存の定理の更なる一般化や従属関係と絡めた前述の関数族に関する十分条件を幾何学的性質を用いて考察している。

第2章　Jackの補題の応用

第2章では Jack の補題について $|w(z)|$ の最大値を1、$m\geqq 1$ として、$\mathcal{A}$ の関数 $f(z)$ が星型関数や凸型関数に属する為の十分条件を考察している。

特に、2.1節では $\mathcal{S}^*$、$\mathcal{S}^*(\alpha)$ 等に属する為の十分条件を絶対値を使った形で、2.2節では $\mathcal{S}^*$、$\mathcal{K}$ に属する為の十分条件を実部を使った形で表現している。また、定理 2.2.1 は R.Singh, S.Singh (1982年) の結果をより一般化したものとなっている。

第3章　Jackの補題の拡張

一般的に Jack の補題が使われる場合、第2章で述べたように、ほとんどは $|w(z)|$ の最大値を1、$m\geqq 1$ として扱われるが、第3章では $|w(z)|$ の最大値を ρ、$m\geqq n$ とすることにより、より厳密な評価が可能となっている。

また、3.1節では $|w(z)|$ の最大値を1にした場合と $|w(z)|$ の最大値を ρ にした場合を使い分けることにより、$|w(z)|$ の最大値を ρ にした場合に発生する問題を解決している。

更に、3.3節では Briot-Bouquet 微分方程式を例にして他分野への繋がりを示唆している。

最後に、3.4節では領域内の2点間距離を新たに考えることにより、その2点を両端とした円領域内に含まれている関数についての考察をしている。これは、領域内の点を2点から3点、4点へと増やしていくことにより、重心への応用が可能であり、今後も研究余地のある理念である。

第4章　Miller-Mocanuの補題の応用

これまでは、Jack の補題について議論してきたが、この章では Jack の補題から派生した Miller-Mocanu の補題を扱ったアプリケーションを議論している。ただし、Miller-Mocanu の補題と表記される定理は単葉関数の研究において複数あり、ここでもそれぞれ違う定理が使われている。

4.1節では $p(0)=1$ を満たす解析関数 $p(z)$ が、μ ($\mathrm{Re}(\mu)<n,\mu\neq 0$) と λ ($0<|\lambda|\leqq 1$) に対して

$$p(z)-\frac{1}{\mu}zp'(z)\prec 1+\lambda z\qquad(z\in\mathbf{U})$$

を満たすとき、ある複素数 λ_1 について $p(z)\prec 1+\lambda_1 z$ が成り立つという Miller-Mocanu の補題を使うことにより、$\mathcal{A}$ の関数 $f(z)$ が

$$f'(z)\left(\frac{z}{f(z)}\right)^{1+\mu}\prec 1+\lambda z\qquad(z\in\mathbf{U})$$

を満たすとき、$f(z)$ が $\mathcal{S}^*$ や $\mathcal{S}^*(\alpha)$ に属するための十分条件を考察している。

4.2 節では Strongly Carathéodory 関数を独自に定義し、従属関係についての Miller-Mocanu の補題に対してアプリケーションを示している。

4.3 節では Jack の補題が $|w(z)|$ の最大値に関しての定理であることに着目し、同様にして $|w(z)|$ の最小値に関しての定理を作り出すことが可能かを考えた。その際に定数から始まる関数に関する絶対値の最大値に関しての Miller-Mocanu の補題を使うことにより命題を解決している。

第5章　付録

第5章では、上記以外の定理についてのアプリケーションをまとめている。

特に、5.2 節では Jack の補題から派生した Nunokawa の補題を用いることにより、有理型関数と絡めた領域問題を考察している。

論文審査結果の要旨

白石　將君は単位円板内で定義された解析単葉関数 $f(z)$ の族 S に対する I. S. Jack の補題（J. London Math. Soc. 3(1971), 469 - 471), 解析関数のサブオーディネーションに関連した S. S. Miller および P. T. Mocanu の補題（J. Math. Anal. Appl. 65(1978), 289 - 305), さらに, I. S. Jack の補題を応用した M. Nunokawa の補題（Proc. Japan Acad. 68(1992), 152 - 153) を中心に, これらの補題を応用して, 単葉関数に関係したさまざまな研究を行って, これらの研究成果を, 第１章『序論』, 第２章『Jack の補題の応用』, 第３章『Jack の補題の拡張』, 第４章『Miller-Mocanu の補題の応用』, 第５章『付録』からなる博士学位論文『Study on geometric properties of analytic functions』にまとめました。上述の Jack の補題, Miller-Mocanu の補題, Nunokawa の補題の発想はすべて解析関数の幾何学的性質を基盤とするもので, 解析関数の幾何学的性質と解析的性質を結びつける非常に興味深い補題です。

第１章では, 本学位論文に関連したさまざまな関数族の導入の後, 単葉関数論における基本的な幾何学的性質の紹介をいくつかの具体的な例を用いて行っている。

第２章では, I. S. Jack の補題を応用して, 解析関数のサブオーディネーションの性質を用いて, 関数のさまざまな単葉性条件や星型性条件の考察を行っている。この章は論文

(1) H. Shiraishi and S. Owa, Far East J. Math. Sci. 30(2008), 147 - 155

(2) H. Shiraishi and S. Owa, Internat. J. Open Probl. Comput. Sci. Math. 2(2009), 37 - 47

を中心にまとめられており, この章における定理は R. Singh および S. Singh による単葉性条件（Coll. Math. 47(1982), 309 - 314) の一般化になっている。

第３章は本学位論文の中核的な部分で, 論文

(1) H. Shiraishi and S. Owa, Genel. Math. 17(2009), 157 - 169

(2) H. Shiraishi and S. Owa, Internat. J. Math. Anal. 4(2010), 1271 - 1284

(3) H. Shiraishi and S. Owa, Acta Univ. Apulensis, Special Issue (2009), 1037 - 1046

を中心にまとめられている。解析関数 $w(z)$ の絶対値 $|w(z)|$ の最大値に対して $|w(z)| < 1$ を用いて議論されてきた I. S. Jack の補題を $|w(z)| < \rho$ という条件のもとで議論したり, 幾何学的な考察から, 領域内の任意の２点間の中点, あるいは, もっと一般的に, 領域内の任意の n 個の点の重心を用いて, Jack の補題の新しい展開を行った。この発想は, いままでの Jack の補題に関連した論文には見られない新たな発想で, これからのこの種の研究に大いに影響を与えるものと思われる。

第４章も本論文における非常に重要な部分で, S. S. Miller および P. T. Mocanu という幾何学的関数論で世界をリードする数学者の補題のさまざまな応用について議論している。特に, 定理 4.3.1 は, S. S. Miller および P. T. Mocanu の補題に対して, 解析関数 $f(z)$ の絶対値 $|f(z)|$ の最小値に関する定理で, 1971 年に Jack の補題が発表されて以来の新しい展開である。解析関数の絶対値の最大値に関係した Jack の補題や Miller および Mocanu

の補題が多くの研究者によって応用されてきたように，定理4.3.1も，今後，幾何学的関数論のさまざまな分野に応用される可能性を秘めている。この章の結果は論文

(1) H. Shiraishi and S. Owa, Stud. Univ. Babes-Bolyai Math. 55(2010), 207 - 2011
(2) H. Shiraishi, S. Owa and H. M. Srivastava, Comput. Math. Appl. 62(2011), 2978 - 2987
(3) H. Shiraishi, S. Owa, T. Hayami, K. Kuroki and H. M. Srivastava, PanAmerican Math. J. 21(2011), 63 - 77

を中心にまとめられた。

最後に第5章では，Miller および Mocanu の補題の新しい拡張と，Nunokawa の補題の応用が議論されている。章の前半では，解析関数の微分サブオーディネーションに関連した解析関数の性質が考察され，後半では，解析関数に対する Nunokawa の補題の応用して，原点で1位の極を持ち，原点を除く単位円板内で解析的な関数についての非常に興味深い性質が考察されている。特に，後半の結果は Nunokawa の補題を与えた群馬大学名誉教授の布川　護先生との共同研究として得られた論文

(1) M. Nunokawa, S. Owa, N. Uyanik and H. Shiraishi, Math. Comput. Modell. 55(2012), 1245 - 1250

を中心にまとめられている。　白石　將君は，Jack の補題，Miller-Mocanu の補題，Nunokawa の補題に注目して，これらの補題の応用や新たな方向への発展に関連する多くの結果を発表し，幾何学的関数論の新しい展開の可能性を与えた。本学位論文の主論文の9編および副論文の3編はすべて査読の付いた外国の数学雑誌に発表されており，それらの論文の結果をまとめた本論文は博士（理学）の学位論文として十分に価値のある論文であると確信します。

氏　　　名	中野勇気（なかのゆうき）
学位の種類	博　士（理学）
学位記番号	理第68号
学位授与の日付	平成24年3月22日
学位授与の要件	学位規程第5条第1項該当
学位論文題目	数値計算によるハードコアボソン系の研究

論文審査委員	（主　査）	教授	松居哲生
	（副主査）	教授	太田信義
	（副主査）	教授	堂寺知成