これをヨウ素との錯体化によるポリイン炭素鎖上の電子密度の変調に帰して考察した。これらの分光学的実験からユニークな分子錯体形成の事実がより確実なものとして認識されるようになった。こうした分光学的手法による研究展開は学術的に価値の高いものと認められる。

ヨウ素との分子錯体の形成がさらに一般的な反応として拡張される例として、ポリイン分子の誘導体の一つであるメチルポリイン分子について、水素終端ポリイン分子と同様の実験を行い、その事実を証明した。具体的には，レーザーアブレーションで通常のポリインと同時に生成されるメチルポリイン分子を単離し、これをヨウ素と光反応させることで、水素終端ポリインの場合に類似の紫外吸収スペクトル変化を観測した。このことは、アセチレン骨格が多重連結したポリイン骨格においては、6個のヨウ素原子が一定の構造を成してポリイン分子に隣接し、安定な錯体構造をとることを明確に示している。そのドライビングフォースに関連してこの実験系は、電荷移動によるドナーとアクセプターのクーロン的な結びつき、あるいは、三ヨウ化物構造ペアの存在などの話題を提供するものであり、今後の研究展開に興味が持たれる発展性のある研究課題と認められる。

さらには可視光によって誘起される反応に関する詳細な実験から、ポリイン分子の分解反応が錯体生成反応と競合し、反応物の濃度が希薄な場合には分解反応が支配的になることを定量的に示した。こうした結果を応用することによって逆に錯体生成に有利な反応条件を確立することが可能になると考えられる。こうした詳細かつ信頼性のある実験技術と解析手法は研究者としての力量を裏付けるものである。

3．審査の結果

物理化学分野で関心がもたれる炭素の新しい同素体に関連する物質探索の分野において、本論文とそれに先立って査読付き英文学術誌に発表されたポリイン分子とヨウ素分子から成る分子錯体の発見とキャラクタリゼーションに関する論文は、きわめて独創性の高い内容であることが認められ、国内学会でも高い評価を得ている。研究手法においても、分子分光学の基礎知識を新しい化学種の発見に結びつけることに成功した。とりわけスペクトル変化の解析結果を錯体形成という化学変化に結びつけた洞察力は、科学的思考力と論理展開の独創性と緻密さにおいて学術的にきわめて高い水準に達している。本論文が物理化学にとどまらず新しい物質探索の分野において先駆的な研究内容を著したものであることは明らかであり、本論文は特に優れた研究業績と認められる。よって、本論文の提出者は、博士（理学）の学位を授与されるに値すると判断した。

4．試験および試問の結果

本学の学位規定にしたがって試験および試問を行った。公聴会において論文内容の発表を行い、理学専攻教員による質疑応答をもって試験にあて、論文審査委員が本論文とその関連分野について試問を行った。その結果、専門分野ならびに外国語について十分な学力があることを認め、合格と判断した。

氏名	東海林（とうかいりん） 満（みつる）
学位の種類	博　士（理学）
学位記番号	理 第 74 号
学位授与の日付	平成 25 年 3 月 22 日
学位授与の要件	学位規程第5条該当
学位論文題目	Characterizations of number fields and Dedekind zeta functions by Galois groups （ガロア群を用いた代数体とデデキントゼータ関数の特徴付けについて）

論文審査委員	（主　査）	教授	知念　宏司
	（副主査）	教授	長岡　昇勇
	（副主査）	教授	大野　泰生

論文内容の要旨

本論文において，学位申請者は，代数的整数論の分野に属する 2 つの問題を論じ，解決している．まずは論文中で用いられている基本的事項について簡単に説明する．

代数体とは，有理数体 $\mathbb{Q}$ 上代数的な元全体のなす体 ($\mathbb{Q}$ の代数的閉包) の部分体のことである．そして，有限次代数体 (代数体のうち，$\mathbb{Q}$ 上の拡大次数が有限のもの) K に付随して定義される重要な関数に Dedekind ゼータ関数がある．それは

$$\zeta_K(s)=\sum_{0\neq\mathfrak{a}\in\mathcal{O}_K}\frac{1}{\mathfrak{N}(\mathfrak{a})^s}$$

で定義される．ただし，$\mathfrak{a}$ は K の整数環 $\mathcal{O}_K$ のイデアル全体を動き，$\mathfrak{N}(\mathfrak{a})=(\mathcal{O}_K:\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}$ のノルムである．関数 $\zeta_K(s)$ は体 K の性質を反映していることが古くから知られている．そのため，逆の問題として，Dedekind ゼータ関数が一致するような 2 つの体は等しいか (あるいは同型か)，という疑問が自然に生じる．この疑問から生まれた概念が「算術的同値」である．すなわち，2 つの体 K, K' が算術的同値であるとは，その Dedekind ゼータ関数が一致すること，すなわち $\zeta_K(s)=\zeta_{K'}(s)$ であることと定義し，このとき $K\approx K'$ と表す．もちろん，$K\simeq K'$ (体として同型) ならば $\zeta_K(s)=\zeta_{K'}(s)$ となる．しかし，上で述べた「逆の問題」すなわち「$\zeta_K(s)=\zeta_{K'}(s)$ ならば $K\simeq K'$」は，一般には必ずしも成立しないことが知られていて，古くは Gassman (1926)，その後 Gerst-Schinzel (1970) らによる反例の先行研究がある．

次に円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大について述べる．まず素数 p に対して，有理数体 $\mathbb{Q}$ の p 進距離による完備化を p 進体と呼び，その整数環を p 進整数環と呼んで記号 $\mathbb{Z}_p$ で表す．そして素数 p に対して，ζ_n を 1 の原始 p^{n+1} 乗根とする．拡大 $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ は $p^n(p-1)$ 次巡回拡大であるから，$\mathrm{Gal}(L_n/\mathbb{Q})\simeq\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ となる代数体 L_n がただ一つ存在する．そこで $L=\cup_{n\geq1}L_n$ とおけば，$L/\mathbb{Q}$ は Galois 拡大であり，$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})\simeq\mathbb{Z}_p$ となる．この L を $\mathbb{Q}$ の円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大という．

さて，このあと第 1 主結果 (論文第 1 部) の内容について述べていく．算術的同値性については，(K, K' に条件が課されているものも含め) いくつかの同値条件が知られている．その一つに，総実代数体に対する Adachi-Komatsu の定理がある．それは，K, K' がともに総実代数体であるとき，$K\approx K'$ であることは，ほとんどすべての素数 p に対し，$X_{K_\infty(p),\{p\}}(p)\simeq X_{K'_\infty(p),\{p\}}(p)$ であることと同値である，というものである．ここで一般に，代数体 F と素数 p に対して，$F_\infty(p)$ は体 $F(\zeta_p+\zeta_p{}^{-1})$ (ζ_p は 1 の原始 p 乗根) の円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大，$X_{F_\infty(p),\{p\}}(p)$ は $F_\infty(p)$ の，p の外で分岐しない最大 Abel pro-p 拡大の Galois 群である．この結果は，証明において総実代数体の岩澤主予想 (Wiles によって証明された) を用いているため，総実という仮定を取り除けるかどうかはわかっていない．

本論文の第 1 の主結果は，この算術的同値性を従来の結果とは別の角度から眺めたものになっている．つまり，K, K' を任意の有限次代数体とし，$K\approx K'$ であることとの同値条件を，やや「小さな」Galois 群の言葉で表したものである．具体的には $K\approx K'$ の同値条件を 2 種発見している．それらは

(1) 次の条件を満たす素数 l が存在する:

(i) $l\nmid[N:\mathbb{Q}]h_Kh_{K'}$ (h_K, $h_{K'}$ はそれぞれ K と K' の類数).

(ii) l は K, K' 上不分岐である.

(iii) 有限個を除いたすべての素数 p に対し $X_{K,\{p\}}/l\simeq X_{K',\{p\}}/l$ が成立する.

(2) l を $l\nmid[N:\mathbb{Q}]$ を満たす素数で S を素数からなる集合とすれば $X_{K,S}(l)\simeq X_{K',S}(l)$ が成立する

というものである．ここで，N は K および K' の Galois 閉包である．

第 1 主結果の証明の概略を紹介する．鍵となるのは，Stuart-Perlis (1995) による次の結果である: K, K を任意の代数体とするとき，$K\approx K'$ であることは，次の (1) または (2) と同値である:

(1) 素数 p に対して，g_p, g'_p をそれぞれ K, K' において p の上にある素因子の個数とするとき，有限個の例外的な p を除くすべての p に対して $g_p=g'_p$ となる.

(2) K, K' を含む任意の Galois 拡大 $N/\mathbb{Q}$ に対して，$G=\mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q})$, $H=\mathrm{Gal}(N/K)$, $H'=\mathrm{Gal}(N/K')$ とする．このとき，$\mathbb{Q}[G]$ 加群として $\mathbb{Q}[G]\otimes_{\mathbb{Q}[H]}\mathbb{Q}\simeq\mathbb{Q}[G]\otimes_{\mathbb{Q}[H']}\mathbb{Q}$.

これが主結果における「(1) ならば $K\approx K'$」の証明に用いられる．$N/\mathbb{Q}$ において不分岐な素数 p をとり，K_i $(i=1,2)$ での素イデアル分解を $p\mathcal{O}_{K_i}=\mathfrak{P}_{i,1}\cdots\mathfrak{P}_{i,g_p(K_i)}$ とする．このとき，完全系列

$$\mathcal{O}_{K_i}^\times/l\to(\mathcal{O}_{K_i}/p^n)^\times/l\to X_{K_i,\{p\}}/l\to0$$

において，いわゆる Chinese remainder theorem から $(\mathcal{O}_{K_i}/p^n)^\times/l\simeq\otimes_{j=1}^{g_p(K_i)}(\mathcal{O}_{K_i}/\mathfrak{P}_{i,j}{}^n)^\times/l$ が得られる．ここで仮定 $X_{K,\{p\}}/l\simeq X_{K',\{p\}}/l$ を用いると $g_p(K_1)=g_p(K_2)$ が得られ，上記 Stuart-Perlis の定理が使える形となる．そして $K\approx K'$ が得られる．

次に主結果における「$K\approx K'$ ならば (2)」の概略を述べる．$N/\mathbb{Q}$ を K_1, K_2 の Galois 閉包，$G=\mathrm{Gal}(N/\mathbb{Q})$, $H=\mathrm{Gal}(N/K)$, $H'=\mathrm{Gal}(N/K')$ とする．このときまず，$K\approx K'$ から，任意の $\mathbb{Z}_l[G]$ 加群 M に対して，$M_H=M/\sum_{\sigma\in H}(\sigma-1)M$, $M_{H'}=M/\sum_{\sigma\in H'}(\sigma-1)M$ とおくとき，$\mathbb{Z}_l$ 加群として $M_H\simeq M_{H'}$ であることが示される．そこで $\mathbb{Z}_l[G]$ 加群 M として $M=X_{N,S}(l)$ とする．そして $M_H\simeq X_{K_1,S}(l)$, $M_{H'}\simeq X_{K_2,S}(l)$ を証明することで $X_{K_1,S}(l)\simeq X_{K_2,S}(l)$ が得られて条件 (2) が導出される．

最後に条件 (2) から条件 (1) は比較的容易に示され，各条件の同値性が証明されることになる．

本論文の第 2 の主結果 (論文第 2 部) は，絶対 Galois 群によって代数体の特徴づけを与えるものである．ここで，代数体 K の絶対 Galois 群とは，$G_K=\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$ ($\overline{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$ の代数的閉包) のことである．絶対 Galois 群は K の多くの情報を含んでいると考えられている．

絶対 Galois 群に関する重要な結果の一つに Neukirch-Uchida の定理がある．それは，K, K' を $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体，$G_K, G_{K'}$ をそれぞれの絶対 Galois 群とするとき，$G_K\simeq G_{K'}$ であることと $K\simeq K'$ であることが同値である，というものである．

本論文第 2 の主結果は, この Neukirch-Uchida の定理を, ある種の無限次拡大体に拡張したものとなっている. それは次のように述べられる. p を素数, $K_1/\mathbb{Q}$, $K_2/\mathbb{Q}$ を, $p \nmid [K_1 : \mathbb{Q}]$, $p \nmid [K_2 : \mathbb{Q}]$ を満たす有限次 Galois 拡大とする. また, $K_{1,\infty}/K_1$, $K_{2,\infty}/K_2$ を円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大とし, $G_{K_{1,\infty}}$, $G_{K_{1,\infty}}$ をそれぞれ $K_{1,\infty}$, $K_{2,\infty}$ の絶対 Galois 群とする. このとき, $G_{K_{1,\infty}} \simeq G_{K_{1,\infty}}$ であることと $K_1 = K_2$ (したがってまた $K_{1,\infty} = K_{2,\infty}$) であることは同値である, というものである. なお, この結果の結論はまず $K_1 \simeq K_2$ として得られるのだが, $\mathbb{Q}$ の代数的閉包を一つ固定して考えているので, より強く $K_1 = K_2$ が得られるのである.

本論文第 2 主結果の証明概略を述べよう. 証明はちょうど Neukirch が $\mathbb{Q}$ 上有限次 Galois 拡大の場合に示した上述の結果の拡張となっている. まず, 一つの補題を導入する. それは次のようなものである: $K_0/\mathbb{Q}$ を有限次 Galois 拡大で $p \nmid [K_0 : \mathbb{Q}]$ を満たすものとする. そして円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K/K_0 をとり, $H \subset G_K$ を無限閉部分群, q を素数とする. 体 κ および素数 $l\ (\neq 2, q)$ で, 次の条件を満たすものが存在するとする:

(i) $\mathbb{Q}_q \subset \kappa \subset \overline{\mathbb{Q}_q}$ 　($\mathbb{Q}_q$ は q 進体, $\overline{\mathbb{Q}_q}$ はその代数的閉包),

(ii) $H \simeq \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_q}/\kappa)$,

(iii) $l^\infty \nmid [\kappa : \mathbb{Q}_q]$,

ただし, (iii) は, ある正整数 C が存在し, 任意の $\mathbb{Q}_q$ 上有限次の中間体 κ_0 ($\mathbb{Q}_q \subset \kappa_0 \subset \kappa$) に対して $l^C \nmid [\kappa_0 : \mathbb{Q}_q]$ が成り立つことを意味する. これらの条件が成り立つならば, $H \subset G_{\overline{\mathfrak{P}}}(\overline{\mathbb{Q}}/K) \subset G_K$ となる $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の素点 $\overline{\mathfrak{P}}$ が一意的に存在することが示される. ここで,

$$G_{\overline{\mathfrak{P}}}(\overline{\mathbb{Q}}/K) = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K) \mid \sigma\overline{\mathfrak{P}} = \overline{\mathfrak{P}}\}$$

で定義され, $\overline{\mathfrak{P}}$ の分解群と呼ばれるものである.

次に Chebotarev の密度定理の応用として, $\mathbb{Q}$ の 2 つの有限次 Galois 拡大体 K_1, K_2 に対して, K_1 上で完全分解する素数の集合と K_2 上で完全分解する素数の集合が一致するならば $K_1 = K_2$ であることが示され, その結果として円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大に関しても $K_{1,\infty} = K_{2,\infty}$ であることが示される.

そこで, $K/\mathbb{Q}$ を有限次 Galois 拡大で $p \nmid [K : \mathbb{Q}]$ を満たすものとし, K_∞/K を円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大とする. また,

$$A = \{G_{\overline{\mathfrak{P}}}(\overline{\mathbb{Q}}/K_\infty) \mid \mathfrak{P} \text{ は } \overline{\mathbb{Q}} \text{ の非アルキメデス素点}\},$$

$$B_0 = \{H \subset G_{K_\infty} \mid H \text{ は上の条件 (i), (ii), (iii) を満たす}\},$$

$$B = \{H \in B_0 \mid H \text{ は } B_0 \text{ で極大}\}$$

とおく. すると上で述べた補題を用いて $A = B$ であることが証明される. これにより, G_{K_∞} から群論的に分解群となる部分群の集合 A を定めることができる. このことを用いれば $\overline{\mathbb{Q}}$ の素点 $\mathfrak{L}$ に対し,

$$G_{\mathfrak{L}}(\overline{\mathbb{Q}}/K_{1,\infty})^{ab} \simeq G_{\mathfrak{L}}(\overline{\mathbb{Q}}/K_{2,\infty})^{ab}$$

であることが示される. ここで, G^{ab} は G の最大の可換部分群である.

次に, 類体論を用いると

$$G_{\mathfrak{L}}(\overline{\mathbb{Q}}/K_{i,\infty})^{ab} \simeq \prod_{q \neq p} \mathbb{Z}_q \times \varprojlim_n \omega_{i,n} \times A_{i,l}$$

が得られる. ここで $K_{i,n} = K_i\mathbb{Q}_n$ とし, $K_{i,n,\mathfrak{L}}$ を $\mathfrak{L}|\mathfrak{L}_{K_{i,n}}$ による完備化とするとき, $\omega_{i,n}$ は $K_{i,n,\mathfrak{L}}^\times$ に含まれる, 位数が l と素なべき根のなす群であり, $A_{i,l}$ は無限生成 pro-l-abel 群である. このことが意味するのは, $G_{\mathfrak{L}}(\overline{\mathbb{Q}}/K_{i,\infty})$ に対し, $\mathfrak{L}|l$ となる素数 l が判別できるということである. 次に $d(K_i) = [K_{i,\mathfrak{L}} : \mathbb{Q}_l]$, $p^{n-c} = [(\mathbb{Q}_n)_{\mathfrak{L}} : \mathbb{Q}_l]$, $M(i,n) = l^{d(K_i)\times p^{n-c}}$ とするとき

$$\omega_{i,n} \simeq \mathbb{F}_{M(i,n)}^\times$$

となる. これにより r を素数とするとき, $\varprojlim_n \omega_{i,n}(r) \neq 0$ であることと, ある正整数 n が存在して $r | l^{d(K_i)\times p^n} - 1$ となることが同値となり, さらにこれが $(l^{d(K_i)} \bmod r) \in (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^\times(p)$ であることが同値となる. ここで

$$S_m = \{r \in \mathbb{Z} \mid r: \text{ 素数}, (l^m \bmod r) \in (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^\times(p)\}$$

とおく. このとき $S_1 \subset S_m$ ($m > 1$, $p \nmid m$) が得られる. すると次の同値が導かれる:

$$l \text{ が } K_i/\mathbb{Q} \text{ で完全分解している} \iff d(K_i) = 1,$$
$$l \text{ が } K_i/\mathbb{Q} \text{ で完全分解していない} \iff d(K_i) > 1.$$

このため, 素数 l が $K_i/\mathbb{Q}$ で完全分解していて $K_i/\mathbb{Q}$ で完全分解していない, という状況が起こった場合, $\mathfrak{L}|l$ となる素イデアル $\mathfrak{L}$ を取って $G_{\mathfrak{L}}(\overline{\mathbb{Q}}/K_{1,\infty})^{ab}$ と $G_{\mathfrak{L}}(\overline{\mathbb{Q}}/K_{2,\infty})^{ab}$ を比較すると, $\varprojlim_n \omega_{i,n}(r)$ (r はある素数) に「ずれ」が生じる. すなわち, 上述の $G_{\mathfrak{L}}(\overline{\mathbb{Q}}/K_{1,\infty})^{ab} \simeq G_{\mathfrak{L}}(\overline{\mathbb{Q}}/K_{2,\infty})^{ab}$ という事実に矛盾する. したがって, K_1 上で完全分解する素数たちの集合と K_2 上で完全分解する素数たちの集合は一致しなければならないことが結論付けられるのである. よって Chebotarev の定理に基づく補題が利用できて, $K_1 \simeq K_2$, さらには $K_{1,\infty} \simeq K_{2,\infty}$ が得られるのである.

さらに, 本論文では, 第 2 主結果の系として, 次のような結果も得られている: q を素数とし, k_q は $\mathbb{Q}$ の有限次 Galois 拡大体で $q \nmid [k_q : \mathbb{Q}]$ となっているもの, $k_{q,\infty}/k_q$ は円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大とし, そのような $k_{q,\infty}$ 全体の集合を F_q とおく. さらに

$$F_0 = \{k \mid k/\mathbb{Q} \text{ は有限次拡大}\},$$

$$E = \{r \in \mathbb{Z} \mid r = 0 \text{ または } r \text{ は素数}\}$$

とする. このとき, $K, K' \in \cup_{r\in E} F_r$ が $G(\overline{\mathbb{Q}}/K) \simeq G(\overline{\mathbb{Q}}/K')$ を満たすとすれば, $K, K' \in F_r$ ($\exists r \in E$) かつ $K \simeq K'$ が結論される. とくに, $r \neq 0$ (すなわち r は素数) でこれが満たされるならば, $K = K'$ が得られる.

論 文 審 査 結 果 の 要 旨

整数論は歴史の長い分野であるが, 特に代数体 (有理数体 $\mathbb{Q}$ 上代数的な元全体のなす体, つまり $\mathbb{Q}$ の代数的閉包の部分体) の理論が本格的に考察され始めたのは 18 世紀末から 19 世紀の Gauss の時代である. その後, 有限次代数体 K に付随して Dedekind ゼータ関数 $\zeta_K(s)$ が 19 世紀末に定義された. 関数 $\zeta_K(s)$ は体 K の性質を反映していることが古くから知られている. 例えば, $s=1$ における留数には K の類数, 判別式, K の埋め込みの個数, K に含まれる 1 のべき根の個数などが現れる (類数公式). 他にも「素イデアル定理」,「Chebotarev の定理」など, $\zeta_K(s)$ の解析から得られる結果は数多い.

本論文において, 学位申請者が取り扱い, 解決している問題は, この Dedekind ゼータ関数が関連する代数的整数論の問題である. より具体的には, 代数体の算術的同値性や同型といった観点による, 代数体の特徴づけの問題である. これらは前述のように歴史も古く, 20 世紀後半からは高度な道具立てがいろいろと開発されていて, 非常に難しい分野となっている. こうした分野において本質的に新しい結果を得ていることは, 申請者が高い能力を身につけていることを表しており, 評価に値する. また, 本論文で解決されている問題はいずれも, 円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大の理論が関連している. 円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大は「日本発」の数学理論といえる「岩澤理論」と関係が深く, 現在も非常に活発に研究されているテーマである. 本論文はこうした重要なテーマに対する貢献も含まれており, 意義深いものがある.

まず, 本論文第 1 部において申請者は, 代数体の算術的同値性に関する問題を扱って解決している. 上記のように, $\zeta_K(s)$ には体 K のさまざまな情報が含まれているが, そのため逆の問題として, Dedekind ゼータ関数が一致するような 2 つの体は等しいか (あるいは同型か), という疑問が自然に生じる. この疑問から「算術的同値」の概念が生まれた. つまり, K, K' が算術的同値であるとは, その Dedekind ゼータ関数が一致すること ($\zeta_K(s)=\zeta_{K'}(s)$) と定義し, このとき $K\approx K'$ と表す. もちろん, $K\simeq K'$ (体として同型) ならば $\zeta_K(s)=\zeta_{K'}(s)$ であるが, 上で述べた「逆の問題」すなわち「$\zeta_K(s)=\zeta_{K'}(s)$ ならば $K\simeq K'$」は, 一般には必ずしも成立しないことが知られている. 実際, 先行研究として, $\mathbb{Q}$ 上 180 次拡大である 2 つの体 K, K' で, $K\approx K'$ ($\Leftrightarrow \zeta_K(s)=\zeta_{K'}(s)$) であるが $K\not\simeq K'$ となるものの存在が, 1926 年に Gassmann により証明されているし, より具体的な結果として, 2 つの体 $K=\mathbb{Q}(\sqrt[8]{3})$, $K'=\mathbb{Q}(\sqrt[8]{48})$ を考えると, これらは $K\approx K'$ を満たすが $K\not\simeq K'$ であることが, 1970 年に Gerst-Schinzel によって証明されている.

本論文第 1 主結果 (論文第 1 部) は, こうした流れの中にある, 一般性を含んだ結果である. 直接の動機となった結果は, 算術的同値性のための必要十分条件である. その一つに, 総実代数体に対する Adachi-Komatsu の定理 (1987) がある. それは, K, K' がともに総実代数体であるとき, $K\approx K'$ であるための必要十分条件を, 円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大の言葉で表したものである.

本論文第 1 主結果は, この算術的同値性を従来の結果とは別の角度から眺めたものになっており, K, K' を任意の有限次代数体とし, やや「小さな」Galois 群を用いて $K\approx K'$ であることとの必要十分条件を 2 種導いている. これは Adachi-Komatsu の結果にある程度の影響を受けながらも, 扱っている場合は全く異なり, 道具立てとしても独自の工夫を要するものである. こうした意味で, 本質的に新しく意義ある結果を導出できたことは大いに評価してよいものと考える.

本論文第 2 部では, 絶対 Galois 群 $G_K=\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$ ($\overline{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$ の代数的閉包) が論じられている. 拡大 $\overline{\mathbb{Q}}/K$ は一般に無限次拡大となるため, 有限次拡大のときに成立する通常の Galois 理論の主定理は, そのままの形では成立しない. そこで Galois 群に Krull 位相を導入することで, 無限次にも対応した Galois 理論が構築できる. このような対象を扱うには, 高度な技術が要求されるが, 申請者はその技術を備えていることがわかる.

この方向の先行研究に Neukirch-Uchida の定理がある. それは, K, K' を $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体, G_K, $G_{K'}$ をそれぞれの絶対 Galois 群とするとき, $G_K\simeq G_{K'}$ であることと $K\simeq K'$ が同値であるというものである. ここで Dedekind ゼータ関数を思い出すと, $K\simeq K'$ なら $\zeta_K(s)=\zeta_{K'}(s)$ だから, $G_K\simeq G_{K'}$ ならば $\zeta_K(s)=\zeta_{K'}(s)$ も得られる. こうして Dedekind ゼータ関数とも関連が出てくる.

申請者は, この Neukirch-Uchida の定理を, ある種の無限次拡大体に拡張している. それは, 2 つの有限次拡大 $K_1/\mathbb{Q}$, $K_2/\mathbb{Q}$ をとり, 拡大次数の整除性に関する軽い制限のもと, それらの円分的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 $K_{1,\infty}$, $K_{2,\infty}$ を考えている. これらは無限次拡大となるので, 従来知られている有限次拡大の場合とは本質的に異なった場合といえる. そこで申請者は, Neukirch-Uchida の手法の本質的改良を編み出し, この場合にも「絶対 Galois 群が等しいならもとの体 (K_1 と K_2, さらには $K_{1,\infty}$ と $K_{2,\infty}$) が同型であることを導いている. また, さらに強く, $\mathbb{Q}$ の代数的閉包を固定したなら $K_1=K_2$, $K_{1,\infty}=K_{2,\infty}$ であることも導出している.

本論文で扱われている 2 つの問題は, Dedekind ゼータ関数という対象を一つの軸として有機的連関をもつものとなっており, その意味でも学位論文としての望ましい体裁を備えるに至っている. さらに, 将来への発展性という意味でも興味深い要素を含んでいる. すなわち, まず第 1 主結果に関しては, Adachi-Komatsu の定理をも含む, より一般的な命題に拡張できるか, あるいは Adachi-Komatsu の結果における総実という仮定を取り除く手がかりが得られるかどうか, という問題を考えることができ, 岩澤理論へのさらなる貢献も期待できる. また, 第 2 の主結果に関しては, これを基盤にして, 有限次 Galois 拡大という仮定を有限次拡大という仮定に緩めることができるかどうか, また拡大次数の整除性に関する仮定を弱められるかどうか, といった問題が考えられ, 将来の発展も十分に期待できる内容となっている.

学位申請者は, 歴史も長く, 高度な知識, 技術が要求される代数的整数論という分野において, 長年にわたり研鑽を積み, 意義ある新しい理論的結果を複数導出した. その結果は権威ある査読付き学術雑誌に掲載が決定している. また, すでに学会発表も行なっている. 学位論文公聴会における発表においても, 聴衆の興味を惹く講演を行なっており, 審査委員からも高く評価された. これらのこと, および, 本稿前半において解説とともに述べてきた評価を総合すると, 本論文は博士学位論文として十分な価値があるものと認められ, 申請者に博士の学位を授与することが相当と考えられる.