氏　　名	わん　しゃお　はん 王　枭　涵
学位の種類	博　士（工学）
学位記番号	産第３７号
学位授与の日付	平成 24 年 9 月 13 日
学位授与の要件	学位規程第５条該当
学位論文題目	Number theory and special functions

論文審査委員	（主　査）	教授	金光　滋
	（副主査）	教授	角藤　亮
	（副主査）	教授	塚田春雄

論文内容の要旨

Let G denote the classical Catalan constant defined by $G=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ and let the so-called generalized integral $I(z)$ be $I(z)=\int_0^z \log\sin t\,dt$. The evaluation $I\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}\log 2$, known as the Euler integral, has been known as an example of the integral whose primitive function cannot be expressed in terms of elementary functions but its value can be obtained by some technique. It is also known that $I\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{4}\log 2-\frac{1}{2}G$ (e.g. cf. Gradshteyn-Ryzhyk). The Euler integral plays an essential role in generalizing the Gauss mean value theorem, which is a special case of the Cauchy integral formula in Ahlfors' book ``Complex analysis.'' It is therefore rather intriguing to try to find a closed form for $I(z)$.

On the other hand, the Catalan constant has long and interesting history in number theory as the second simplest of the most complex problem of expression in the opposite parity case. Let $L(s,\chi)$ denote the Dirichlet L-function defined for $\sigma=\mathrm{Re}\,s>1$ by the absolutely convergent Dirichlet series $L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$, where χ is the 0-extension of the character of the group of reduced residue classes mod q, called the Dirichlet character mod q. Let χ_{-4} denote the Kronecker character associated to the Gaussian field $\mathbf{Q}\left(\sqrt{-1}\right)$, which is an odd character, i.e. $\chi_{-4}(-1)=-1$. Apparently, the Catalan constant is the special value of $L(s,\chi_{-4})$ at $s=2$. If χ is a Kronecker character associated to a quadratic field, the special value at $s=1$ is known as the Dirichlet class number formula and has been playing a central role in the whole spectrum of number theory, as a guiding principle in introducing an intermediate L-function and a generalization of the class number formula. It is a classical fact that this formula assures the non-vanishing of $L(1.\chi)$, which is a basis of the Dirichlet prime number theorem.

the character is associated to a real quadratic field, it is an even character and $L(1,\chi)$ has a complicated expression involving the Clausen function. Especially, if $\chi=\chi_0^*$ is the character mod 1, which is even, then it is the Riemann zeta-function $L(s,\chi_0^*)=\zeta(s)$. The special value problem has been classical and famous, e.g. $\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ due to Euler, too is the solution to the Basler problem. The same problem with s an odd integer >1 is extremely difficult and there are known only partial results due to Apery and others. Therefore, the Catalan constant and its arithmetic nature is a primitive case of the most difficult problems in the case of opposite party (i.e. the parity of the character and the special argument of s).

We have made clear that the Catalan constant is intrinsic to the Barnes G-function in the sense of the following results. It is a curious coincidence that the constant G and the Barnes G-function have the same label (the latter is the $r=2$ case of the multiple gamma function Γ_r). Our study is centered around the Catalan constant as the special value of the Dirichlet L-function in terms of the Barnes G-function.

Theorem 1. Let $S(z)=\int_0^z\frac{\pi t}{\sin \pi t}dt$. Then it has the expression

$$S(z)=z\log 2\pi+\log\frac{G(1+z)}{G(1-z)}-4\log\frac{G\left(1+\frac{z}{2}\right)}{G\left(1-\frac{z}{2}\right)}, \tag{1}$$

which is a consequence of the partial fraction expansion for the cotangent function, which in turn is equivalent to the functional equation of the Riemann zeta-function

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s), \tag{2}$$

where Γ indicates the Euler gamma function and where the Barnes G-function is defined by its Weierstrass product representation

$$\frac{G'}{G}(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{z+n}-1+\frac{z}{n}\right)+\frac{1}{2}(\log 2\pi-1)-(1+\gamma)z.$$

Theorem 2. The expression $G=\frac{\pi}{2}S\left(\frac{1}{2}\right)$ is a consequence of (1) and the Fourier expansion of the periodic Bernoulli polynomial, which is equivalent to the functional equation (2). It is shown that the expression also follows from the Ramanujan formula

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\zeta(n)}{n+1}z^n=\zeta'(0,1-z)+\zeta'(-1,1-z)\frac{1}{z}-\zeta(0)-\zeta'(-1)\frac{1}{z}+\frac{1}{2}(\gamma+1)z, \tag{3}$$

where γ is the Euler constant.

Corollary 1. We have the expression

$$G=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2k+1} \tag{4}$$

independently of (2), i.e. the Catalan constant is intrinsic to the Barnes G-function.

It is therefore shown by using the functional equation as catalysis, that G is a special value of the Barnes G-function on one hand, and it is the integral of the complete elliptic integral, which corresponds to the famous Chowla-Selberg formula to the effect that the special values of the gamma function is related to the elliptic integral. This will hopefully open a new research field of pursuing the special function whose special values are related to the special values of L-functions in the opposite parity case. .

Other chapters contain results related to the functional equation.

論文審査結果の要旨

Gを古典的なカタラン定数 $G=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ とするとき，いわゆるオイラー積分の一般化を $I(z)=\int_0^z \log\sin t\,dt$ とかけば，$I\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{4}\log 2-\frac{1}{2}G$ なる等式が既知である（たとえばグラドシュタイン-ルイジュク）．また，アールフォルス著「複素関数論」中，コーシー積分公式の特殊な場合であるガウスの平均値定理の一般化においてオイラー積分の値 $I\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}\log 2$ が本質的である．$I(z)$はもちろん初等関数で表されないことはよく知られているから，$I(z)$を何らかのより計算可能な関数によるクローズドフォームに表すことは興味深い問題である．

さらにカタラン定数は，$\sigma=\mathrm{Re}\,s>1$で絶対収束するディリクレ級数で定義されるディリクレ L-関数 $L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$ の特殊値 $G=L(2,\chi_{-4})$である．ここで一般にχは mod qの剰余群の指標の0-拡張であり，ディリクレ指標とよばれる．χ_{-4}は虚2次体であるガウスの数体$\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$のクロネッカー指標であり，奇指標である．χが2次体のクロネッカー指標のとき，$s=1$における特殊値は，ディリクレの類数等式として名高い．指標が実2次体に属する偶指標のとき，$L(1,\chi)$はクラウゼン関数を含む複雑なものとなる．χがとくに mod 1の指標 χ_0^*（偶指標）のとき，$L(s,\chi_0^*)=\zeta(s)$ーリーマン ゼータ関数となり，たとえば，$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$はやはりオイラーによるが，$s$が奇数のときは非常に困難である．

したがって，カタラン定数は，変数と指標のパリティが反対の非常に困難な場合の内最もプリミティヴな場合であると考えられる．

第2章において，Gが，奇しくもバーンズのG-関数（多重ガンマ関数Γ_rの$r=2$の場合）の特殊値であることに鑑みて，ディリクレL-関数の特殊値としてのカタラン定数の研究をメインに行い，以下の結果を得ている．

定理1は $S(z)=\int_0^z\frac{\pi t}{\sin\pi t}dt$の G-関数による表示

(1) $$S(z)=z\log 2\pi+\log\frac{G(1+z)}{G(1-z)}-4\log\frac{G\left(1+\frac{z}{2}\right)}{G\left(1-\frac{z}{2}\right)}$$

を，関数等式に同値なコタンジェント関数の部分分数展開から導出するものである．

定理2は，$G=\frac{\pi}{2}S\left(\frac{1}{2}\right)$なる表示を(1)と関数等式に同値な周期的ベルヌーイ多項式のフーリエ展開から導出するものである．さらに，ラマヌジャンの公式

(2) $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\zeta(n)}{n+1}z^n=\zeta'(0,1-z)+\zeta'(-1,1-z)\frac{1}{z}-\zeta(0)-\zeta'(-1)\frac{1}{z}+\frac{1}{2}(\gamma+1)z$$

からの帰結でもあることを示している．ここで，γはオイラー定数である．定理1，定理2を合せると，G-関数の定義式から系1の

(3) $$G=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

なる表示が，関数等式に独立に導かれ，カタラン定数がG-関数に固有のものであることが分る．

本論文は，特殊関数を巧妙に使用することにより，数論的ディリクレ級数の特殊値の数論的性質を調べる興味深い問題に，関数等式を触媒として，特殊値に固有の特殊関数を見出した顕著な業績である．カタラン定数は，完全楕円積分とも関連しているため，(3)式は，楕円積分とバーンズG-関数の間の関係を表すものと考えられる．パリティが逆の場合に予想されていた，ファンシーな別種の特殊関数を見出したことにより，数論研究に新しい局面を開いたものであり，学位論文にふさわしいと判定する．