

ルモノマーと二官能性のジビニルエーテルモノマーとの共重合を行うことにより、ポリビニルエーテル網目とポリカーボネート鎖が互いに侵入し絡まりあった構造、即ち擬相互侵入高分子網目 (semi-IPN) 構造の構築に成功した。この semi-IPN もまたブレンド体と同様に、一定張力下での紫外光の ON-OFF 照射に対して極めて早い機械的応答を示すことを確認した。この semi-IPN は、その強靱な構造のため、繰り返し ON-OFF 光照射に対して良好な再現性を現し、優れた光応答耐久性を示した。これらの結果は、本研究においてデザインしたポリマーがマイクロアクチュエータ材料として優れた機能を有していることを示している。この研究成果は国際的学術誌 *Macromolecular Rapid Communication* に掲載され、高い評価を受けている。

semi-IPN フィルムの光応答性を詳細に検討した結果、その挙動は紫外光に限らず、可視光でも同様の挙動を示すことを見出し、この挙動が従来考えられてきたトランス-シス異性化の静的変化により引き起こされるものではなく、異性化反応の動的な高速サイクル変化によって引き起こされるものであることを推察した。ここで、さらに新たな概念として「光照射による励起アゾベンゼンの振動誘起とそれによるマトリックスの弾性率低下」を導入することによってより合理的な解釈を加えた。この研究成果は国際的学術誌 *Macromolecular Chemistry and Physics* に投稿中である。

本研究で提案された二つの新たな概念は、従来の静的な “trans-cis 異性化” に基づく緩慢な変形挙動から、秒単位で可逆的、かつ大きな熱エネルギーを必要とせずにサイズ変化を制御しうる高速光変形材料を実現することを可能とし、今後の光応答性アクチュエータ材料設計の新しい指針となりうることを示した。

これらの成果は、本研究で合成されたポリマーが斬新なアイデアに基づく新規光材料として優れた特性を有することを十分に立証するものであり、実用面での利用が期待される。

以上、本論文は工学博士の学位論文として値するものと評価できる。

氏 名	李 海 龙
学位の種類	博士 (工学)
学位記番号	産 第 21 号
学位授与の日付	平成 18 年 3 月 22 日
学位授与の要件	学位規定第 4 条第 2 項該当
学位論文題目	On generalized Euler constants and an integral related to the Piltz divisor problem
論文審査委員 (主 査)	教授 金 光 滋
(副主査)	教授 中 野 吉 正
(副主査)	教授 角 藤 亮

論文内容の要旨

リーマンのゼータ関数 $\zeta(s)$ は、 $\sigma = \text{Re } s > 1$ (複素変数 s の実部 $\text{Re } s = \sigma$ が 1 より大のとき)、ディリクレ級数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

で定義される。ただし、ベキ関数は主値を取る。 $\zeta(s)$ は、様々な方法によって、 $s=1$ に 1 位の極を持つ有理型関数に解析接続されて、関数等式

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

を満たす。 $s=1$ におけるローラン展開は

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma_k}{k!} (s-1)^k$$

の形になり、 γ_k を一般オイラー (スチルチェス) 定数とよぶ。ローラン定数は、オイラーの定数とよばれ、

$$(1) \quad \gamma = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} - \log x \right\}$$

で定義される、数学でもっともよく知られた定数の一つである。

一般のゼータ関数に対してもリーマンゼータ関数について述べた事実が成り立ち、ローラン定数を閉じた形に表示する公式をクロネッカー極限公式とよぶ。金光等は、フルウィッツゼータ関数に対する積分表示から、上述の一般オイラー定数に対して、(1) と類似の表示を求めた。

本論文においては、まず §1 で、金光等のフルウィッツゼータ関数に対する積分表示で証明が与えられていない、 $s=1$ の場合に対応する積分表示の証明をおこない、同時に、 γ_k に対する、(1) に対応する公式の最も簡単な導出を与えた。このオイラー定数に対する研究が、本論文の端緒となった。

§2 では、一般のディリクレ級数 $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ から出発し、係数の部分 $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n$ が漸近式 $A(x) = P(\log x) + E(x)$ —ここで、 $P(t)$ は、 t の k 次式で、誤差項 $E(x) = O(x^{\beta} L(x))$ の形で、 $0 \leq \beta < 1$ 、また、 $L(x)$ は、対数関数

のベキ程度の位数—とする (このことは、 $f(s)$ が $s=1$ で $k+1$ 位の極をもつことに対応する)。この状況の下で、ブリッグスは、 $f(s)$ の $s=1$ におけるローラン係数に対して、(1) に類似の極限公式を求め、それを一般アーベル型定理と称した。我々は、 $L(x)$ が、対数関数のベキに限らず、緩振動関数の場合に、ブリッグスの定理を一般化することを得た。さらに、係数のウェイト付の部分 $\sum_{n \leq x} \frac{a_n}{n^{\sigma}} \log' n$ に対する漸近式を同時に求めることに成功した ($\sigma \leq 1$)。これにより、ブリッグス・ブッシュマンの結果を一般化し、自明でない例を与えた。

本論文のメインは、第 2 章であり、ここでは、一般オイラー定数を用いて、ピルツ約数問題の誤差項を含むある積分の値を具体的に表す問題をまず考察した。

$d_{\kappa}(n)$ で、 n を κ 個の自然数の積で表す表し方の数を表すとき、ピルツ約数問題は、 $\sum_{n \leq x} d_{\kappa}(n)$ の漸近式を求め、誤差項を研究すること (とくに大きさの位数を決定する問題) と述べられる。 $d_{\kappa}(n)$ の生成関数は、上述のリーマンゼータ関数の κ 乗 $\zeta^{\kappa}(s)$ であり、この関数は、 $s=1$ で κ 位の極を持つから、主要項は、上述の $\kappa-1$ 次の多項式 $P(t) = P_{\kappa-1}(t)$ で、

$$\sum_{n \leq x} d_{\kappa}(n) = P(\log x) + \Delta_{\kappa}(x)$$

の形になる。ここで、 $\Delta_{\kappa}(x)$ が上述の誤差項であり、この関数の挙動に関して数多くの研究がある。その一つに、積分 $I = I_{\kappa} = \int_1^x \frac{\Delta(u)}{u^2} du$ の値を具体的な形に表す問題が、ラヴリック、イスライーロフ、ヨドゴロフによって考察された。

我々は、この積分のパーシャル積分を、リース和ととらえることによって、リーマンゼータ関数の関数等式と同値なモジュラー関係式の理論 (金光、谷川、塚田理論) を適用することに成功し、漸近式を求めることをえた。すなわち、 $\int_1^x \frac{\Delta(u)}{u^2} du = \beta_{\kappa}^{(\kappa)} + O(x^{-\alpha})$, $\alpha > 0$ (定理 1) が成り立つ。ここで、主要項は、一般オイラー定数で具体的に表され、上述ラヴリック等、その後のシタラマチャンドラオ等の結果をすべて含む。

論文審査結果の要旨

最後に、一般オイラー定数の数値計算に使える、スタンクスの公式というものがあり、これは、第1、第2の一般オイラー定数を、「具体的に計算可能な主要項」プラス「指数関数位数で急減少する誤差項」の和で表すというものである。われわれは、スタンクスの公式が必然的になりたつ根拠が、上述のモジュラー関係式が顕現したものであるということを見出し、その具体的表示を、マイヤーのG関数を用いて与えた。さらに、スタンクスの公式より、数値計算に用いやすい、K・ベッセル関数を含む公式を求め、誤差項が指数関数的に減少する根拠が、K・ベッセル関数の退化した形であることを明らかにした。

本論文は、序論としての第1章と主結果を含む第2章からなる。第1章には、著者の2編の論文（の一部）が含まれており、とくに、第2節のフルベーパーでは、一般オイラー定数に関するブリッグスの定理の一般化が得られている。

第2章では、一般オイラー定数を用いて、ピルツ約数問題の誤差項を含むある積分の値を具体的に表す問題が完全解決されている。同時に、一般オイラー定数の数値計算を可能にするスタンクスの公式が必然的になりたつ根拠が、リーマンゼータ関数の（ベキの）関数等式—モジュラー関係式—の一つの現れであるということが conceptual に証明されている。

より具体的に、 n を κ 個の自然数の積で表す表し方の個数を $d_\kappa(n)$ で表すとき、ピルツ約数問題は、 $\sum_{n \leq x} d_\kappa(n)$ の漸近式を求め、誤差項を研究すること（とくに大きさの位数を決定する問題）と述べられる。

$\sigma = \text{Re } s > 1$ に対して絶対収束するディリクレ級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}$ で定義される関数

はリーマンのゼータ関数 $\zeta(s)$ として、数学でもっとも基本的なゼータ関数である。 $\zeta(s)$ は、 $s=1$ に1位の極を持つ有理型関数に解析接続されて、関数等式—モジュラー関係式—

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

を満たす。 $s=1$ におけるローラン展開は

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma_k}{k!} (s-1)^k$$

の形になり、ローラン係数 γ_k を一般オイラー（スチルチェス）定数とよぶ。

$d_\kappa(n)$ の生成関数は、リーマンゼータ関数の κ 乗 $\zeta^\kappa(s)$ であり、この関数は、 $s=1$ で κ 位の極を持つから、主要項は、 $\kappa-1$ 次の多項式 $P(t) = P_{\kappa-1}(t)$ で、

$$\sum_{n \leq x} d_\kappa(n) = P(\log x) + \Delta_\kappa(x)$$

の形になる。ここで、 $\Delta_\kappa(x)$ が上述の誤差項であり、この誤差項の挙動

に関する数多くの研究の一つに、積分 $I = I_k = \int_1^x \frac{\Delta(u)}{u^2} du$ の値を具体的な形に表す問題が、ラヴリック、イスライーロフ、ヨドゴーフによって考察された。

著者は、この積分のパーシャル積分を、リース和ととらえることによって、リーマンゼータ関数の関数等式と同値なモジュラー関係式の理論（金光、谷川、塚田理論）を適用することに成功し、漸近式を求めることをえた。すなわち、 $\int_1^x \frac{\Delta(u)}{u^2} du = \beta_k^{(\kappa)} + O(x^{-\alpha})$, $\alpha > 0$ (定理 1) が成り立つ。ここで、主要項は、一般オイラー定数で具体的に表示され、上述ラヴリック等、その後のシータラマチャンドララオ等の結果をすべて含む。

同時に、第 1、第 2 の一般オイラー定数を、「約数関数を含む、具体的に計算可能な主要項」プラス「指数関数位数で急減少する誤差項」の和で表すスタンクスの公式をモジュラー関係式一一つの属性として証明し、マイヤーの G-関数を用いてその具体的表示を与えている。さらに、スタンクスの公式よりも数値計算に用いやすい、K-ベッセル関数を含む公式を求め、誤差項が指数関数的に減少する根拠が、K-ベッセル関数の退化した形であることを明らかにしている。

これらの結果の示す通り、著者は、特殊関数の扱いに習熟し、モジュラー関係式理論を使いこなせる数少ない専門家として、将来の工学への応用も期待される、博士（工学）の学位に相当する結果を導いたと評価できる。