氏　　　名	昆布康博（こんぶ やすひろ）
学位の種類	博　　士（理学）
学位記番号	理 第 5 1 号
学位授与の日付	平成 20 年 3 月 22 日
学位授与の要件	学位規程第４条第１項該当
学位論文題目	A generating function for sums of multiple zeta values and its applications（多重ゼータ値の母関数とその応用）

論文審査委員	（主　査）	教授	青	木	貴	史
	（副主査）	教授	田	澤	新	成
	（副主査）	教授	長	岡	昇	勇

論文内容の要旨

本論文では多重ゼータ値と呼ばれる実数値の系列が有理数体上で生成するベクトル空間や代数の構造が考察されている．多重ゼータ値を係数とする母関数を構成し，その母関数を微分方程式論を活用し研究している。

第１章では多重ゼータ値およびその関連分野についての解説が手短に述べられている．多重ゼータ値とはリーマン・ゼータ値の自然な多重化である．リーマン・ゼータ値は自然数の正整数べきの逆数すべての和であり，べき指数である正整数を指定すると実数値が一つ定まる．自然数の平方の逆数和が円周率の平方の1/6倍であることはオイラーにより３００年近く前に発見された．同じくオイラーは自然数の偶数べきの逆数すべての和が円周率の同べきに有理数をかけたものになることを発見した．しかし自然数の正奇数乗の逆べきの和に関しては，現在までの所，その正体は分かっていない．数論における基本的な未解決問題の一つである．　多重指数 $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ $(k_i \in \boldsymbol{N}(i = 1, 2, \ldots, n),\ k_1 > 1)$ に対して二通りの多重ゼータ値が定義される：

$$\zeta(\boldsymbol{k}) = \zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \sum_{m_1 > m_2 > \cdots > m_n > 0} \frac{1}{{m_1}^{k_1} {m_2}^{k_2} \cdots {m_n}^{k_n}}$$

$$\zeta^\star(\boldsymbol{k}) = \zeta^\star(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \sum_{m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_n \geq 1} \frac{1}{{m_1}^{k_1} {m_2}^{k_2} \cdots {m_n}^{k_n}}.$$

多重ゼータ値に関する文献の多くは第一の定義を採用しているが，本論文では第二の式で定義される多重ゼータ値(等号付き多重ゼータ値と呼ぶ)を研究している．いずれの定義を採用しても有理数体上でこれらの実数値が生成するベクトル空間や代数は同型となる．多重指数　に対して，その要素すべての和をこの指数の重さと呼ぶ．また，要素の個数を深さ，要素のうち，2以上のものの個数を高さと呼ぶ．重さを固定したときに，その重さを持つ多重指数全体についての多重ゼータ値が有理数体上で生成するベクトル空間の次元に関しては Zagier による予想がなされており，Goncharov, Terasoma により次元が Zagier 予想を超えないことが証明されている．しかし，下から次元を評価することは成されておらず，また，具体的にどのような関係式が存在するかについては未解明な部分が多い．現在までに知られている線型関係式についての概説が与えられている．

第２章では重さ，深さ，高さを固定した多重指数に対して等号付き多重ゼータ値の和を考え，その母関数を構成している．まず，変数の値が１における関数値が多重ゼータ値となるような多重ポリ対数関数を定義する．そして重さ，深さ，高さをそれぞれべき指数とするパラメータを導入し総和を取った関数を考える．するとその関数は微分方程式

$$t^2(1-t)\frac{d^2 w}{dt^2} + t\left\{(1-t)(1-x) - y\right\}\frac{dw}{dt} + (xy - z^2)w = t$$

の原点における唯一の正則解となることが証明されている．次に，その由来とは独立にこの微分方程式の原点における正則解が二通りの方法で構成される．第一の方法はべき級数を用いる．

$$a_n = \frac{(n-1)!(1-x)(2-x)\cdots(n-1-x)}{((1-x)(1-y)-z^2)((2-x)(2-y)-z^2)\cdots((n-x)(n-y)-z^2)}$$

とおくとき

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$$

は唯一の正則解である．第二の方法は，いわゆる定数変化法である．

$$u_1'(t) = \frac{1}{\alpha - \beta}\, t^{-\alpha}(1-t)^{y-1} F(\beta, \beta - x, \beta - \alpha + 1; t),$$

$$u_2'(t) = \frac{1}{\beta - \alpha}\, t^{-\beta}(1-t)^{y-1} F(\alpha, \alpha - x, \alpha - \beta + 1; t)$$

を満たす関数により

$$w(t) = u_1(t)\varphi_1(t) + u_2(t)\varphi_2(t)$$

という形で解が求まる．ただし，

$$\varphi_1(t) = t^{\alpha} F(\alpha, \alpha - x, \alpha - \beta + 1; t),$$

$$\varphi_2(t) = t^{\beta} F(\beta, \beta - x, \beta - \alpha + 1; t),$$

$$\alpha, \beta = \frac{x + y \pm \sqrt{(x-y)^2 + 4z^2}}{2}.$$

である．これらの構成を詳細に述べているのが第２章の内容である．

第３章では第２章で得られた解のうち，定数変化法を用いて得られた解を利用して母関数の変数が１における値の計算を試みている．この計算において活用されているのが超幾何関数の特殊値に関するガウスの公式と超幾何関数の原点における展開を持つ解の基本系および１における展開を持つ解の基本系を結びつける接続公式である．これらを巧みに用いることにより，母関数の特殊値を

$$\Phi_0^*(1) = \frac{1}{1-y}\int_0^1 (1-t)^{-\beta} F(1-\beta, 1-\beta+x, 2-y; t)\,dt.$$

という形で求め，さらに一般化超幾何関数を用いて

$$\frac{1}{(1-y)(1-\beta)}\,{}_3F_2(1-\beta, 1-\beta+x, 1; 2-y, 2-\beta; 1).$$

という表示を得ている．

第４章では，第３章の結果を利用して，具体的な多重ゼータ値の関係式を導いている．主結果は高さと深さが一致する場合の多重ゼータ値の和をリーマンゼータ値で記述する公式を与えたことである．すなわち，$y=0$ という特殊化を行うと前章で得た結果が具体計算可能で

$$\Phi_0^*(x, z) = -\frac{1}{z^2}\left(1 - \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta(n)}{n} S_n(x, z)\right)\right)$$

となることが導かれている．ただし，$S_n(x,z) = \alpha^n + \beta^n - x^n$ である．これはパラメータに関する多項式となり，上式を展開したときにパラメータのべきの係数として現れるリーマンゼータ値の多項式が等号付き多重ゼータ値の高さと深さを等しく取ったものの和を与えることを示している．

この他にいくつかのパラメータ特殊化によって得られる結果が考察されている．