氏　　　名	西 脇 純 一（にし わき じゅん いち）				
学位の種類	博　　士（理学）				
学位記番号	理 第 5 8 号				
学位授与の日付	平 成 21 年 3 月 21 日				
学位授与の要件	学位規程第4条第1項該当				
学位論文題目	Study of classes concerned with uniformly starlike and convex functions （一様星型および一様凸型関数に関する関数族の研究）				
論文審査委員	（主　査）	教 授	尾	和	重 義
	（副主査）	教 授	長	岡	昇 勇
	（副主査）	教 授	青	木	貴 史

論 文 内 容 の 要 旨

第1章　序論

単位円板 $\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ 内で定義された解析関数

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$$

の全体を $\mathcal{A}$ とし、$\mathbb{U}$ で単葉な関数 $f(z)$ からなる $\mathcal{A}$ の部分族を $\mathcal{S}$ で表す。$\mathcal{S}$ の関数 $f(z)$ が $\mathbb{U}$ を原点に関して星型である領域 $f(\mathbb{U})$ に写像するとき、$f(z)$ は原点に関して星型であるといわれ、このような関数 $f(z)\in\mathcal{S}$ の全体は $\mathcal{S}^*$ で表される。星型領域に対する幾何学的な性質から、$f(z)\in\mathcal{S}^*$ であることと、$f(z)\in\mathcal{A}$ が

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>0 \qquad (z\in\mathbb{U})$$

を満たすことが同値であることが分かる。また、$\mathcal{S}$ の関数 $f(z)$ が $\mathbb{U}$ を凸型領域 $f(\mathbb{U})$ に写像するとき、$f(z)$ は $\mathbb{U}$ で凸型であるといわれ、凸型関数 $f(z)\in\mathcal{S}$ の全体は $\mathcal{K}$ で表される。凸型領域に対する幾何学的な性質によって $f(z)\in\mathcal{K}$ であることと、$f(z)\in\mathcal{A}$ が

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>0 \qquad (z\in\mathbb{U})$$

を満たすことが同値である。したがって、関数族 $\mathcal{S}^*$ および $\mathcal{K}$ についての解析的定義によって J.W.Alexander（1915年）が $f(z)\in\mathcal{K}$ であることと $zf'(z)\in\mathcal{S}^*$ であることが同値であることを示した。

さらに関数族 $\mathcal{S}^*$ や $\mathcal{K}$ に対する解析的定義から、M.S.Robertson（1936年）が

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\alpha \qquad (0\leqq {}^{\exists}\alpha<1;\ z\in\mathbb{U})$$

を満たす関数 $f(z)\in\mathcal{A}$ の族 $\mathcal{S}^*(\alpha)$ 、および

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>\alpha \qquad (0\leqq {}^{\exists}\alpha<1;\ z\in\mathbb{U})$$

を満たす関数族 $f(z)\in\mathcal{A}$ の族 $\mathcal{K}(\alpha)$ を導入した。　そして、A.W.Goodman（1991年）が一様星型関数 $f(z)$ からなる $\mathcal{A}$ の部分族 $\mathcal{UST}$ および一様凸型関数 $f(z)$ からなる $\mathcal{A}$ の部分族 $\mathcal{USV}$ を定義した。すなわち $f(z)\in\mathcal{UST}$ は

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{f(z)-f(\xi)}{(z-\xi)f'(z)}\right\}\geqq 0 \qquad ((z,\xi)\in\mathbb{U}\times\mathbb{U};\ z\neq\xi)$$

で定義され、 $f(z) \in \mathcal{USV}$ は

$$\mathrm{Re}\left\{1+\frac{(z-\xi)f''(z)}{f'(z)}\right\} \geqq 0 \qquad ((z,\xi)\in \mathbf{U}\times\mathbf{U}\,;\, z\neq\xi)$$

で定義される。関数族 $\mathcal{USV}$ に対して、F.Rønning（1993年）や W.Ma および D.Minda（1992年）が

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \qquad (z\in\mathbf{U})$$

という定義を与えた。しかしながら関数族 $\mathcal{UST}$ に対して、上と同様な定義が存在しないので、関数族 $\mathcal{S}^*$ と $\mathcal{K}$ に対する J.W.Alexander（1915年）の定理から

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right| \qquad (z\in\mathbf{U})$$

を満たす $\mathcal{A}$ の部分族 $\mathcal{S}_p$ が導入された。

1999年に S.Kanas と A.Wisnioska が

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > k\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right| \qquad (0\leqq k<\infty\,;\, z\in\mathbf{U})$$

を満たす $\mathcal{A}$ の部分族 k-$\mathcal{ST}$ と

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > k\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \qquad (0\leqq k<\infty\,;\, z\in\mathbf{U})$$

を満たす $\mathcal{A}$ の部分族 k-$\mathcal{UCV}$ を定義した。

そして、2004年に S.Shams, S.R.Kulkarni および J.M.Jahangiri が

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right|+\beta \qquad (\alpha\geqq 0,\, 0\leqq\beta<1\,;\, z\in\mathbf{U})$$

を満たす $\mathcal{A}$ の部分族 $\mathcal{SD}(\alpha,\beta)$ および

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|+\beta \qquad (\alpha\geqq 0,\, 0\leqq\beta<1\,;\, z\in\mathbf{U})$$

を満たす $\mathcal{A}$ の部分族 $\mathcal{KD}(\alpha,\beta)$ を導入して、これらの関数族の性質を考察し、 $\mathcal{A}$ の関数 $f(z)$ が

$$\sum_{n=2}^{\infty}\{(1-\beta)+(1+\alpha)(n-1)\}|a_n| \leqq 1-\beta$$

を満たせば、 $f(z)\in\mathcal{SD}(\alpha,\beta)$ であり、

$$\sum_{n=2}^{\infty}n\{(1-\beta)+(1+\alpha)(n-1)\}|a_n| \leqq 1-\beta$$

を満たせば、 $f(z)\in\mathcal{KD}(\alpha,\beta)$ となることを示した。

本論文では、S.Shams, S.R.Kulkarni および J.M.Jahangiri によって得られた係数不等式に注目して、 $\mathcal{A}$ の関数 $f_j(z)$ の合成積 $G_m(z)$ や一般化した合成積 $H_m(z)$ を中心に関数 $f(z)$ の様々な性質を研究した。

第2章　一様星型および凸型に関する関数族

第2章では $f(z)\in\mathcal{SD}(\alpha,\beta)$ や $f(z)\in\mathcal{KD}(\alpha,\beta)$ についての様々な関数 $f(z)$ の性質が考察される。すなわち、2.1節ではカラテオドリー関数の性質を用いて、 $f(z)\in\mathcal{SD}(\alpha,\beta)$ の係数不等式や、I.S.Jack（1971年）の補題の応用が考えられる。2.2節では J.E.Littlewood（1925年）による合成積と積分平均に関する結果を応用して、 $f(z)\in\mathcal{SD}^*(\alpha,\beta)$ の積分平均が考えられる。2.3節では

$$f_j(z) = z+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n,j}z^n \in \mathcal{A}$$

に対して $f_j(z)$ の合成積

$$G_m(z) = (f_1 * f_2 * f_3 * \cdots * f_m)(z) = z+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{m}a_{n,j}\right)z^n$$

が研究される。　さらに、2.4節では、ヘルダーの不等式がシュワルツの不等式の一般化であることに注目して、合成積の問題にヘルダーの不等式の応用が考えられる。すなわち、 $f_j(z)\in\mathcal{A}$ に対して、一般化された合成積

$$H_m(z) = z+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{m}a_{n,j}^{p_j}\right)z^n \qquad (p_j>0)$$

が定義され、ヘルダーの不等式を用いて、 $H_m(z)$ の性質が1996年に J.H.Choi, Y.C.Kim および S.Owa によって最初に考えられた。しかしながらそれ以降ヘルダーの不等式を応用したこの種の研究を行う研究者はいなかった。本論文では関数族 $f(z)\in\mathcal{SD}^*(\alpha,\beta)$ や $f(z)\in\mathcal{KD}^*(\alpha,\beta)$ に対して合成積の一般化を試みた。

第3章　p価の一様星型に関する関数族

第3章では関数族 $f(z)\in\mathcal{SD}(\alpha,\beta)$ や $f(z)\in\mathcal{KD}(\alpha,\beta)$ を p-葉解析関数に拡張して、

$$f(z) = z^p+\sum_{n=p+1}^{\infty}a_nz^n \qquad (p=1,2,3,\cdots)$$

に対して、

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - p\right| + \beta \qquad (\alpha \geqq 0,\ 0 \leqq \beta < p\ ;\ z \in \mathbb{U})$$

を満たす関数族 $\mathcal{SD}_p(\alpha,\beta)$ を導入して、関数族 $\mathcal{SD}_p(\alpha,\beta)$ の関数に対して、第2章と同様に積分平均、合成積、一般化した合成積などが考えられた。

第4章　逆問題

第4章では S.Shams, S.R.Kulkarni および J.M.Jahangiri によって導入された関数族 $\mathcal{SD}(\alpha,\beta)$ や $\mathcal{KD}(\alpha,\beta)$ の逆問題が研究される。

すなわち 4.3 節では、

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) < \alpha\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| + \beta \qquad (\alpha \leqq 0,\ \beta > 1\ ;\ z \in \mathbb{U})$$

を満たす関数族 $\mathcal{MD}(\alpha,\beta)$ と

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < \alpha\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| + \beta \qquad (\alpha \leqq 0,\ \beta > 1\ ;\ z \in \mathbb{U})$$

を満たす関数族 $\mathcal{ND}(\alpha,\beta)$ とが導入される。

4.1 節では、関数族 $\mathcal{M}(\alpha) = \mathcal{MD}(0,\alpha)$ や関数族 $\mathcal{N}(\alpha) = \mathcal{ND}(0,\alpha)$ の関数 $f(z)$ に対する係数不等式が議論される。

そして、4.3 節で、関数族 $\mathcal{MD}(\alpha,\beta)$ に対しては定理 4.3.1 において、 $f(z) \in \mathcal{A}$ が係数不等式

$$\sum_{n=2}^{\infty}\{|n-\beta+1| + |n-\beta-1| - 2\alpha(n-1)\}|a_n| \leqq \beta - |2-\beta|$$

を満たせば $f(z) \in \mathcal{MD}(\alpha,\beta)$ となり、 $f(z) \in \mathcal{A}$ が係数不等式

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\{|n-\beta+1| + |n-\beta-1| - 2\alpha(n-1)\}|a_n| \leqq \beta - |2-\beta|$$

を満たせば $f(z) \in \mathcal{ND}(\alpha,\beta)$ であることが求められた。また、ジャックの補題を応用して、関数 $f(z) \in \mathcal{MD}(\alpha,\beta)$ や $f(z) \in \mathcal{ND}(\alpha,\beta)$ に対する性質が導かれる。さらに、定理 4.3.1 で得られた係数不等式に注目して、 $\mathcal{MD}(\alpha,\beta)$ の部分族 $\mathcal{MD}^*(\alpha,\beta)$ や $\mathcal{ND}(\alpha,\beta)$ の部分族 $\mathcal{ND}^*(\alpha,\beta)$ が定義される。

4.4 節では、関数族 $\mathcal{MD}^*(\alpha,\beta)$ や $\mathcal{ND}^*(\alpha,\beta)$ に関係した合成積の研究が行われている。

4.5 節では関数族 $\mathcal{MD}^*(\alpha,\beta)$ についての一般化された合成積が議論される。関数族 $\mathcal{MD}^*(\alpha,\beta)$ に対する係数不等式の絶対値を外すために $1 < \beta \leqq 2$ に対して係数不等式

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)(1-\alpha)}{\beta-1}|a_n| \leqq 1$$

を満たす関数族 $M_1(\alpha,\beta)$ と、 $\beta \geqq 2$ に対して係数不等式

$$\sum_{n=2}^{\infty}\{n(1-\alpha) - 3 + \alpha + \beta\}|a_n| \leqq 1$$

を満たす関数族 $M_2(\alpha,\beta)$ が導入される。

本研究の成果は海外数学雑誌（すべて査読有）に発表されているが上に述べた論文要旨でも分かるように、ヘルダーの不等式を用いて一般化された合成積を考察する上で α や β に対する様々な条件を必要とした。今後はこれらの条件をどの程度まで緩くすることが出来るかということが、本研究の今後の課題の一つである。

論 文 審 査 結 果 の 要 旨

本論文では、単位円板 $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 内で定義された解析関数

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

の族 $\mathcal{A}$ に対して、$\mathbb{U}$ で単葉な関数 $f(z)$ からなる $\mathcal{A}$ の部分族 $\mathcal{S}$ から出発して、関数族 $\mathcal{S}$ の代表的な部分族 $\mathcal{S}^*(\alpha)$（位数 α の星型関数族）および $\mathcal{K}(\alpha)$（位数 α の凸型関数族）を経て、1991 年に A. W. Goodman により一様星型関数族 $\mathcal{UST}$ や一様凸型関数族 $\mathcal{USV}$ が研究されるようになった歴史的背景に始まり、2004 年に S. Shams, S. R. Kulkarni および J. M. Jahangiri が関数族 $\mathcal{UST}$ と関数族 $\mathcal{USV}$ に関連した関数族 $\mathcal{SD}(\alpha,\beta)$ と関数族 $\mathcal{KD}(\alpha,\beta)$ を導入した研究の流れが、様々な例と代表的な定理を与えながら紹介されている。

本論文の主な研究目的は単位円板内で定義された解析関数の部分族 $\mathcal{SD}(\alpha,\beta)$、$\mathcal{KD}(\alpha,\beta)$、$\mathcal{MD}(\alpha,\beta)$、$\mathcal{ND}(\alpha,\beta)$ に属する関数の合成積や、1996 年に J. H. Choi, Y. C. Kim, S. Owa によって導入された合成積の一般化を考察することにある。

$$f_j(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n,j} z^n \qquad (j = 1, 2, 3, \cdots, m)$$

で定義された $\mathbb{U}$ 内の解析関数 $f_j(z)$ の合成積は

$$G_m(z) = (f_1 * f_2 * f_3 * \cdots * f_m)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{m} a_{n,j} \right) z^n$$

で与えられ、一般化された合成積は

$$H_m(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{m} a_{n,j}^{p_j} \right) z^n$$

で与えられる。この分野における合成積の研究は、関数 $f(z)$ が満たす係数不等式、シュワルツの不等式を用いて議論される。第２章では、はじめに関数族 $\mathcal{SD}^*(\alpha,\beta)$ の関数、関数族 $\mathcal{KD}^*(\alpha,\beta)$ の関数に対する係数不等式

$$\sum_{n=2}^{\infty} \{(1-\beta) + (1+\alpha)(n-1)\} |a_n| \leqq 1 - \beta$$

および

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \{(1-\beta) + (1+\alpha)(n-1)\} |a_n| \leqq 1 - \beta$$

を用いて合成積の結果が得られている。さらに、一般化された合成積に対しては、シュワルツの不等式の一般化であるヘルダーの不等式を応用して、様々な結果を得ている。ヘルダーの不等式を応用して一般化された合成積の議論は非常に困難で、今までに、J. H. Choi, Y. C. Kim, S. Owa による 1996 年の論文（Generalizations of Hadamard products of functions with negative coefficients, J. Math. Anal. Appl. 199(1996), 495 - 501）しか存在しない。本論文は、その事実に着目して、$\mathcal{SD}^*(\alpha,\beta)$、$\mathcal{KD}^*(\alpha,\beta)$ という複雑な関数族に対する一般化された合成積について、非常に素晴らしい結果を与えている。

研究業績一覧からも分かるように、第４章が本研究の中心で、ここでは、関数族 $\mathcal{SD}(\alpha,\beta)$ や関数族 $\mathcal{KD}(\alpha,\beta)$ の逆問題が議論されている。すなわち、関数族 $\mathcal{MD}(\alpha,\beta)$ は

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) < \alpha \left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| + \beta \qquad (\alpha \leqq 0, \beta > 1)$$

で定義され、関数族 $\mathcal{ND}(\alpha,\beta)$ は

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < \alpha \left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| + \beta \qquad (\alpha \leqq 0, \beta > 1)$$

で定義される。そのために、関数 $f(z)$ の合成積を議論するための係数不等式は、それぞれ

$$\sum_{n=2}^{\infty} \{|n-\beta+1| + |n-\beta-1| - 2\alpha(n-1)\} |a_n| \leqq \beta - |2-\beta|$$

および

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \{|n-\beta+1| + |n-\beta-1| - 2\alpha(n-1)\} |a_n| \leqq \beta - |2-\beta|$$

のようになり、係数不等式の中に絶対値が介入してくる。そして、この絶対値が関数の合成積や一般化された合成積を研究するために大変大きな障害となっている。本研究では、様々な工夫によって、この困難を克服しながら、完全な形ではないが、大変素晴らしい研究成果を得ている。研究業績からも分かるように、本論文に関係した主論文１０編のうちの７編が第４章に関連した研究成果である。

西脇純一君は１０編の主論文のほかに、５編の副論文を発表しており、１５編すべてが査読のついた外国の数学雑誌に掲載されている。このように、本論文は、ヘルダーの不等式を応用して、関数の合成積の一般化について大変素晴らしい研究結果を得ており、博士（理学）の学位論文として十分に価値のある論文であると確信します。