氏　　名	伊藤洋忠（いとうひろただ）
学位の種類	博　士（理学）
学位記番号	理第53号
学位授与の日付	平成21年3月21日
学位授与の要件	学位規程第4条第1項該当
学位論文題目	Diophantine inequality for equicharacteristic excellent Henselian local rings （等標数・優秀・ヘンゼル局所環に関するディオファンタス不等式）

論文審査委員	（主　査）	教授	青木貴史
	（副主査）	教授	長岡昇勇
	（副主査）	准教授	尾﨑学

論文内容の要旨

伊藤洋忠君の得た研究成果は、数論で知られているDiophantus不等式と類似の不等式を、べき級数環の商体において示したG. Rond (2006) の結果を、等標数である解析的既約な優秀Hensel環の商体まで一般化するものである。証明には、局所環の付値論の基礎的性質を解明したD. Reesの強付値定理と、S. Izumiの定理をD. Rees (1989) とR. Hübl-I. Swanson (2001) が拡張・強化した位数あるいは付値の不等式が用いられる。この結果にはさらに特異点論への応用がある。すなわちこの定理から、局所環を係数とする2変数斉次方程式に対してM. Artinの強近似定理の線形版が成立することが証明されるのである。

まず数論の定理であり、K. RothにFields賞の受賞をもたらしたDiophantus不等式から説明する。無理数の内で、有理数係数の多項式の根となるものを代数的な数、そうでないものを超越数という。Liouvilleは19世紀半ばに「代数的な無理数は有理数で効果的に近似できない」ということを表す不等式を証明した。Thue-Siegel-Rothなどはそれをさらに強化した。Rothによると、近似する有理数を既約分数で表したとき、誤差はその分母の $-(2+\epsilon)$ 乗の定数倍で下から抑えられるのである。これを具体的に書けば

$$\forall \epsilon > 0\ \exists c(z,\ \epsilon) > 0\ \forall x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{Z}^* :\ \left|z - \frac{x}{y}\right| > c(z,\ \epsilon)|y|^{-2-\epsilon}.$$

となる。分母 y を大きく取れば誤差 $\exp(|z - x/y|)$ はいくらでも小さくできるが、指数 $-2-\epsilon$ はその効率があまりよくないことを語っている。この定理により、

$$1.01000100000000010000000000000000000000000000001000000\cdots\cdots$$

のように、小数表示において、零の並ぶ間隔がどんどん増大して行く数は、比較的小さな分母の有理数で効率的に近似できるので超越数であることが分かる。

さて上述のような形の不等式はDiophantus不等式と呼ばれるが、これはいろいろな形で一般化された。特にRondは有理数体を収束べき級数環や形式べき級数環の商体で置き換え、絶対値を位数による距離で置き換えて、Diophantus不等式が成立することを示した。伊藤君は、これが優秀Hensel環 A の商体と、その上の模範的な付値による距離に対しても、同様な不等式が成立することを示した。つまりRondの定理を特異点の局所環まで拡張したものである。ここでHensel環とは　M. Nagataによって研究された解析環や形式環のようにフレキシブルな環で、いわば陰函数の成立する環といえる。一方優秀環とは　A. Grothendieckによって定義された代数幾何学に現れる環をほぼすべて含み、種々の環論的な操作で安定な環の族である。

そこで局所環とその上の距離について説明する。ここで扱う局所環とは、

(1) 可換環である。

(2) ネーター環である、すなわちイデアルの増加列が有限回で定常化する。

(3) ただ一つの極大イデアルを持つ。

の三条件を満たすものとする。たとえば収束べき級数環や形式べき級数環がその例となる。またユークリッド空間の原点の近傍で定義された有限個の解析関数の共通零点 X をとり、解析関数の X への制限として得られる関数の芽の全体は局所環をなす。X の芽の性質はこの局所環によって表されると言っても過言ではない。

局所環 A をとり、その極大イデアルを $\mathfrak{m}$ で表す。$f \in A$ の位数を

$$\nu(f) := \max\{p : f \in \mathfrak{m}^p\}$$

で定義する。べき級数環でいえば、$\nu(f)$ は Maclaulin 展開の零でない斉次項の最低次数である。$f,\ g \in A$ に対して、

$$|f - g| := \exp(-\nu(f - g))$$

と定義すると、これは A 上の距離関数となる。これに関して環の演算は連続となっている。A のコーシー列を用いて A の完備化 $\hat{A}$ を作ればこれも自然に局所環となる。$\hat{A}$ での位数や距離は、A での位数や距離の拡張となっている。

伊藤君の示した主定理である Diophantus 不等式とは、この距離を数の絶対値のように扱い、整数全体、有理数全体 $\mathbb{Q}$、代数的実数全体を、それぞれ A、A の商体 $Q(A)$、$\hat{A}$ における $Q(A)$ の代数的閉包で置き換えて得られる（右辺の指数の大きさを除いて）上に挙げた K. Roth の定理と同じ形の不等式である。

ところで特異点の分野には、M. Artin の近似の性質と呼ばれる一連の性質があり、その一般性により大変有用なものとなっている。局所環 A に係数を持つ連立多項式方程式

$$P_s(X_1, \ldots, X_n) = 0 \quad (1 \le s \le S)$$

を考える。変数 X_i の値は、A またはその完備化 $\hat{A}$ にとることを想定する。

さて上記連立方程式に対して、$\hat{A}^n$ に属する解を形式解といい、P_s のすべてに零に近い値を与える A^n の元を擬似解ということにする。形式解、疑似解と真の解について次の三つの性質が考えられる。

[AP]（Artin 近似性）：形式解が存在するとき、そのいくらでも近くに真の解が存在する。

[SAP]（Artin 強近似性）：関数 $\beta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ が存在して、

$$P(x'_1, \ldots, x'_n) \in \exp(-\beta(i)) \quad (1 \le s \le S)$$

となる擬似解 $x'_1, \ldots, x'_n$ に対して、

$$|x_1 - x'_1| < \exp(-i), \ldots, |x_n - x'_n| < \exp(-i) \quad (1 \le s \le S)$$

となる真の解 $x_1, \ldots, x_n$ が存在する。

[LAP]（Artin 線形近似性）：SAP の β を i のアファイン関数となるように選べる。

AP は擬似解が真の解で近似されることを、SAP は AP の真の解による近似の一様性を述べている。LAP はさらに強い条件となる。LAP はいわば Lojasiewicz の不等式の無限次元化とも言うべきものである。

M. Artin (1968, 69) は A が収束べき級数環などのとき、AP、SAP を示した。そこで A がさらに優秀 Hensel 環であるとき、SAP が成立するかという問題が生じた。これは難問であったが G. Pfister–D. Popescu (1975) によって肯定的に解決された。

この解決の補正・別証に寄与のあった M. Spivakovsky (1990) は、優秀 Hensel 環に対しては、LAP も成立することを主張した。しかしこれはその指導する博士課程の学生 Rond (2005) の反例によって否定された。しかし G. Rond は S. Izumi (1985) の定理を用いて、べき級数環に対しては LAP が成立することをも示した。

伊藤君は Rond の方法にならい、上記の Diophantus 不等式を用いると、等標数優秀 Hensel 局所整域を係数とする 2 変数斉次多項式に対しても LAP を示すことができることを示した。つまり Rond が多様体上の一点における関数環に対して示したことを、特異点における関数環にまで拡張できるのことがわかった。2 変数斉次多項式というと大変単純なようであるが、その内でも最も簡単な方程式「$XY = 0$ に対する LAP」でさえ、出発点となった Izumi の定理そのものであり、これまで多くの応用を生んできたものである。

論文審査結果の要旨

局所環の研究において、20世紀半ばから位数の詳しい考察が始まった。Samuel、Rees、Nagata の純代数的な研究や、解析的カテゴリーにおける L.-J. Monique–B. Teissier の理論がまずあり、特異点における解析と代数と幾何を結ぶ基礎理論として、重要な意味を持っている。この理論を継いで20年以上前から Izumi、Rees、Hübl-Swanson による位数・付値の不等式を用いる研究が始まった。位数の不等式は、可換環論の多くの主張の土台として用いられ、解析的カテゴリーにおける、空間や写像の幾何学にも用いられてきた。この流れは近年の Rond の出現により，さらに勢いを得てきている。

Rond の Diophantus 不等式は、位数の不等式の新しい解釈をもたらした。いわば、局所環の数論的な性質の探求に向かわせるものである。伊藤君の Diophantus 不等式は、それを一般化するものであり。局所環論の非常に難しい部分である M. Nagata の Hensel 環、A. Grothendieck の優秀環の理論を駆使して得られたものである。環論と数論は、これまでも数多くのアナロジーによって相互に発展を支え合ってきたものである。Rond、伊藤の成果もそのような発展を期待させる。

さらに位数や付値に関しては、Artin に始まる近似理論も基礎理論として重要である。線形 Artin 近似性 LAP は、Artin 型の近似理論では最も自然かつ強力な性質であり、今いくつもの成立条件が探り当てられている。伊藤君の与えた定理は、シンプルな形を持つが、話題の出発点であり、数多くの応用を持つ Izumi の定理を特別のケースとして含むがゆえに、LAP の基本形と言えるであろう。形も自然であることから今後の応用が期待される。

伊藤君はこの結果を、2008年3月に近畿大学で開催された日本数学会最大の定例行事である「日本数学会年会」で発表した。また2008年佐賀県虹ノ松原で開催された「第30回可換環論シンポジウム」でも発表を行った。後者は可換環論では日本で最も重要といってもよい専門家の集会であるが、伊藤君の発表は、現在可換環論の日本の第一人者である渡部敬一氏に興味をもたれ、プレプリントの請求を受けた。また渡部氏と並び、現在可換環論では世界を率いる I. Swanson 氏にも興味を持たれいくつかの助言を受けていた。彼の成果が、時代の先端にありながら、独自性を備えていることの証左である。

解析数論でも新しい話題の登場として、内外幾人かの研究者の興味を引き起こしている。

参考主論文発表誌は、カナダ王立科学アカデミー発行の査読付き数学専門学術雑誌 Comptes rendus mathématiques である。なお主論文と手法は異なるが、類似性のある結論を持つ論文が M. Hickel によってフランス科学アカデミーの学術誌 Les Comptes rendus de l'Acade'mie des sciences に発表された。伊藤君の主論文は校正も済んでいるがまだ発行されてはいない。しかし投稿は同時期なので、先着権に問題はない。

副論文は単著であるが数理解析研究所講究録で査読付きではない。副論文の内容は H. Whitney (1934) の大問題の解決を目指すものであったが、Fields 賞受賞の Fefferman、同賞現審査委員会議長 E. Bierstone、P. Milman などの強力な研究グループに、直前に先を越され、彼らの成果に implicit に含まれる結果となったため、一流誌への投稿を断念したものである。しかし、副論文の努力は力として評価できる。したがって主論文はその転身後の成果であり、両論文の方面はかなり異なるものとなっている。しかしこれは伊藤君の力が狭い専門にとどまらないことの証である。

以上の理由により、伊藤君の提出論文は、博士（理学）の学位にふさわしい、十分に学術的価値のあるものである。