

報告 : Report

2021 年度 天文・天体物理若手夏の学校 招待講演 「BMS 対称性とメモリー効果」の報告

石橋明浩^{1,2}

Akihiro Ishibashi^{1,2}

¹ 近畿大学理工学総合研究所, ² 近畿大学大学院総合理工学研究科

¹ *Science and Technology Research Institute, Kindai University*

² *Graduate School of Science and Engineering Research, Kindai University*

(Received May 6, 2022)

概要

第 51 回天文・天体物理若手夏の学校 (2021 年 8 月 23 日) において, 時空の漸近対称性と重力波のメモリー効果についてお話した. 本稿ではその講演内容について簡潔に報告する.

1 はじめに

天文・天体物理若手夏の学校は, 天文学, 天体物理学, 宇宙物理学, 宇宙論, 相対論などを研究する若手研究者, 特に大学院博士前期あるいは修士課程学生を主要対象として毎年夏に開催される合宿型研究会である. 現在, 7つの分科会からなる. 物理の様々な分野で, このような若手研究者の集う, いわゆる「夏の学校」が開催されるが, その実施形態はさまざまだと思う. 私が大学院生のころは, 素粒子・原子核分野の夏の学校であれば, 数名の講師を招いて集中講義を受けるのが主体であったと思う. 一方, 天文・天体物理分野では, 若手学生の研究発表が主体であったようだが, 分科会によっては招待講師による講義も設定されていた. とにかく夏の学校は合宿型であり, その目的は各参加者の発表や講義から得られるもの以上に, それらの活動を通して参加学生の交流を促すことが最大目的であったと思

う. 今回, 第 51 回目の夏の学校は名古屋大学が事務局となって開催された. その主目的は今も変わらないはずと思うが, 残念ながら感染症 (COVID-19) 対策のため一同に会する分けには行かず, オンライン開催となった.

これまで相対論分科会の講師として 3 度ほど招待していただいたと思う. 1 度目は博士後期課程 (D2) のときに初期宇宙ドメインウィールのダイナミクスに関して (正確な題目は失念した), 2 度目は高エネルギー加速器研究機構で博士研究員をしていた 2008 年に, 筑波山のホテルを会場として開催された際に, 「高次元時空とブラックホール」についてお話した. そして, 本学に赴任して 10 年が過ぎた 2021 年夏に, 三度講師として招いていただき, 「BMS 対称性とメモリー効果」の題目でお話した. オンラインでの講演であり, 聴衆の様子は全く分からないのだが, 講演後も slack 等を通して質問など反応があり, 参加者にとって多少なりとも興味を持ってもら

える話ができただかと思う。

本講演は、一般相対論における時空の対称性と重力波に関する内容である。重力を含めて天体などの孤立系を定義する際に、一般相対論では「漸近平坦性」の概念を導入する。これは、対象となる天体から十分に離れた領域がほぼ平坦時空と見なせ、質量や角運動量など対象の特徴を捉える物理量がきちんと定義できる状況設定に対応する。この漸近平坦性の概念には十分離れた領域（無限遠方領域）への向い方により2種類あり、一つは「空間的無限遠」、もう一つは「光的無限遠」がある。こうした無限遠の概念をエレガントに取り扱う方法が、2020年にノーベル物理学賞を受賞した数学者 R. Penrose（ペンローズ）が1960年代に導入した「共形図（ペンローズ図）」の方法¹⁾である。これは、時空計量 g_{ab} の適切な共形変換 $g_{ab} \rightarrow \Omega^2 g_{ab}$ により、時空の因果構造を保ったまま時空全体 (M, g_{ab}) を、ある仮想的な時空 $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$ の有限領域で表す方法である。これにより、時空の大域的因果構造が文字通り視覚的に明解になる。また、孤立系を特徴づける物理量の無限遠方での極限操作による定義も明解になる。空間的無限遠 i^0 では孤立系の全エネルギーといった保存量が定義される。一方、(未来の) 光的無限遠 \mathcal{I}^+ は、着目する天体（ブラックホール連星系など）から重力波などの輻射が出て行った際に、その輻射のエネルギー流や残った系のエネルギーなどを見るのに適している。本講演の題目にある「BMS 対称性」^{2, 3)} とは、この光的無限遠における時空対称性であり、漸近対称性の一種である。光的無限遠は理想的観測者と解釈でき、例えば重力波干渉計といった観測装置の世界線がそこにあるとみなすことができる。一方、「メモリー効果」とは重力波のバーストが重力波干渉計を通過した際に、干渉計の鏡（自由落下粒子と見なす）の相対的配置の変位がずっと残り続ける現象で、いわば重力波の非振動的振舞いとして予言される現象をいう。このような現象は電磁波などの輻射にも同様に見ることが出来る。重力波のメモリー効果の存在は、1970年代に Zel'dovich と Polnarev⁴⁾ によって指摘され、その後も1990年

代に数学者の Christodoulou^{5, 6)} によって非線形レベルで議論された。重力波については2015年のブラックホール連星系からの初の直接検出が（その源がブラックホール連星系であることと共に）大きな話題となった。重力波のメモリー効果については、将来的な観測可能性が議論されているところである。最近になって、このBMS対称性と、重力波のメモリー効果、および軟重力子（重力場の赤外極限における量子論）との関係性が Strominger ら素粒子理論・超弦理論研究者らにより明かされ（例えば、文献^{7, 8)}を参照）、一般相対論・重力理論研究者も合わせて、盛んに研究されるようになった。以下では、メモリー効果とBMS対称性について、今回の夏の学校での講演スライドに準じて、その大枠を簡潔に解説したい。詳細は論文^{9, 10)}、およびそこに引用されている文献を参照されたい。

2 メモリー効果

まず、メモリー効果を説明しよう。重力波源から十分はなれた領域では、時空は平坦な Minkowski 時空 $(\mathbf{R}^4, \eta_{ab})$ に近づくと考えてよい。そこで Minkowski 時空上での計量の線形摂動を考えよう。時空計量は

$$g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$$

であり、摂動量 h_{ab} が、Minkowski 時空上の重力波を表す。この計量 g_{ab} に対してアインシュタイン方程式を書き表し、摂動 h_{ab} のトレース反転テンソル $\bar{h}_{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}h^c{}_c$ について、1次のオーダーまで考えると、次の波動方程式を得る：

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta\right)\bar{h}_{ab} = -16\pi T_{ab}.$$

ここで \bar{h}_{ab} はローレンス条件 $\partial_b \bar{h}^b{}_a = 0$ を満たし、また T_{ab} は源項を表す。また、 Δ は3次元のラプラス演算子を表す。光速およびニュートン重力定数を1とする単位系をとっている。この波動方程式の一般解は、上記の波動方程式で源項を無視した斉次波動方程式の一般解と、適切なグリーン関数 $G(x-x')$

を用いて次のように表される解

$$\bar{h}_{ab} = -16\pi \int d^4x' G(x-x') T_{ab}(x')$$

との線形結合で表される．このグリーン関数の振舞いは、

$$G \sim \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t-r)}{r}$$

である．つまりディラックのデルタ関数を含んでおり、この積分からステップ関数的な振舞いが期待できる．

今、図1のように重力波干渉計の鏡を自由落下する粒子系になぞらえよう．重力波 \bar{h}_{ab} のバーストが到達する以前の、最初の自由粒子系の空間的配置を x_0^A 、また重力波の通過後の自由粒子系の配置を x_1^A と表すことにすると、これら粒子間の相対位置は測地線偏差の方程式にしたがう：

$$\frac{d^2}{dt^2} x^A = R^A{}_{tBt} x^B.$$

ここで、 $R^A{}_{tBt}$ は、摂動 h_{ab} に対する曲率テンソルの成分である．この方程式を時間について2回積分すると、自由粒子系の相対的な空間配置が

$$x_1^A - x_0^A = \frac{1}{2} \Delta h^{\text{TT}}{}_{AB} x^B$$

と求まる（図1参照）．ここで h^{TT} は、計量の摂動のトランスバース・トレースレス分部を表し、これは、上述のグリーン関数のデルタ関数的振る舞いより、積分結果はステップ関数的に振る舞う．したがって、自由粒子系の相対位置変化は重力波バーストの通過後に元に戻ることはない．つまり、重力波干渉計の変形が永続的に続くことになる．これがメモリー効果である．

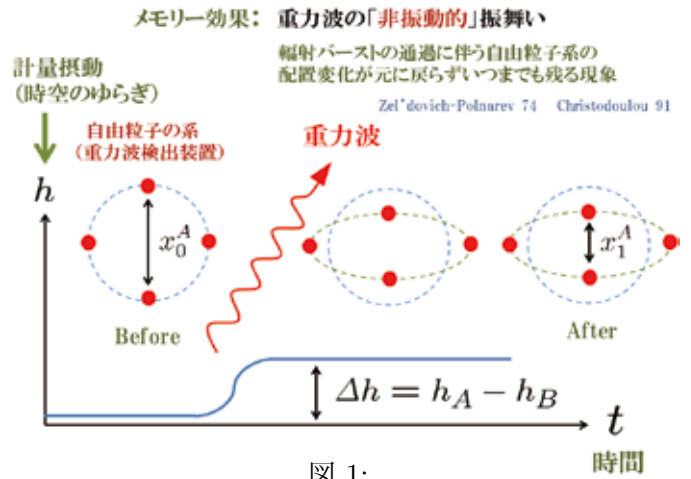


図 1:

上記のグリーン関数の振舞いは、零質量スカラー場や電磁波に対する波動方程式でも同じであり、4次元 Minkowski 時空を考える限り、零質量スカラー場、電磁波、重力波、それぞれの波が伝播する様は本質的には変わらない．したがってスカラー波や電磁波に対しても同様のメモリー効果を考えることができる．詳細は文献⁹⁾を参照されたい．また、重力波のメモリー効果の観測可能性については、例えば文献^{11, 12, 13)}を参照されたい．

3 BMS 対称性とメモリー効果

重力波を観測するのは、重力波源から十分離れた漸近平坦領域である．時空の漸近構造を理解するためには、共形図 (Penrose 図) が便利なので、Minkowski 時空を例に、共形図の見方を簡単に説明した後、時空の漸近対称性について解説しよう．

3.1 共形図

4次元の Minkowski 時空の世界線素は極座標系 (t, r, θ, ϕ) において

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

と与えられる．計量の成分は $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, r^2, r^2 \sin^2\theta)$ である．これは角度方向を無視して2次元時空部分に着目したとしても、座標の変位域は $-\infty < t < \infty, 0 < r < \infty$ であるから無限に広がった2次元時

空を表す。そのような無限に広がる時空を有界領域にコンパクト化して表すため共形変換を用いる。つまり仮想的な時空 $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$ とその上の滑らかな関数 $\Omega > 0$ を考え、

$$\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 \eta_{ab}$$

とし、 Ω は $r \rightarrow \infty$ の極限で、

$$\Omega = 0, \quad \tilde{\nabla}_a \Omega \neq 0, \quad \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \Omega \tilde{\nabla}_b \Omega = 0,$$

となるものとする。ここで $\tilde{\nabla}_a$ は、 \tilde{g}_{ab} に付随する共変微分演算子を表す。このような Ω は漸近的に $\Omega \sim 1/r$ と振る舞うものであればよく、いくらでも考えることができる。つまり、 \tilde{M} 上での適当な滑らかな関数 $\omega > 0$ を考えて、 $\Omega \rightarrow \omega \Omega$ と置き換えても以下で述べる構造は変わらない。この共形変換によって物理的な時空上のベクトル V^a のノルム $g_{ab} V^a V^b$ の符号は不変であるから、時空 (M, η_{ab}) と仮想的時空 $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$ に於いて光円錐は変わらない。したがって時空の因果構造を保ったままの変換となる。このとき、無限に広がる Minkowski 時空の (t, r) で張られる 2次元 Minkowski 時空は、図2のように有限領域に写される。これを共形図あるいは Penrose 図¹⁾ という。

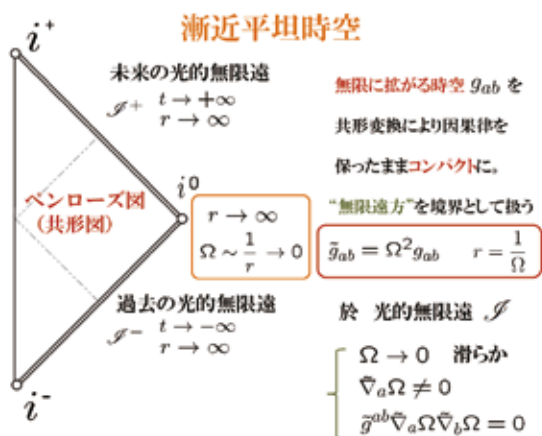


図 2:

漸近平坦時空のペンローズ図 R. Penrose Phys. Rev. Lett. 1963

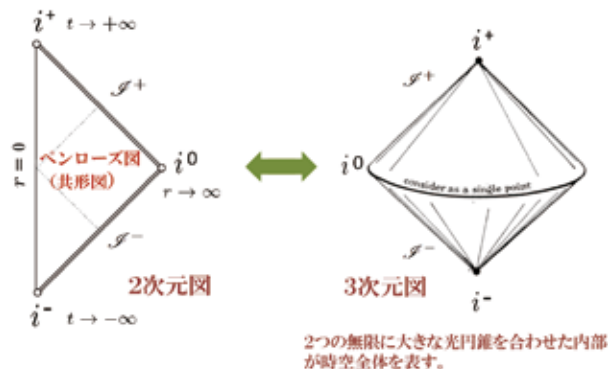


図 3:

Penrose 図 2 には無限遠に対応する $i^\pm, i^0, \mathcal{I}^\pm$ の記号で表される 5つの境界があることが分かる。添え字の + は「未来」を、- は「過去」を表す。まず i^\pm はそれぞれ未来と過去の時間的無限遠 $t \rightarrow \pm\infty, r < \infty$ を、 i^0 は空間的無限遠 $t < \infty, r \rightarrow \infty$ を表す。また \mathcal{I}^\pm はそれぞれ未来と過去の光的無限遠 $t \rightarrow \pm\infty, r \rightarrow \infty, |t \mp r| < \infty$ を表す。光的無限遠 \mathcal{I}^\pm は、その法ベクトルが $\tilde{n}^a = \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_b \Omega$ であり、 $\tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \Omega \tilde{\nabla}_b \Omega = \tilde{n}^a \tilde{n}_a = 0$ の要求から分かるように、 \tilde{M} 上の光的超曲面になっている。角度座標を一つだけ取り入れて 3次元で表したものが図3の右図である。ただし、3次元表示の場合には空間的無限遠 i^0 は、あたかも円周のように描かれているが、実際は \tilde{M} 上の 1点と見なされるべきことに注意にする。3次元表示のダイヤモンド型の時空図は、Penrose 自身による手書きのイラスト¹⁾ である。

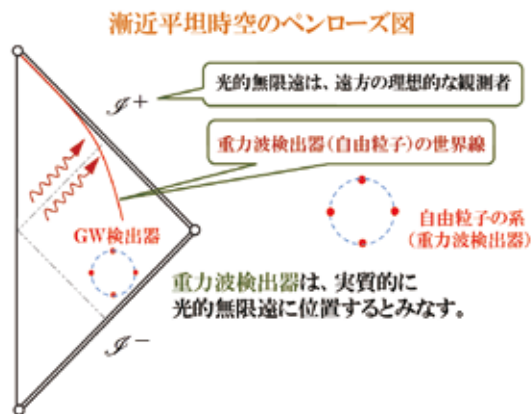


図 4:

これらの境界の内、特に重要なものは、理想的な

観測者に対応する未来の光的無限遠 \mathcal{I}^+ である。電磁波や重力波のような輻射や零質量粒子は、 \mathcal{I}^+ に到達する。図4のように、重力波干渉計の世界線は \mathcal{I}^+ の近傍にあるものと考えてよいし、また次節で説明する BMS 漸近対称性は、 \mathcal{I}^\pm 近傍における時空対称性である。

3.2 BMS 対称性

時空の対称性は、時空計量の等長変換を生成する Killing ベクトルで記述される。与えられた計量 g_{ab} に対して次の方程式を満たすベクトル場 X^a が Killing ベクトルである：

$$\mathcal{L}_X g_{ab} = \nabla_a X_b + \nabla_b X_a = 0.$$

線形独立な Killing ベクトル X^a の数が多いほど、高い対称性をもつ分けだが、一般に n 次元のリーマン多様体に対して独立な Killing ベクトルの数は最大 $n(n+1)/2$ 個であり、最大個数の Killing ベクトルを許す空間を極大対称空間という。簡単のため、平坦時空を考えよう。Minkowski 計量 η_{ab} は Poincare 対称性を持っており、10 本の独立な Killing ベクトルにより生成される「極大対称時空」である。Poincare 対称性を生成する自由度 10 については、Minkowski 時空の並進対称性の自由度が 4、ローレンツブーストの自由度が 3、空間回転の自由度が 3 である。漸近平坦時空は遠方で時空が Minkowski 時空に近づくのであるから、遠方に於いて Poincare 対称性が再現されると予想したくなるだろう。しかし、これから説明するように、無限遠方での漸近対称性は Poincare 対称性より遥かに大きい無限次元の変換群をなすことが分かる。

仮想的な時空 \tilde{M} 上のベクトル場 \tilde{X}^a を考えよう。物理的な漸近平坦時空 M 内部では $\tilde{X}^a = X^a$ と表すことにする。このベクトル場 X^a が漸近平坦時空の光的無限遠 \mathcal{I} における漸近対称性であるとは、 \mathcal{I} に於いて、

$$\Omega^2 \mathcal{L}_X g_{ab} = 0,$$

が成り立つことである。もし、 $\tilde{X}^a = X^a$ が (M, g_{ab}) の Killing ベクトルであれば、上式は定義より自明に成り立つ。漸近対称性の特徴は、 $\Omega^2 \rightarrow 0$ の極限をとるため、 $\mathcal{L}_X g_{ab} \neq 0$ であっても構わないことにある。そのため、例えば次のようなベクトル場が漸近対称性の生成子と成り得る：

$$X^a = T(\theta, \phi) \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^a + \dots$$

ここで $u := t - r$ と置いた。これは、もし T が定数の場合には、Minkowski 時空内部での通常の意味での時間並進対称性の生成子であるが（図5左図参照）、 T が角度座標に依存する場合は、もはや Minkowski 時空内の対称性とは成り得ない。しかし、 \mathcal{I} 上では Ω^2 の因子のおかげで漸近対称性の生成子となる（図5右図参照）。光的無限遠 \mathcal{I} は光的測地線により生成されるが、上記の X^a は、与えられた角度座標で表される \mathcal{I} の光的測地線生成子を、それ自身へと移す写像を表す。

角度依存並進対称性

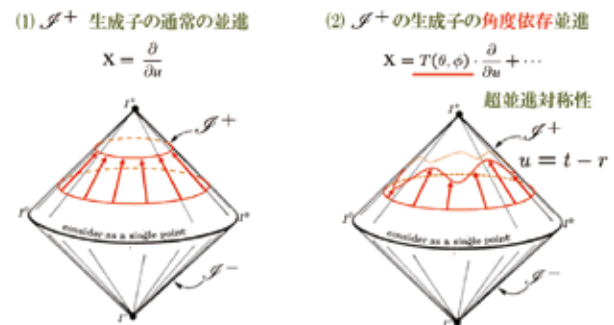


図 5:

この意味で、上記の X^a は、Minkowski 時空内部における 4 つの並進対称性を、2 次元球面 (θ, ϕ) 上の関数自由度の並進対称性へ拡張したものと見なすことができる（図5右図参照）。これを「超並進対称性 (supertranslation)」という。BMS 対称性とは、ローレンツブーストや空間回転とともに、超並進対称性からなる無限次元の漸近対称性をいう。

3.3 重力波のエネルギーと News テンソル

さて、BMS 対称性とメモリー効果の関係をみるために、未来の光的無限遠 \mathcal{I}^+ へと届いた重力波の

エネルギー流について簡単に述べて置こう。詳細は文献¹⁰⁾にある。上述したように \mathcal{I}^+ は \tilde{M} 上の光的超曲面であるため、その近傍で次のような M 上の光的ガウス座標系 (u, r, z^A) をとることができる:

$$ds^2 = -2du(dr + \alpha du + r\beta_A dz^A) + r^2\gamma_{AB}dz^A dz^B.$$

ここで、 $(\alpha, \beta_A, \gamma_{AB})$ が M 上の計量 g_{ab} の光的ガウス座標成分であり、 r は M 上の光的測地線のアフィン・パラメーターである。仮想的時空 \tilde{M} 上の計量は、 $\Omega = 1/r$ として、 $\tilde{ds}^2 = \Omega^2 ds^2$ で与えられ、 $r \rightarrow \infty$ が \mathcal{I}^+ に対応する。また、このとき \tilde{M} 上において、 u は \mathcal{I}^+ 上で光的座標となり、かつその光的測地線生成子のアフィンパラメーターに対応する。そして、 \mathcal{I}^+ の $u = \text{const.}$ 面は、 \mathcal{I}^+ の2次元断面 Σ であり、角度座標 z^A で表される2次元球面を表す。計量の座標成分 $(\alpha, \beta_A, \gamma_{AB})$ は、 Σ 上のテンソル場と見なすこともできる。Minkowski 時空の場合は $\alpha = 1/2, \beta_A = 0, \gamma_{AB} = S_{AB}$ (単位球面の計量) である。ここで、 γ_{AB} を \mathcal{I}^+ から次のように $\Omega = 1/r$ の冪展開をしよう:

$$\gamma_{AB} = \sum_{n \geq 0} \gamma_{AB}^{(n)}(z) r^{-n}.$$

展開の1次の係数 $\gamma_{AB}^{(1)}$ の u 微分を

$$N_{AB} := -\partial_u \gamma_{AB}^{(1)},$$

と表そう。News テンソルとよばれる、この N_{AB} を用いると、 \mathcal{I}^+ での重力波のエネルギー流 \mathcal{F} は、

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{32\pi} \int du T N_{AB} N^{AB} + \frac{1}{8\pi} \int_{S_\infty^2} T D^A D^B \Delta_{AB}.$$

となる。ここで積分区間は、 \mathcal{I}^+ に於いて、はじめの定常状態 $u < u_0$ から重力波バーストが通過した後の定常状態 $u > u_1$ を含むものとする。また、 $T = T(z^A)$ は、上述した超並進対称性の生成子 X^a に現れた2次元球面 Σ 上の任意の関数である。また、 D_A は Σ 上の共変微分演算子であり、 Δ_{AB} は

$$\Delta_A^B := \left(D_A D^B - \frac{1}{2} \delta_A^B D^C D_C \right) T$$

である。この Δ_A^B が、ちょうど光的無限遠 \mathcal{I}^+ の近傍における時間的測地線束の重力波の通過前後での変形を、

$$x_1^A - x_0^A = \frac{1}{r} \Delta_A^B x_0^B$$

と表しており、そのため $T(z)$ がメモリー効果のいわば“ポテンシャル”に対応していることが分かる。こうして、メモリー効果はこの Δ_A^B と $T(z)$ の関係を通して、BMS 対称性をも表しているのである (図6)。詳細は文献¹⁰⁾ を参照していただきたい。したがって、重力波のメモリー効果の観測は、BMS 対称性という特殊な時空対称性を観測することにもなる。

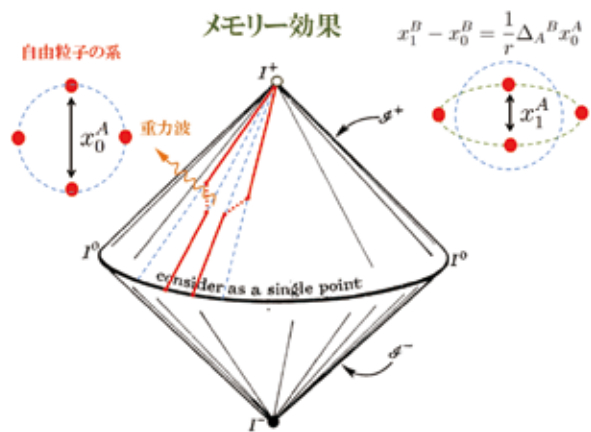


図 6:

4 まとめ

以上、第51回天文・天体物理若手夏の学校における講演をもとに、時空のBMS対称性と重力波のメモリー効果の関係について概説した。特にBMS対称性の超並進対称性の生成ポテンシャル $T(z)$ が、重力波メモリー効果のポテンシャルであることも示した。このことは、超並進対称性がなければメモリー効果もないことを表している。本稿では述べなかったが、時空次元が4より大きい時空では、超並進対称性は存在しないことが分かっている^{9, 10)}。また、ここで説明したように、BMS超並進対称性といった漸近対称性は、本来は漸近平坦時空の無限遠方における対称性であるが、近年では膨張宇宙の光

的無限遠 \mathcal{I} における漸近対称性や, \mathcal{I} と同様に時空の特別な光的超曲面であるブラックホールの事象の地平面における類似の対称性も考察され, ブラックホールの情報問題との示唆的關係¹⁴⁾ が研究されるなど, 興味深い発展をしている. 重力波の物理は, 観測・理論の深まりとともに, 天文天体物理や一般相対論の枠組みを越えた視界の拡がりを見せ始めている.

参考文献

- 1) R. Penrose, Phys. Rev. Lett. 10 (1963) 66
- 2) H. Bondi, M.G.J. van der Burg and A.W.K. Metzner, Proc. Roy. Soc. Lond. A 269 (1962) 21
- 3) R.K. Sachs, Proc. Roy. Soc. Lond. A 270 (1962) 103
- 4) Ya B. Zel'dovich and A.G. Polnarev, (1974) Sov. Astron. 18 17
- 5) D. Christodoulou, Phys. Rev. Lett. 67 (1991) 1486
- 6) K.S. Thorne, Phys. Rev. D45 (1992) 520
- 7) A. Strominger, J. High Energy Phys. 07 (2014) 152
- 8) A. Strominger and A. Zhiboedov, J. High Energy Phys. 01 (2016) 086
- 9) D. Garfinkle, S. Hollands, A. Ishibashi, A. Tolish and R.M. Wald, Class. Quant. Grav. 34 (2017) 145015
- 10) S. Hollands, A. Ishibashi, and R.M. Wald, Class. Quant. Grav. 34 (2017) 155005
- 11) M. Favata, Class. Quant. Grav. 27 (2010) 084036
- 12) C. Cutler, S. Burke-Spolaor, M. Vallisneri, J. Lazio, and W. Majid, Phys. Rev. D 89 (2014) 4, 042003
- 13) L.O. McNeill, E. Thrane, and P.D. Lasky, Phys. Rev. Lett. 118 (2017) 181103
- 14) S.W. Hawking, M.J. Perry, A. Strominger, Phys. Rev. Lett. 116 (2016) 23, 231301