理総研研報, 第 33 号, 1-4, 2022
Annu. Rep. RIST, No. 33, 1-4, 2022

解説：Review

多重フルヴィッツポリログの積分表示について

石橋大生[1], 井原健太郎[2]

[1] 近畿大学総合理工学研究科, [2] 近畿大学理工学総合研究所

(Received March 31, 2022)

概要

著者による最近の研究[1)]で明らかになった, 多重フルヴィッツポリログの基本性質について解説する. 先行研究[2)]で得た, 通常の多重ポリログの微分公式, 反復積分表示, メリン積分表示が, 多重フルヴィッツポリログに対して拡張される. また, そのメリン積分表示の被積分関数が満たすある偏微分方程式や極限公式について説明する.

1 はじめに

近年, 種々のゼータ関数やポリログ (関数) の「多重化」が活発に研究されている. 例えば, 古典的なポリログは, $k \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\mathrm{Li}_k(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m^k}, \quad (|z| < 1)$$

で定義される. その多重化として, 多重ポリログは

$$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z}) = \sum_{m_1 > \cdots > m_n > 0} \frac{z_1^{m_1} \cdots z_n^{m_n}}{{m_1}^{k_1} \cdots {m_n}^{k_n}}$$

と定義される[5)]. 但し, $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$, $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ であり,

$$|z_1| < 1, \quad |z_i| \leq 1 \quad (2 \leq i \leq n)$$

の条件の下, 右辺の多重級数は絶対収束する. 多重化には様々な意義がある. 例えば,

$$\mathrm{Li}_k(z_1)\mathrm{Li}_l(z_2) = \mathrm{Li}_{(k,l)}(z_1, z_2) + \mathrm{Li}_{(l,k)}(z_2, z_1) + \mathrm{Li}_{k+l}(z_1 z_2)$$

が成り立ち, 一般に, 多重ポリログが積で閉じる性質をもつ. また, $k_i > 1$ ならば, 微分公式

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{z_i}\mathrm{Li}_{k_1,\ldots k_{i-1},k_i-1,k_{i+1},\ldots,k_n}(\boldsymbol{z}).$$

が成り立ち, 多重ポリログが微分で閉じる性質をもつ.

本原稿では, 多重ポリログのフルヴィッツ型への拡張を議論し, その微分公式や反復積分表示, メリン積分表示などを与えた研究[1)]について解説する.

$$\begin{array}{ccc} \text{ポリログ} & \longrightarrow & \text{多重ポリログ} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{フルヴィッツポリログ} & \longrightarrow & \text{多重フルヴィッツポリログ} \end{array}$$

2 節にて, 多重フルヴィッツポリログの定義と収束性について説明し, 3 節にて, 多重フルヴィッツポリログの微分公式と反復積分表示について述べる. 4 節では, 多重フルヴィッツポリログのメリン型の積分表示について説明し, その被積分関数の満たす偏微分方程式や極限公式について述べる.

2　多重フルヴィッツポリログ

フルヴィッツゼータ関数は, $\Re(\beta) > -1$ に対し, 級数

$$\zeta(s;\beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+\beta)^s}, \quad \Re(s) > 1 \tag{1}$$

で定義される. $\beta = 0$ のときが, 古典的なリーマンゼータ関数であり, パラメータ β の値を変化させることで, 様々なゼータ関数の研究に利用される. また, メリン型の積分表示

$$\zeta(s;\beta) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{e^{-(\beta-1)x}}{1-e^{-x}} x^{s-1} dx$$

をもつ. 但し, $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ はガンマ関数である. これにより, フルヴィッツゼータ関数の解析接続, 関数等式, 特殊値などの基本性質が明らかになる.

$s = k \in \mathbb{N}$ とし, 級数 (1) を巾級数化すると, 自然にフルヴィッツポリログ

$$\mathrm{Li}_k^{\beta}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{(m+\beta)^k}$$

が考えられる. この多重化を考察する.

$$\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n,$$
$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{C}^n,$$
$$\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$$

に対し, 多重フルヴィッツポリログを

$$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{z}) = \sum_{m_1 > \cdots > m_n > 0} \frac{z_1^{m_1+\beta_1} \cdots z_n^{m_n+\beta_n}}{(m_1+\beta_1)^{k_1} \cdots (m_n+\beta_n)^{k_n}} \tag{2}$$

と定義する. 但し, $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{z}$ は条件

$$\begin{cases} |z_1| < 1, \quad |z_i| \le 1 & (i = 2, \ldots, n) \\ -\pi < \arg z_i \le \pi & (i = 1, \ldots, n) \\ \Re(\beta_i) > -n + i - 1 & (i = 1, \ldots, n) \end{cases} \tag{3}$$

を満たすものとする.

(3) の 2 番目の偏角条件から, (2) の分子にある複素巾 $z_i^{m_i+\beta_i}$ が一価関数となる. また, $m_i \ge n-i+1$ であるので, 3 番目の条件から $\Re(m_i+\beta_i) > 0$ となり, 特に, (2) の分母は 0 にならない. そして, 1 番目の条件を満たす z_i に対し, $|z_i^{m_i+\beta_i}|$ は有界になる. これらを用いて, 次の主張が得られる.

定理 1 条件 (3) のもと, 級数 (2) は絶対収束する. よって, $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{z})$ は $\boldsymbol{z}$ に関する解析関数である.

例えば, 1 節で述べた多重ポリログは, $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{z})$ の $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}$ の場合に相当する. また, 通常の 1 変数多重ポリログは, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{z} = (z, 1, \ldots, 1)$ の場合に相当する.

3　微分公式と反復積分表示

定理 1 から, $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{z})$ は, 各変数 z_i に関して偏微分可能であるが, 偏微分もまた多重フルヴィッツポリログで表すことができる：

命題 1 (偏微分公式 文献 [1]) 条件 (3) を満たす $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{z}$ と $1 \le i \le n$ に対し, 次が成り立つ.

(i) $k_i > 1$ のとき,

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{z_i} \mathrm{Li}_{k_1,\ldots k_{i-1}, k_i - 1, k_{i+1}, \ldots, k_n}^{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{z}).$$

(ii) $k_i = 1,\ 2 \le i \le n$ のとき,

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{1-z_i} \left(z_i^{\alpha_i} \mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{\beta}'}(\boldsymbol{z}') - \frac{\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{\beta}'}(\boldsymbol{z}'')}{z_i^{\alpha_{i-1}+1}} \right).$$

(iii) $k_i = 1,\ i = 1$ のとき,

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{z}) = \frac{z_1^{\alpha_1}}{1-z_1} \mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{\beta}'}(\boldsymbol{z}').$$

但し, $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{z}$ に対し, 長さが 1 つ短い変数の組を

$$\boldsymbol{z}' = (z_1, \ldots, z_{i-1}, z_i z_{i+1}, z_{i+2}, \ldots, z_n) \ (1 \le i < n),$$

$$\boldsymbol{z}' = (z_1, \ldots, z_{n-1}) \ \ (i = n),$$

$$\boldsymbol{z}'' = (z_1, \ldots, z_{i-2}, z_{i-1} z_i, z_{i+1}, \ldots, z_n) \ (2 \le i \le n),$$

$$\boldsymbol{\beta}' = (\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n)$$

と定める．

命題1は, (2) の右辺の級数を z_i で項別微分することで簡単に証明することができる．

偏微分公式から, 次の反復積分表示が示される．$\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{C}^n$ に対し, $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{C}^n$ を, 次で定める：

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}. \tag{4}$$

定理 2 (反復積分表示 文献 [1]) 条件 (3) を満たす $\boldsymbol{k},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{z}$ に対し, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{\beta}}(z_1,z_2,\ldots,z_n)=\\
&\underbrace{\int_0^1\frac{dt}{t}\int_0^t\frac{dt}{t}\cdots\int_0^t\frac{dt}{t}}_{k_1-1}\int_0^t\frac{z_1(z_1t)^{\alpha_1}}{1-z_1t}dt\\
&\underbrace{\int_0^t\frac{dt}{t}\int_0^t\frac{dt}{t}\cdots\int_0^t\frac{dt}{t}}_{k_2-1}\int_0^t\frac{z_1z_2(z_1z_2t)^{\alpha_2}}{1-z_1z_2t}dt\\
&\qquad\vdots\\
&\underbrace{\int_0^t\frac{dt}{t}\int_0^t\frac{dt}{t}\cdots\int_0^t\frac{dt}{t}}_{k_n-1}\int_0^t\frac{z_1\cdots z_n(z_1\cdots z_nt)^{\alpha_n}}{1-z_1\cdots z_nt}dt.
\end{aligned}$$

これは $k:=k_1+\cdots+k_n$ 回の反復積分で, 右から順次, 関数を積分するものとする．正確には, 積分変数を $t_1,\ldots,t_k$ と区別すべきだが, 全て t と略記している．

4　メリン積分表示

多重フルヴィッツポリログ $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{z})$ をメリン型の重積分で表示するために, 次の関数 $H_{\boldsymbol{\alpha}}^n(\boldsymbol{z};\boldsymbol{q})$ を導入する．$I=(0,1)$ とし, $\boldsymbol{q}=(q_1,\ldots,q_n)\in I^n$ とする．

定義 1 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{C}^n$ に対し

$$\begin{aligned}
H_{\boldsymbol{\alpha}}^n(\boldsymbol{z};\boldsymbol{q})&=\frac{1}{q_1\cdots q_n}\prod_{j=1}^n\frac{(z_1\cdots z_jq_1\cdots q_j)^{\alpha_j+1}}{1-z_1\cdots z_jq_1\cdots q_j}\\
&=\frac{z_1^{\beta_1+n}\cdots z_n^{\beta_n+1}q_1^{\beta_1+n-1}\cdots q_n^{\beta_n}}{(1-z_1q_1)\cdots(1-z_1\cdots z_nq_1\cdots q_n)}
\end{aligned}$$

とする．但し, $\boldsymbol{\alpha}$ に対して $\boldsymbol{\beta}$ を式 (4) で定める．簡単のため, 以下, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{z}$ は条件 (3) を満たすと仮定する．

定理 3 (メリン積分表示．文献 [1]) 条件 (3) を満たす $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{k}$ に対し, $\boldsymbol{\alpha}$ を (4) で定める．このとき,

$$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{z})=\frac{1}{\Gamma(\boldsymbol{k})}\int_{I^n}H_{\boldsymbol{\alpha}}^n(\boldsymbol{z};\boldsymbol{q})\prod_{j=1}^n(-\ln q_j)^{k_j-1}d\boldsymbol{q} \tag{5}$$

となる．但し, $\Gamma(\boldsymbol{k})=\prod_{j=1}^n\Gamma(k_j)$, $d\boldsymbol{q}=\prod_{j=1}^n dq_j$ とする．

定理3は, 著者による解説 [2] で述べた1変数多重ポリログのメリン積分表示を拡張したものである．z を $\boldsymbol{z}$ へと多変数化し, さらにフルヴィッツ型へと拡張している．定理の証明の詳細は, 文献 [1], または第1著者の修士論文 [3] に譲るが, 2通りの証明がある．1つは上で述べた定理2の反復積分を変形して導く方法であり, もう1つは, 以下に述べる被積分関数 $H_{\boldsymbol{\alpha}}^n(\boldsymbol{z};\boldsymbol{q})$ の性質を用いた証明である．

命題 2 ($H_{\boldsymbol{\alpha}}^n(\boldsymbol{z};\boldsymbol{q})$ の微分公式 文献 [1])

$$z_i\frac{\partial}{\partial z_i}H_{\boldsymbol{\alpha}}^n(\boldsymbol{z};\boldsymbol{q})=\frac{\partial}{\partial q_i}q_iH_{\boldsymbol{\alpha}}^n(\boldsymbol{z};\boldsymbol{q})\qquad(1\le i\le n)$$

を満たす．

この命題は, $H_{\boldsymbol{\alpha}}^n(\boldsymbol{z};\boldsymbol{q})$ の級数表示

$$\begin{aligned}
H_{\boldsymbol{\alpha}}^n(\boldsymbol{z};\boldsymbol{q})&=\frac{1}{q_1\cdots q_n}\\
&\times\sum_{m_1>\cdots>m_n>0}(z_1q_1)^{\beta_1+m_1}\cdots(z_nq_n)^{\beta_n+m_n}
\end{aligned}$$

を用いると, 項別微分により単純な計算で証明できる．

命題 3 ($H^n_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{z};\boldsymbol{q})$ の極限公式．文献 [1]) $n \geq 2$ に対し, 次が成り立つ．

(i) $\displaystyle\lim_{q_1\to 1} H^n_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{z};\boldsymbol{q}) = \frac{z_1^{\alpha_1+1}}{1-z_1} H^{n-1}_{\boldsymbol{\alpha}''}(\boldsymbol{z}';\boldsymbol{q}')$.

(ii) $2 \leq i \leq n$ のとき,

$$\lim_{q_i\to 1} H^n_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{z};\boldsymbol{q}) = \frac{1}{1-z_i}\left(z_i^{\alpha_i+1} H^{n-1}_{\boldsymbol{\alpha}'}(\boldsymbol{z}';\boldsymbol{q}') - \frac{1}{z_i^{\alpha_{i-1}}} H^{n-1}_{\boldsymbol{\alpha}'}(\boldsymbol{z}'';\boldsymbol{q}')\right).$$

但し, $1 \leq i \leq n$ に対し,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{z}' &= (z_1,\ldots,z_{i-1},z_iz_{i+1},z_{i+2},\ldots,z_n) \quad (i \neq n)\\
\boldsymbol{z}' &= (z_1,\ldots,z_{n-1}) \quad (i = n)\\
\boldsymbol{q}' &= (q_1,\ldots,q_{i-1},q_{i+1},\ldots,q_n)\\
\boldsymbol{\alpha}'' &= (\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)
\end{aligned}$$

$1 < i \leq n$ に対し,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{z}'' &= (z_1,\ldots,z_{i-2},z_{i-1}z_i,z_{i+1},\ldots,z_n)\\
\boldsymbol{\alpha}' &= (\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-2},\alpha_{i-1}+\alpha_i,\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n)
\end{aligned}$$

とする．

命題 2, 命題 3 を用いて, 定理 3 の右辺が, 命題 1 と同じ偏微分公式を満たすことが示せ, これにより, 定理 3 を証明することができる．

5 最後に

4 節で述べたように, 関数 $H^n_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{z};\boldsymbol{q})$ には様々な性質があり, それらが多重フルヴィッツポリログ $\mathrm{Li}^{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{z})$ の性質を導いている．ここでは述べなかったが, 文献 [1] では, 多重フルヴィッツポリログが調和積と呼ばれる積構造をもつことを証明している．従って, 調和積の構造も, $H^n_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{z};\boldsymbol{q})$ のある種の積構造に由来していることを期待している．それは, 最近の井原・中村・山本による研究 [4] によって, 調和積と相性の良いある種の関数のメリン積分表示の被積分関数に同様の現象が見つかっているためである．メリン積分表示を通して, 多重 (フルヴィッツ) ポリログの新たな側面が解明されることを期待している．

謝辞 第 2 著者は本研究に対し, 下記研究費による支援を受けています: JSPS KAKENHI (Grant numbers 18K03260).

参考文献

1) H. Ishibashi, K. Ihara, *An expression of multiple polylogarithm via Mellin integral*, in preparation.

2) 石橋大生, 井原健太郎, 近畿大学理工学総合研究所紀要 **32** (2021)

3) 石橋大生, 多重フルヴィッツポリログのメリン積分表示, 近畿大学修士論文 (2022)

4) K. Ihara, Y. Nakamura, S. Yamamoto, *Integral representation of interpolant of multiple harmonic sum*, in preparation.

5) A. B. Goncharov, Mathematical Research Letters **5** (1998)