氏　　名	早味俊夫（はやみ　としお）
学位の種類	博　士（理学）
学位記番号	理第63号
学位授与の日付	平成23年3月22日
学位授与の要件	学位規程第4条第1項該当
学位論文題目	Study on coefficient problems concerned with Hankel determinant for subclasses of analytic functions （解析関数族の部分族に対するハンケル行列式に関する係数問題についての研究）

論文審査委員	（主　査）	教授	尾	和	重	義
	（副主査）	教授	長	岡	昇	勇
	（副主査）	准教授	中	村	弥	生

論文内容の要旨

第1章　序論

単位円板 $\mathbf{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 内で定義された解析関数

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

の全体を $\mathcal{A}$ とし, $\mathbf{U}$ で単葉な関数 $f(z)$ からなる $\mathcal{A}$ の部分族を $\mathcal{S}$ で表す。$\mathcal{S}$ の関数 $f(z)$ が $\mathbf{U}$ を原点に関する星型領域 $f(\mathbf{U})$ に写像するとき, $f(z)$ は $\mathbf{U}$ において原点に関して星型であるといい, このような関数 $f(z) \in \mathcal{S}$ の全体は $\mathcal{S}^*$ で表される。星型領域に対する幾何学的な性質から $f(z) \in \mathcal{S}^*$ であるための必要十分条件は, $f(z) \in \mathcal{A}$ が

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \qquad (z \in \mathbf{U})$$

を満たすことであると分かる。また, $\mathcal{S}$ の関数 $f(z)$ が $\mathbf{U}$ を凸型領域 $f(\mathbf{U})$ に写像するとき, $f(z)$ は $\mathbf{U}$ で凸型であるといい, 凸型関数 $f(z) \in \mathcal{S}$ の全体は $\mathcal{K}$ で表される。凸型領域に対する幾何学的な性質によって $f(z) \in \mathcal{K}$ であるための必要十分条件は $f(z) \in \mathcal{A}$ が

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0 \qquad (z \in \mathbf{U})$$

を満たすことである。これらの関数族 $\mathcal{S}^*$ および $\mathcal{K}$ の解析的定義から J.W.Alexander (1915年) が $f(z) \in \mathcal{K}$ であることと $zf'(z) \in \mathcal{S}^*$ であることが同値であることを示した。
さらに関数族 $\mathcal{S}^*$ や $\mathcal{K}$ に対する解析的定義から, M.S.Robertson (1936年) が

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha \qquad (0 \leqq {}^{\exists}\alpha < 1;\ z \in \mathbf{U})$$

を満たす $\mathcal{A}$ の部分族 $\mathcal{S}^*(\alpha)$ および

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha \qquad (0 \leqq {}^{\exists}\alpha < 1;\ z \in \mathbf{U})$$

を満たす $\mathcal{A}$ の部分族 $\mathcal{K}(\alpha)$ を導入した。ここで, 関数 $f(z) \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ は位数 α の星型関数, $f(z) \in \mathcal{K}(\alpha)$ は位数 α の凸型関数とそれぞれ呼ばれる。

1975年に H.Silverman はこれらの関数 $f(z)$ の係数について考察することによって, 関数 $f(z) \in \mathcal{A}$ が

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \leqq 1-\alpha$$

を満たせば $f(z) \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ であり,

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-\alpha)|a_n| \leqq 1-\alpha$$

を満たせば $f(z) \in \mathcal{K}(\alpha)$ となることを示した。

さらに, M.A.Nasr および M.K.Aouf (1983年, 1985年) が $\mathcal{S}^*(\alpha)$ と $\mathcal{K}(\alpha)$ の位数を複素数の範囲まで拡張した複素位数 b の星型関数 $f(z)$ からなる $\mathcal{A}$ の部分族 $\mathcal{S}_b^*$ および複素位数 b の凸型関数 $f(z)$ からなる $\mathcal{A}$ の部分族 $\mathcal{K}_b$ を定義した。すなわち $f(z) \in \mathcal{S}_b^*$ は

$$\mathrm{Re}\left[1+\frac{1}{b}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right)\right]>0 \qquad ({}^{\exists}b \neq 0;\ z \in \mathbf{U})$$

で定義され, $f(z) \in \mathcal{K}_b$ は

$$\mathrm{Re}\left[1+\frac{1}{b}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right]>0 \qquad ({}^{\exists}b \neq 0;\ z \in \mathbf{U})$$

で定義される。

一方で, M.Fekete および G.Szegö (1933年) によって $f(z)$ が $\mathcal{S}$ の関数であるとき

$$|a_3-\mu a_2^2| \leqq \begin{cases} 3-4\mu & (\mu \leqq 0) \\ 1+2\exp\left(\dfrac{-2\mu}{1-\mu}\right) & (0 \leqq \mu \leqq 1) \\ 4\mu-3 & (\mu \geqq 1) \end{cases}$$

であることが示された。さらに, このときに導入された $|a_3-\mu a_2^2|$ は Fekete-Szegö functional と呼ばれ, 多くの $\mathcal{A}$ の部分族に対してその上界が議論された。

本論文では, H.Silverman による関数族 $\mathcal{S}^*(\alpha)$ および $\mathcal{K}(\alpha)$ に対する係数不等式の一般化と, Fekete-Szegö functional ならびにその一般化である $|a_n a_{n+2}-\mu a_{n+1}^2|$ の評価を中心に様々な関数族における係数問題を研究した。

第2章　関数族$\mathcal{S}_b^*$および$\mathcal{K}_b$の諸性質

第2章では, $f(z) \in \mathcal{S}_b^*$ や $f(z) \in \mathcal{K}_b$ について様々な係数不等式が考察される。すなわち, 2.1節では $f(z) \in \mathcal{S}_b^*$ または $f(z) \in \mathcal{K}_b$ となるための係数の十分条件について考えることで, H.Silverman の結果により厳密な意味を与えた。2.2節では $f(z) \in \mathcal{S}_b^*$ および $f(z) \in \mathcal{K}_b$ の係数に制限を加えた必要条件と, それを応用した被覆定理と歪曲定理が考えられる。2.3節ではカラテオドリー関数の性質を用いて2.1節で得られた係数不等式よりも良い条件が研究される。定理2.3.1および定理2.3.2の系として, 関数 $f(z) \in \mathcal{A}$ が

$$\sum_{n=2}^{\infty}\{|n-1+2b|+(n-1)\}|a_n| \leqq 2|b|$$

を満たせば $f(z) \in \mathcal{S}_b^*$ であり,

$$\sum_{n=2}^{\infty}n\{|n-1+2b|+(n-1)\}|a_n| \leqq 2|b|$$

を満たせば $f(z) \in \mathcal{K}_b$ であるという結果が得られた。さらに, 2.4節では W.Janowski (1970年) によって導入された Janowski 関数

$$p(z)=\frac{1+Az}{1+Bz} \qquad (-1 \leqq B < A \leqq 1)$$

の実数 A を $-1 \leqq B \leqq 0$, $A \neq B$ として複素数まで拡張して一般化し, それを用いて定義された複素 Janowski 星型関数の族 $\mathcal{S}^*(A,B)$ と複素 Janowski 凸型関数の族 $\mathcal{K}(A,B)$ について, 2.3節と同様に係数に関する十分条件が求められた。特に定理2.4.1および定理2.4.2において $A=2b-1$, $B=-1$ とすると, それぞれ定理2.3.1と定理2.3.2となることがわかる。

第3章　関数族$\mathcal{S}_p^*(\alpha)$および$\mathcal{K}_p(\alpha)$に対するハンケル行列式

第3章では, 関数 $f(z) \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ や $f(z) \in \mathcal{K}(\alpha)$ を p-葉解析関数に拡張し,

$$f(z)=z^p+\sum_{n=p+1}^{\infty}a_n z^n \qquad (p \in \mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\})$$

に対して

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\alpha \qquad (0 \leqq {}^{\exists}\alpha < p;\ z \in \mathbf{U})$$

を満たす関数 $f(z)$ の族 $\mathcal{S}_p^*(\alpha)$ と

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>\alpha \qquad (0 \leqq {}^{\exists}\alpha < p;\ z \in \mathbf{U})$$

を満たす関数 $f(z)$ の族 $\mathcal{K}_p(\alpha)$ が導入された。3.2節ではこれらの関数族に対して Fekete-Szegö functional $|a_3-\mu a_2^2|$ を p-葉解析関数の場合に拡張した $|a_{p+2}-\mu a_{p+1}^2|$ の評価が考えられ, 定理3.2.1および定理3.2.2で $p=1$, $\alpha=0$ とすると, F.R.Keogh と E.P.Merkes (1969年) の関数族 $\mathcal{S}^*$ および $\mathcal{K}$ に関する Fekete-Szegö functional についての結果と一致する。

また, 3.3節では

$$H_q(n)=\det\begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+q-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+q-1} & a_{n+q} & \cdots & a_{n+2q-2} \end{pmatrix} \qquad (n,q \in \mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\})$$

で定義されるハンケル行列式において

$$|H_2(p+1)| = |a_{p+1}a_{p+3} - a_{p+2}^2|$$

をFekete-Szegö functionalと同様に, 任意の実数μを付加して一般化した$|a_{p+1}a_{p+3} - \mu a_{p+2}^2|$の評価が考えられた。特に, 定理3.3.1および定理3.3.2において$p = 1,\ \alpha = 0$とすれば, A.Janteng, S.A.HalimおよびM.Darus (2007年) が導いた$\mathcal{S}^*$や$\mathcal{K}$に対する結果を含む評価が得られる。このとき適用したカラテオドリー関数の係数についての補題は, この種の評価の議論をする上で必要となる従来の補題を少し応用したものであり, 他の研究者が用いた方法と3.2節および3.3節の結果を導く際に用いた方法を比較しても大きな違いはない。そのため, 3.4節ではシュワルツ関数の係数の性質を考察することで, これまでとは異なる方法による評価を試みた。例えば定理3.4.1と定理3.4.2では, 2.4節で定義された関数族$\mathcal{S}^*(A,B)$および$\mathcal{K}(A,B)$をp-葉解析関数の族として拡張した, p-葉複素Janowski星型関数の族$\mathcal{S}_p^*(A,B)$およびp-葉複素Janowski凸型関数の族$\mathcal{K}_p(A,B)$に対する$|a_{p+2} - \mu a_{p+1}^2|$の最大値がそれぞれ求められた。特に$A = p - 2\alpha,\ B = -1\ (0 \leqq \alpha < p)$とすると定理3.2.1と定理3.2.2となることがわかる。

第4章　他の関数族に対するハンケル行列式

第4章では, これまで多くの研究者によって$\mathcal{S}^*$や$\mathcal{K}$などの関数族に対して$|a_n a_{n+2} - \mu a_{n+1}^2|$ (ただし, $a_1 = 1$とする) で$n = 1$または$n = 2$としたとき, すなわち$|a_3 - \mu a_2^2|$または$|a_2 a_4 - \mu a_3^2|$についての評価が議論されてきたが, nを任意の自然数として研究を行う研究者はいなかった。そのため, 第4章ではいくつかの解析関数の族について$|a_n a_{n+2} - \mu a_{n+1}^2|$の上界をすべての自然数$n$に対して考えた。4.1節では位数$\alpha$の星型奇関数$f(z)$の族$\mathcal{S}_{\mathrm{odd}}^*(\alpha)$と位数$\alpha$の凸型奇関数$f(z)$の族$\mathcal{K}_{\mathrm{odd}}(\alpha)$の場合について, それぞれの関数の係数の絶対値が取り得る値を求めることで直接的に評価を得た。4.2節では

$$\mathrm{Re}\left(\frac{f(z)}{z}\right) > \alpha \qquad (0 \leqq {}^{\exists}\alpha < 1\,;\ z \in \mathbf{U})$$

を満たす関数$f(z) \in \mathcal{A}$の族$\mathcal{Q}(\alpha)$と

$$\mathrm{Re}\,(f'(z)) > \alpha \qquad (0 \leqq {}^{\exists}\alpha < 1\,;\ z \in \mathbf{U})$$

を満たす関数$f(z) \in \mathcal{A}$の族$\mathcal{R}(\alpha)$が導入され, A.E.Livingston (1969) が示したカラテオドリー関数の係数の間に成り立つ不等式を一般化した補題を用いることで, この2つの関数族に対して$|a_n a_{n+2} - \mu a_{n+1}^2|$の最大値に関する評価を研究した。その結果として例えば, 定理4.2.4および定理4.2.5では$f(z) \in \mathcal{Q}(\alpha)$であるならば

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leqq \begin{cases} 2(1-\alpha)\{1 - 2(1-\alpha)\mu\} & (\mu \leqq 0) \\ 2(1-\alpha) & \left(0 \leqq \mu \leqq \dfrac{1}{1-\alpha}\right) \\ 2(1-\alpha)\{2(1-\alpha)\mu - 1\} & \left(\mu \geqq \dfrac{1}{1-\alpha}\right) \end{cases}$$

および

$$|a_n a_{n+2} - \mu a_{n+1}^2| \leqq \begin{cases} 4(1-\alpha)^2(1-\mu) & (\mu \leqq 0) \\ 4(1-\alpha)^2 & (0 \leqq \mu \leqq 1) \qquad (n = 2,3,4,\cdots) \\ 4(1-\alpha)^2\mu & (\mu \geqq 1) \end{cases}$$

であることが求められた。4.3節では関数族$\mathcal{Q}(\alpha)$と$\mathcal{R}(\alpha)$を一般化した関数族である$\mathcal{QR}(\beta_1,\beta_2;\alpha)$に対して, 4.2節と同様に$|a_n a_{n+2} - \mu a_{n+1}^2|$について考えられた。最後に, 4.4節では

$$\mathcal{S}^*(\alpha) \subset \mathcal{Q}(\alpha^*) \qquad \left(\frac{1}{2} \leqq \alpha < 1,\ \alpha^* = \frac{1}{3-2\alpha}\right)$$

であることから, $\mathcal{S}^*(\alpha)$についても任意の自然数nに対して, $|a_n a_{n+2} - \mu a_{n+1}^2|$の上界を与えることができた。しかし, 3.2節の結果と比較すると, これらの結果は最良の結果でないことがわかる。

本研究の成果は海外数学雑誌（すべて査読有）に発表されているが, 上に述べた論文要旨でも分かるように, 得られた結果のすべてが厳密というわけではない。今後はこれらの結果をどの程度まで精密に評価することが出来るかということが, 本研究の課題の一つである。

論 文 審 査 結 果 の 要 旨

本論文は，第 1 章【序論】，第 2 章【関数族 $\mathcal{S}_b^*$ および $\mathcal{K}_b$ の諸性質】，第 3 章【関数族 $\mathcal{S}_p^*(\alpha)$ および $\mathcal{K}_p(\alpha)$ に対するハンケル行列式】，第 4 章【他の関数族に対するハンケル行列式】からなる英語論文で，解析関数のさまざまな関数族に対するハンケル行列式を中心にまとめられている。その中で，特に重要な点は，第 2 章において，1983 年に M.A.Nasr および M.K.Aouf によって導入され研究されてきた複素位数 b の星型関数族 $\mathcal{S}_b^*$ が必ずしも星型関数にならないという発見をし，それが星型関数になるための複素数 b についての条件を導き出したこと。第 4 章において，ハンケル行列式の新しい方向からの議論を与えたことである。

単位円板 $\mathbf{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 内で定義された解析関数

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

の族 $\mathcal{A}$ に対して，$\mathbf{U}$ で単葉な関数 $f(z)$ からなる $\mathcal{A}$ の部分族 $\mathcal{S}$，位数 α の星型関数 $f(z)$ からなる $\mathcal{A}$ の部分族 $\mathcal{S}^*(\alpha)$ および位数 α の凸型関数 $f(z)$ からなる $\mathcal{A}$ の部分族 $\mathcal{K}(\alpha)$ が定義される。さらに，$\mathbf{U}$ で定義された解析関数

$$f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n \qquad (p \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\cdots\})$$

の族 $\mathcal{A}_p$ に対して

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha \qquad (z \in \mathbf{U})$$

を満たす関数 $f(z)$ からなる $\mathcal{A}_p$ の部分族 $\mathcal{S}_p^*(\alpha)$ および

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha \qquad (z \in \mathbf{U})$$

を満たす関数 $f(z)$ からなる $\mathcal{A}_p$ の部分族 $\mathcal{K}_p(\alpha)$ が導入される。このとき，関数 $f(z) \in \mathcal{S}_p^*(\alpha)$ は $\mathbf{U}$ における位数 α の p-葉星型関数，関数 $f(z) \in \mathcal{K}_p(\alpha)$ は $\mathbf{U}$ における位数 α の p-葉凸型関数といわれる。

1933 年に M.Fekete と G.Szego（J. London Math. Soc. **8**(1933), 85-89）が，$f(z) \in \mathcal{S}$ に対して，

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leqq \begin{cases} 3 - 4\mu & (\mu \leqq 0) \\ 1 + 2e^{-\frac{2\mu}{1-\mu}} & (0 \leqq \mu \leqq 1) \\ 4\mu - 3 & (\mu \geqq 1) \end{cases}$$

を与えた。そのために，単葉関数論の研究におけるこの種の係数問題は Fekete-Szego Problem と呼ばれ，$|a_3 - \mu a_2^2|$ は Fekete-Szego functional と呼ばれている。M.Fekete および G.Szego による論文の後，数多くの研究者によって，さまざまな関数族に対する Fekete-Szego Problem が研究されてきた。

本論文でも，関数族 $\mathcal{S}^*(\alpha), \mathcal{K}(\alpha)$, $\mathcal{S}_p^*(\alpha), \mathcal{K}_p(\alpha)$, などの係数問題に関連した Fekete-Szego Problem が議論されている。特に本論文で注目すべき点は，Toeplitz determinant D_n と q-th Hankel determinant $H_q(n)$ を応用したところにある。すなわち，$\mathbb{U}$ で解析的で，$\mathrm{Re}\,p(z) > 0$ $(z \in \mathbb{U})$ を満たす関数

$$p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$$

の係数 c_k に対して，$D_n \geqq 0$ $(n = 1,2,3,\cdots)$ が成り立ち，さらに，$|\zeta| \leqq 1, |\eta| \leqq 1$ に対して

$$\begin{cases} 2c_2 = c_1^2 + (4 - c_1^2)\zeta \\ 4c_3 = c_1^3 + 2(4-c_1^2)c_1\zeta - (4-c_1^2)c_1\zeta^2 + 2(4-c_1^2)(1-|\zeta|^2)\eta \end{cases}$$

が成り立つこと。そして，q-th Hankel determinant $H_q(n)$ が

$$H_q(n) = \det \begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+q-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+q-1} & a_{n+q} & \cdots & a_{n+2q-2} \end{pmatrix} \qquad (n, q \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\cdots\})$$

で与えられることである。例えば，$|H_1(1)| = |a_3 - a_2^2|$ が Fekete-Szego functional に関連付けられることが分かる。

特に，第 3 章において，$\mathcal{S}_p^*(\alpha)$ や $\mathcal{K}_p(\alpha)$ の関数に対して，

$$|H_2(p+1)| = |a_{p+1}a_{p+3} - a_{p+2}^2|$$

に関連して，$|a_{p+1}a_{p+3} - \mu a_{p+2}^2|$ の評価が考察され，この結果は A.Janteng, S.A.Halim および M.Darus の結果（Internat. J. Math. Anal. **1**(2007), 619-625）を含む新しい評価が得られている。さらに，第 4 章において，関数族 $\mathcal{A}$ の部分族 $\mathcal{R}(\alpha)$ と $\mathcal{Q}(\alpha)$ に対して，A.E.Livingston（Proc. Amer. Math. Soc. **21**(1969), 545-552）による係数不等式を一般化して，$|a_n a_{n+2} - \mu a_{n+1}^2|$ に対する新しい評価を与えている。本論文におけるこれらの研究成果は，さまざまな解析的奇関数の係数問題の考察に大きな役割を果たすものと期待される。

早味俊夫君は，Hankel determinant に関連した 9 編の主論文の他に，9 編の副論文を発表しており，18 編のすべてが査読のついた外国の数学雑誌に発表されている。このように，本論文は解析関数族の Hankel determinant に関連した研究結果を数多く含んだ大変素晴らしい論文で，博士（理学）の学位論文として十分に価値のある論文であると確信します。