

令和 2 年 6 月 4 日現在

機関番号：34419

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2019

課題番号：16K05085

研究課題名(和文) 多変数保型形式の整数論的研究

研究課題名(英文) Arithmetic study on automorphic forms of several variables

研究代表者

長岡 昇勇 (Nagaoka, Shoyu)

近畿大学・理工学部・非常勤講師

研究者番号：20164402

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：多変数保型形式とくに多変数modular形式の $p$ 進的性質について研究を行った。具体的に述べると、 $\theta$ 作用素と呼ばれるmodular形式に作用するある種の微分作用素について、その像が素数 $p$ を法として消えるようなmodular形式、 $\theta$ 作用素の $\text{mod } p$ 核に入るようなmodular形式について研究を行った。研究の発端は、Igusaのcusp形式と呼ばれるmodular形式が、 $\text{mod } 23$ 核に入るという事実の発見であったが、この研究期間を通して、どのような次数のmodular形式が、どのような素数 $p$ に対して、 $\theta$ 作用素の $\text{mod } p$ 核に入るかを解明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

modular形式の整数論的性質は、350年間未解決であったフェルマー予想の解決にも用いられた。それは楕円曲線の理論を通して、現代社会に不可欠な暗号理論に応用されている。報告者の研究対象は、modular形式を多変数の場合に拡張したもので、前世紀に定義されたものであるが、組織的な研究、とくにその整数論的性質を解明する研究は最近端緒をつけられたものである。報告者の研究は、その多変数modular形式の $p$ 進理論というものであるが、最近の研究で、理論物理学との関係も報告され、整数論ばかりでなく、広く社会の他分野へ応用することは、興味深いこれからの研究課題である。

研究成果の概要(英文)：I studied on the  $p$ -adic properties of automorphic forms of several variables, especially modular forms of several variables. Strictly speaking, I studied the  $\theta$  operator, which is a kind of differential operator. I considered the modular form whose image vanishes modulo  $p$ . The origin of my study is the discovery that so-called the Igusa cusp form satisfies such property, namely, it becomes a modular form of  $\text{mod } 23$  kernel. During the period of study, I clarified what kind of modular form has such property, what kind of modular form with degree  $n$  and prime number  $p$  becomes an element of  $\text{mod } p$  kernel of the  $\theta$  operator.

研究分野：整数論

キーワード：modular形式

## 1. 研究開始当初の背景

研究の背景としては、整数論の中における保型形式の分野の役割が重要性を増し、この分野の発展が期待されている状況がある。整数論の他分野への応用としては、最近の暗号理論への応用があげられる。初等整数論の基本的な結果のひとつであるフェルマーの定理（フェルマーの小定理）が、公開鍵暗号の理論として応用されたことは、閉ざされた純粋数学の一定理でしかなかった事実が、このように他の分野に影響を及ぼす予想外の実例を与えた。また整数論の中の保型形式の立場も、フェルマー予想の解決にその理論が使われたという事実をみても重要性を増し、最近とくに研究発展が著しい数論幾何学にも影響を与えたと言える。報告者は、古典的な保型形式を  $p$  進体や標数  $p$  の体上で考察した「Serre の理論」に着目した。この理論は、Serre がいわゆる  $p$  進 zeta 関数とよばれる整数論的对象を一般化しようという試みのなかで発生したものである。一方保型形式の分野では、保型形式の分野では、「多変数化」の試みがなされ、Siegel modular 形式や Hilbert 形式などの研究が整数論的立場から盛んに行われてきた。これは 2 次形式論や代数的整数論とも密接に関連し、影響を与え合って発展してきたといえる。報告者が研究を開始した時点では、古典的な保型形式についての理論が多変数の場合に拡張し、様々な結果が得られていた。しかしながら、報告者が研究を開始した時点では、上述の Serre の理論の「多変数化」はほとんど試みられていない状態であり、未開の分野であった。報告者は Serre の  $p$  進理論を多変数の保型形式とくにその典型的な例である Siegel modular 形式や Hermite modular 形式の場合に拡張しようと試みた。

## 2. 研究の目的

上で述べたように、研究の目的は一変数の保型形式の場合に研究された Serre の  $p$  進理論を多変数の保型形式の典型例である Siegel modular 形式や Hermite modular 形式の場合に拡張しようというものである。一変数の Serre の理論に先立って、modular 形式の  $p$  進理論や  $\text{mod } p$  理論の萌芽といわれる研究があった。それらは  $\text{mod } p$  modular 形式に関する Swinnerton-Dyer の理論や標数  $p$  の modular 形式に関する Deligne の理論等である。Swinnerton-Dyer は  $p$  整な Fourier 係数をもつ modular 形式をべき級数と見て、係数の reduction  $\text{mod } p$  を考え、有限体  $F_p$  上のべき級数環の部分環とみたいわゆる、 $\text{mod } p$  modular 形式の algebra の構造を決定した。それは  $F_p$  上の 2 変数多項式環のある単項 ideal で割った形をしている。この単項 ideal は weight が  $p-1$  で定数項の 1 以外のすべての Fourier 係数が  $p$  で割り切れる modular 形式を weight が 4 と 6 の Eisenstein 級数の多項式で表現してできる  $p$  整 2 変数多項式を reduction  $\text{mod } p$  したものである。報告者の最初の研究目的は、Swinnerton-Dyer の  $\text{mod } p$  modular 形式の algebra の構造を多変数 modular 形式の典型例である Siegel modular 形式の場合に拡張することであった。このためには、上に述べた weight が  $p-1$  で Fourier 展開の定数項以外がすべて  $p$  で割り切れる modular 形式を Siegel modular 形式の場合に構成せねばならない。これについては、「研究成果」の項で述べるように、ドイツ、マンハイム大学の Boecherer 教授との共同研究により、そのような Siegel modular 形式の構成に成功した。この成果を基に、Swinnerton-Dyer の結果を 2 次の Siegel modular 形式の場合に拡張することも可能となった。この結

果はドイツの数学者 Raum や Richter 等の興味を惹き、彼らは一般の次数で結果を得ている。この研究により、目標の Serre の modular 形式の「多変数化」に端緒を得たわけである。Serre の  $p$  進理論の成果のひとつに、「 $p$  進 modular 形式の定式化」がある。これは  $p$  進 modular 形式を有理数の Fourier 係数にもつ modular 形式の  $p$  進一様収束した極限として定義するものである。

(現在では、Serre の  $p$  進 modular 形式と呼ばれている。) Serre は、その典型例として「 $p$  進 Eisenstein 級数」を定義し、その定数項に  $p$  進 zeta 関数が現れるということを示した。さらに gamma zero  $p$  と呼ばれる、いわゆる level  $p$  の modular 形式が  $p$  進 modular 形式となることを示した。これは Deligne 達が経験的に知っていた事実を  $p$  進 modular 形式の概念を用いて定式化したものである。報告者の次の研究目標は、これらの結果を多変数化することであった。Serre の  $p$  進 Eisenstein 級数の概念を多変数化することは容易であったが、定義したその  $p$  進 Siegel-Eisenstein 級数の整数論的意味を明らかにすることが目標であった。これも研究成果の項で詳述するが、報告者はこの  $p$  進 Siegel-Eisenstein 級数が 2 次形式論と関係する level  $p$  の genus theta 級数というものと一致することを証明した。「 $p$  進」の  $p$  と「level  $p$ 」の  $p$  がちょうど符合するわけである。また level  $p$  の modular 形式が  $p$  進 modular 形式となるという事実の多変数化については、前述の Boecherer 教授との共同研究により拡張した結果を得ている。またこの研究期間に次のような現象を発見した。それは、Igusa により構成された次数が 2、weight が 35 の Siegel modular 形式  $\chi_{35}$  の Fourier 係数が奇妙な性質をもつというものである。Siegel modular 形式の Fourier 係数  $a(T)$  は対称行列  $T$  に対して決まるものである。 $\chi_{35}$  の Fourier 係数については、 $T$  の行列式が 23 割り切れなければ、 $a(T)$  の方が 23 で割り切れるという現象を発見した。後半の研究目標は、この現象の解明にあった。後述のように、この現象は theta 作用素というある種の微分作用素を用いることにより解明された。上述の Igusa の modular 形式  $\chi_{35}$  について述べれば、 $\chi_{35}$  の theta 作用素による image が mod 23 で消えると定式化される。すなわち最初に述べた modular 形式の mod  $p$  理論の範疇で解釈でたわけである。報告者の研究目標は、上述の Igusa の modular 形式を例で言えば、なぜ素数 23 がでてくるか？ また weight 35 と、この素数 23 の関係は？ 等の疑問がでてくるが、報告者と Boecherer 教授との共同研究により、かなりの部分が解明された。副産物として、mod  $p$  Siegel modular 形式のなす algebra が、この theta 作用素で stable であることが示された。すなわち theta 作用素による modular 形式の image は一般には modular 形式にはならないが、mod  $p$  の意味では modular 形式になることが示されたわけである。

### 3 . 研究の方法

上述のように、研究対象は多変数の modular 形式とくに Siegel modular 形式や Hermite modular 形式については、この分野の専門家であるドイツ、Mannheim 大学の Boecherer 教授や同じくドイツ、アーヘン工科大学の Krieg 教授との共同研究により研究を進めてきた。とくに Boecherer 教授は Siegel modular 形式の専門家で、Eisenstein 級数の Fourier 係数の  $p$  進的性質の解明や、前述の weight が  $p-1$  で mod  $p$  で 1 となる modular 形式の構成については、Boecherer 教授との共同研究が大きな力となった。

#### 4 . 研究成果

研究目的の項で述べたように，theta 作用素の image が mod  $p$  で消えるという性質をもつ modular 形式（成果論文では theta 作用素の mod  $p$  核と呼んだ）について，発端となった Igusa の modular 形式について得られた結果の他に，theta 作用素の mod  $p$  核に入る様々な modular 形式を発見した。

その例として，Leech 格子の theta 級数があった。本研究ではそのほかに Niemeier 格子という Leech 格子を含む広範囲の格子に対する theta 級数が，そのような例となることを示した。具体的には，24 種類ある Niemeier 格子に対してそれらに対する theta 級数を，次数が 3 の既知の modular 形式として表示した。その係数は Coxeter 数の多項式として表され，この事実として，「格子の Coxeter 数に合同があれば，対応する theta 級数の間に合同がある」という事実を証明した。その系として 24 個の Niemeier 格子のうち，どの格子の theta 級数が mod  $p$  核の元となるかを明らかにした。（「Notes on theta series for Niemeier lattices」, S.Nagaoka, S. Takemori）

上で述べた theta 作用素の mod  $p$  核の例はすべて Siegel modular 形式と呼ばれる多変数 modular 形式であったが，Hermite modular 形式と呼ばれる別のタイプの多変数 modular 形式の場合にも，そのような modular 形式が存在することを示した。（「On the theta operator for Hermitian modular forms of degree 2」, T.Kikuta , S.Nagaoka）

これまでの研究で発見された例はすべて weight が偶数の場合であるが，weight が奇数の場合の例を Eisenstein 級数を用いて構成した。まず Siegel modular 形式の場合，報告者の以前の結果として偶数次の場合，mod  $p$  核の元が Eisenstein 級数で構成できることが知られていた。得られた結果は，次数  $n$  が奇数の場合，とくに  $n$  が 8 を法として 3 の場合に，Eisenstein 級数を用いて構成できることを示した。これは，次数  $n$  が 3 以外の場合，そのような例が見つからなかった一つの理由を与えていると言ってよい。Hermite modular 形式の場合，次数が 4 を法として 2 の場合に，そのような例を構成できることを示した。これも mod  $p$  核に入る Hermite modular 形式で次数が 2 以外のものが見つからなかった根拠の一つを与えている。（「On the mod  $p$  kernel of the theta operator and Eisenstein series」, S.Nagaoka , S.Takemori）

これまで，mod  $p$  核に入る modular 形式を構成してきたが，どのような次数  $n$ ，素数  $p$  について，そのような modular 形式が構成できるかが，理論的に説明できなかった。この研究で，その理論的根拠を明らかにした。具体的には，次数を  $n$  とするとき，weight が  $(n/2)+1+3((p-1)/2)$  の modular 形式で mod  $p$  核に入るものが構成できることを証明した。前述の Igusa の modular 形式の  $\chi_{35}$  は  $n=2$  で weight が  $(2/2)+1+3((23-1)/2)=35$  の場合を与えている。この研究ではさらに次数が 2 の場合に binary quadratic form の theta 級数と格子の theta 級数の合同関係を調べている。これは mod  $p$  核の元を組織的に構成する方法を与えており，今までの得られた結果が成立する根拠を説明している。（「On the kernel of the theta operator mod  $p$ 」, S.Boecherer, H.Kodama, S.Nagaoka）

以上

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

|   |                       |
|---|-----------------------|
| 1. 著者名<br>Shoyu Nagaoka and Sho Takemori  | 4. 巻<br>188           |
| 2. 論文標題<br>On the mod $p$ kernel of the theta operator and Eisenstein series  | 5. 発行年<br>2018年       |
| 3. 雑誌名<br>Journal of Number Theory  | 6. 最初と最後の頁<br>281-298 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br><a href="https://doi.org/10.1016/j.jnt.2018.01.011">https://doi.org/10.1016/j.jnt.2018.01.011</a> | 査読の有無<br>有            |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難  | 国際共著<br>-             |

|   |                       |
|---|-----------------------|
| 1. 著者名<br>Siegfried Boecherer, Hiroataka Kodama, Shoyu Nagaoka  | 4. 巻<br>156           |
| 2. 論文標題<br>On the kernel of the theta operator mod $p$  | 5. 発行年<br>2018年       |
| 3. 雑誌名<br>manuscripta mathematica   | 6. 最初と最後の頁<br>149-169 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br><a href="https://doi.org/10.1007/s00229-017-0962-3">https://doi.org/10.1007/s00229-017-0962-3</a> | 査読の有無<br>有            |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難  | 国際共著<br>-             |

|   |                       |
|---|-----------------------|
| 1. 著者名<br>Shoyu Nagaoka and Sho Takemori                                      | 4. 巻<br>188           |
| 2. 論文標題<br>On the mod $p$ kernel of the theta operator and Eisenstein series, | 5. 発行年<br>2018年       |
| 3. 雑誌名<br>Journal of Number Theory  | 6. 最初と最後の頁<br>281-298 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1016/j.jnt2018.01011                           | 査読の有無<br>有            |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難  | 国際共著<br>-             |

|  |                       |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名<br>Toshiyuki Kikuta and Shoyu Nagaoka                             | 4. 巻<br>87            |
| 2. 論文標題<br>On the theta operator for Hermitian modular forms of degree 2 | 5. 発行年<br>2017年       |
| 3. 雑誌名<br>Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg                                | 6. 最初と最後の頁<br>145-163 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1007/s12188-016-0141-6                    | 査読の有無<br>有            |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                                   | 国際共著<br>-             |

|  |                       |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名<br>Shoyu Nagaoka, Sho Takemori                  | 4. 巻<br>42            |
| 2. 論文標題<br>Notes on theta series for Niemeier lattices | 5. 発行年<br>2017年       |
| 3. 雑誌名<br>Ramanujan Journal of Mathematics             | 6. 最初と最後の頁<br>385-400 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1007/s11139-015-9720-x  | 査読の有無<br>有            |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                 | 国際共著<br>-             |

|  |                       |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名<br>Toshiyuki Kikuta, Shoyu Nagaoka                                | 4. 巻<br>87            |
| 2. 論文標題<br>On the theta operator for Hermitian modular forms of degree 2 | 5. 発行年<br>2017年       |
| 3. 雑誌名<br>Abhandlungen Mathematischen Seminar Universitaet Hamburg       | 6. 最初と最後の頁<br>145-163 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>10.1007/s12188-016-0141-6                    | 査読の有無<br>有            |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難                                   | 国際共著<br>-             |

〔学会発表〕 計4件 (うち招待講演 4件 / うち国際学会 1件)

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Shoyu Nagaoka   |
| 2. 発表標題<br>Theta operator on modular forms   |
| 3. 学会等名<br>56th ABKLS Conference on Automorphic Forms (Aachen-Bonn-Koeln-Lille-Siegen 5 大学共同保型形式論研究集会) (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年<br>2019年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Shoyu Nagaoka  |
| 2. 発表標題<br>On the kernel of the theta operator on Hermitian modular forms |
| 3. 学会等名<br>Mathematisches Seminar RWTH (招待講演)                             |
| 4. 発表年<br>2017年   |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>Shoyu Nagaoka                                |
| 2. 発表標題<br>On p-adic properties of Siegel modular forms |
| 3. 学会等名<br>Math. Seminar Univrstaet Mannheim (招待講演)     |
| 4. 発表年<br>2017年   |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Shoyu Nagaoka                                     |
| 2. 発表標題<br>Theta opeartor on Hermitian modular forms         |
| 3. 学会等名<br>Algebraische Colloqium Aachen Universitaet (招待講演) |
| 4. 発表年<br>2016年  |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

|  | 氏名<br>(ローマ字氏名)<br>(研究者番号) | 所属研究機関・部局・職<br>(機関番号) | 備考 |
|--|---------------------------|-----------------------|----|
|--|---------------------------|-----------------------|----|