［解説：Review］

秋山・谷川三角形の母関数

井原健太郎, 関谷大輔

近畿大学理工学総合研究所, 近畿大学理工学部

(Received 2 March 2019)

概要

秋山・谷川三角形とは, 調和数列のある種の階差数列を反復計算することで, ベルヌーイ数を効率的に計算するアルゴリズムである. 著者らによる最近の研究 [1] によって, 秋山・谷川三角形の 2 変数母関数が 1 階の線形偏微分方程式を満たし, 初等関数を用いて表示できることが明らかとなった. この解説では [1] において得られた結果の一部を報告し, 証明の概略と具体例について解説する.

keywords: 秋山・谷川三角形, ベルヌーイ数, ゼータ関数

1 秋山・谷川三角形

ベルヌーイ数 $\{B_n\}$ は指数型母関数

$$\frac{ye^y}{e^y-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{y^n}{n!}.$$

で定義される有理数の列である. 具体的な値が表 1 にある. 三角関数 $\tan x, \cot x, \csc x$ をテイラー展開した際の係数, 及び有名な「べき和公式」に現れる有理数として知られている. またリーマンゼータ関数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\quad \mathrm{Re}\, s>0$$

の正の偶数点, 及び負の整数点における値の明示公式に現れ, 整数論においても重要な値である.

秋山・谷川三角形とは, 調和数列 $\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\}$ のある種の階差数列を反復計算することで, 各階差数列の初項としてベルヌーイ数を得るアルゴリズムである：

定理 1 ([4] cf. [5]) 初期数列 $a_{0,m}=\frac{1}{m+1}$ $(m\geq 0)$ に対し, 2 重数列 $a_{n,m}$ $(n,m\geq 0)$ を漸化式

$$a_{n+1,m}=(m+1)(a_{n,m}-a_{n,m+1}),\quad (n,m\geq 0)\quad (1)$$

で定める. このとき $a_{n,0}=B_n$ $(n\geq 0)$ が成立する[1].

値 $a_{n,m}$ を n 行 m 列に配置した図 (図 1) を考えると, 対角線上にベルヌーイ数が整列する. このアルゴリズムを秋山・谷川三角形と呼ぶ.

表 1: ベルヌーイ数

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8
B_m	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{-1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$\frac{-1}{30}$
m	9	10	11	12	13	14	15	16	$\cdots$
B_m	0	$\frac{5}{66}$	0	$\frac{-691}{2730}$	0	$\frac{7}{6}$	0	$\frac{-3617}{510}$	$\cdots$

図 1: 秋山・谷川三角形

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{6} & & \cdots \\
& \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{6} & & \cdots & \\
& & \frac{1}{6} & & \frac{1}{6} & & \frac{3}{20} & & \frac{2}{15} & & \cdots & & \\
& & & 0 & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & & & & \\
& & & & \frac{-1}{30} & & \frac{-1}{30} & & & & & & \\
& & & & & 0 & & & & & & & \\
& & & & & & \ddots & & & & & &
\end{array}$$

定理 1 の証明を簡単に述べると, 任意の初期数列 $a_{0,m}$ $(m\geq 0)$ を漸化式 (1) を用いて計算すると, 第 2 種スターリング数 $\left\{{n \atop m}\right\}$ を用いることで

$$a_{n,0}=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m m!\left\{{n+1 \atop m+1}\right\}a_{0,m}$$

と表される. 他方, ベルヌーイ数の第 2 種スターリング数を用いた表示

$$B_n=\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m m!}{m+1}\left\{{n+1 \atop m+1}\right\}$$

を示すことができ, 両者を比べることで定理を得る.

[1] 秋山・谷川 [4] では, 初期数列を調和級数の交代級数で与え, 漸化式 (1) の差の部分を和に置き換えた形にしているが, ここでは, 金子 [5] による定式化の形で述べた.

2　母関数

前節のベルヌーイ数では $B_1 = \frac{1}{2}$ であるが, 実はベルヌーイ数には “$B_1 = -\frac{1}{2}$” となる別の流儀がある. それを C_n と表せば, 指数型母関数は

$$\frac{y}{e^y - 1} = \frac{ye^y}{e^y - 1} - y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{y^n}{n!} \tag{2}$$

となる. $C_1 = -\frac{1}{2}$ であり, $n \neq 1$ であれば一般に $B_n = C_n$ が成立する.

ベルヌーイ数 C_n を対角線上に整列させるアルゴリズムを構成するには, 定理 1 の初期数列はそのままで, 漸化式 (1) の差の順序を逆にした漸化式

$$a_{n+1,m} = (m+1)(a_{n,m+1} - a_{n,m}), \quad (n, m \geq 0) \tag{3}$$

を考えればよいことが知られている. 最近の川崎 [2], 川崎・大野 [3] の結果によると, 漸化式 (3) の方が, 種々のベルヌーイ数の拡張に即したアルゴリズムを与えることが明らかになっている.

我々の研究 [1] では, これらのアルゴリズムで得られる 2 重数列 $a_{n,m}$ に付随する 2 変数母関数

$$F(x, y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{n,m}\, x^m\, \frac{y^n}{n!}$$

を導入し, これを具体的に求めることでアルゴリズムの構造を解明している. この母関数は変数 x に関しては通常型, y に関しては指数型母関数になっている.

定理 2 ([1]) 与えられた初期数列 $a_{0,m} = \frac{1}{m+1}$ $(m \geq 0)$ に対し, 2 重数列 $a_{n,m}$ $(n, m \geq 0)$ を漸化式 (3) で与えるとき, 2 変数母関数は

$$F(x, y) = \frac{y - \ln(1-x)}{e^y - (1-x)} \tag{4}$$

で与えられる.

証明の方法を簡単に述べると, 漸化式 (3) は母関数 $F(x, y)$ の 1 階の線形偏微分方程式

$$(1-x)F_x - F_y = F$$

に帰着させることができる. これはラグランジュ型の微分方程式であり補助方程式

$$\frac{dx}{1-x} = \frac{dy}{-1} = \frac{dF}{F}$$

を解くことで, 一般解を求めることができる. 初期数列が微分方程式の初期条件を与えるので, それに合致する解を探すと母関数 $F(x, y)$ が計算される.

式 (4) で $y = 0, x = 0$ とするとそれぞれ 三角形の 0 行目と 0 列目 (=対角線) の母関数を得る：

$$F(x, 0) = \frac{-\ln(1-x)}{x} \qquad F(0, y) = \frac{y}{e^y - 1}$$

$F(0, y)$ と式 (2) の一致から, 対角線上にベルヌーイ数が整列する事実の簡素な別証明を定理 2 が与える.

漸化式 (1) で与えられる 2 重数列の母関数の場合は, (4) の y を $-y$ に変えただけの違いが現れる. 文献 [1] では, 漸化式 (3), (1) の他にも様々な漸化式で与えられる 2 重数列の母関数を考察し, それに付随する 2 変数母関数の一般的計算手法を与えている.

3　初期数列を変更した場合

文献 [1] では, 初期数列を様々な数列に取り替えた場合に現れる数列についても考察している. ここでは漸化式 (3) はそのままで, 初期数列を変更した場合に生成される数列の具体例を挙げる.

例 1 初期数列を 2 項係数 $a_{0,m} = \binom{m+k}{m}$ $(m \geq 0, k$: 実数) とし, 2 重数列 $a_{n,m}$ $(n, m \geq 0)$ を漸化式 (3) で与えるとき, 母関数は

$$F(x, y) = \frac{e^{ky}}{(1-x)^{k+1}}$$

であり, $a_{n,0} = k^n$ となる. 図 2, 図 3 を参照.

図 2: $k = 2$ の場合

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & \cdots \\
2 & 6 & 12 & 20 & 30 & \cdots & \\
4 & 12 & 24 & 40 & \cdots & & \\
8 & 24 & 48 & & & & \\
16 & 48 & & & & & \\
32 & & & & & & \\
\ddots & & & & & &
\end{array}$$

図 3: $k = 3$ の場合

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & \cdots \\
3 & 12 & 30 & 60 & 105 & \cdots & \\
9 & 36 & 90 & 180 & \cdots & & \\
27 & 108 & 270 & & & & \\
81 & 324 & & & & & \\
243 & & & & & & \\
\ddots & & & & & &
\end{array}$$

例 2 初期数列を $a_{0,m} = f_m$ ただし $\{f_m\}$ $(m \geq 0)$ は

$$f_{m+2} = f_{m+1} + f_m, \quad f_0 = 1,\ f_1 = 1$$

で定まるフィボナッチ数とする. 2 重数列 $a_{n,m}$ $(n, m \geq 0)$ を漸化式 (3) で与えるとき, 母関数は

$$F(x,y) = \frac{e^y}{3e^y(1-x) - e^{2y} - (1-x)^2}$$

であり, $a_{n,0}$ は

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} a_{n,0} \frac{y^n}{n!} &= \frac{e^y}{3e^y - e^{2y} - 1} \\ &= \frac{1}{3 - (e^y + e^{-y})} \end{aligned} \tag{5}$$

を満たす. $a_{n,0}$ の値の表は以下のようになる.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a_{n,0}$	1	0	2	0	26	0	842	0	50906	0	4946282

式 (5) の右辺は y に関して偶関数であるため n が奇数ならば $a_{n,0} = 0$ である. 図 4 を参照.

図 4: フィボナッチ数の場合

$$\begin{array}{lllllll}
1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & \cdots \\
0 & 2 & 3 & 8 & 15 & \cdots & \\
2 & 2 & 15 & 28 & \cdots & & \\
0 & 26 & 39 & & & & \\
26 & 26 & & & & & \\
0 & & & & & & \\
\ddots & & & & & &
\end{array}$$

例 3 初期数列を $a_{0,m} = (m+1)^k$ $(m \geq 0, k:$ 自然数$)$ とし, 2 重数列 $a_{n,m}$ $(n, m \geq 0)$ を漸化式 (3) で与えるとき, 母関数は

$$F(x,y) = \sum_{l=1}^{k} \left\{ {k \atop l} \right\} l! \left(\frac{e^y}{1-x} - 1 \right)^{l-1} \frac{e^y}{(1-x)^2}$$

であり,

$$a_{n,0} = \sum_{l=1}^{k} (-1)^{l+k} l! \left\{ {k \atop l} \right\} l^n$$

となる. 図 5 を参照.

図 5: $k = 2$ の場合

$$\begin{array}{lllllll}
1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & \cdots \\
3 & 10 & 21 & 36 & 55 & \cdots & \\
7 & 22 & 45 & 76 & \cdots & & \\
15 & 46 & 93 & & & & \\
31 & 94 & & & & & \\
63 & & & & & & \\
\ddots & & & & & &
\end{array}$$

2 重数列の母関数表示を得る一般的方法がわかったことで, 様々な初期数列に対してどのような数列が対角線上に現れるのかを, 系統的に求められるようになった. また, 漸化式を変更した際も同様な手法が適用でき, 漸化式の変形が与える 2 重数列への影響を母関数を通して容易に観察することができる. そのためベルヌーイ数の構造のみならず, ベルヌーイ数の種々の拡張へも応用が期待できる.

謝辞 秋山・谷川三角形を巡るこれまでの研究状況や, ご自身の最新の結果をご教示くださった東北大学の大野泰生氏, 川﨑菜穂氏に深く感謝いたします.

また, 本研究は下記研究費による支援を受けています: JSPS KAKENHI (Grant numbers 18K03260, 26287006, 16H06336).

参考文献

[1] Ihara, K., Sekiya, D. *A generating function of Akiyama-Tanigawa triangle*, in preparation.

[2] Kawasaki, N. *Hyperlogarithms, Bernoulli polynomials, and related multiple zeta values*, (2019), Doctoral dissertation. Graduate School of Science, Tohoku University.

[3] Kawasaki, N., Ohno, Y. *The algorithm for Bernoulli polynomials*, preprint.

[4] Akiyama, S., Tanigawa, Y. (2001), Ramanujan J. **5**, pp. 327–351.

[5] Kaneko, M. (2000), J. of Integer Sequence, **3**, Article 00.2.9.