近畿大学短大論集
第52巻 第1号（2019年12月）
p.1～9

# IS-LM モデルの動学化[1]

内　上　　誠

**抄録**

IS-LM モデルは、ヒックスによるケインズ経済学の因果関係を重視しながら要約したモデルと解釈することができる。IS-LM モデルの安定性分析はすでに研究成果があるが、IS-LM モデルの動学化はほとんど研究成果がない。本稿は IS-LM モデルの動学化を試みる。まず投資関数に資本ストックを取り入れ、資本蓄積と経済の変動を考える。次にカルドアモデルを考慮し、投資の予想収益率表の変化を仮定し、経済に循環が発生することを考察する。

**キーワード**

IS-LM モデル、動学、投資関数、利子率、予想収益率（表）

## A Dynamical IS-LM Model

Uchigami, Makoto

***Abstract***

In this paper, The author tries to build a Dynamical IS-LM Model. The Investment depends on two factors, one is the rate of interest, and the other is the rate of prosperity yield of the investment. I will focus on the second factor. As was shown by Kaldor, the rate of prosperity yield has nonlinear fluctuations. By means of this character, This study proposes an IS-LM model that generates a cycle.

***Key Words***

IS-LM Model, Dynamics, Investment function, Rate of Interest, The Rate of Prosperity Yield

目　　次



近畿大学短期大学部教授（学部長）
2019年9月28日受理

## 1．は じ め に

ヒックス（Hicks, J. R.）［1937］によりケインズ体系が IS-LM モデルとして要約され、公表されて以来、約50年以上が経つ。その間、様々な経済要因が追加されたり、モデルの拡張や展開、経済政策の応用などに頻繁に利用されてきた。本稿もその１つの試みである。IS-LM モデル自体はその変数の仮定より均衡近傍で安定であることはすでに証明されており、さらにオレック（Olech）の定理を用いて、その大域的安定性も佐久間［1987］によって証明されている。

本稿ではモデルに資本ストックの変化を含めることで、モデルの動学化を試み、均衡点の変動や安定性を考察することにする。

## 2．IS-LM モデル

一般的には次の体系で表される。

$$I(r) = S(Y)$$
$$\frac{M}{P} = L(r,\ Y)$$

ここで $I$ ：投資、$r$ ：利子率、$S$ ：貯蓄、$Y$ ：所得、$M$：名目貨幣量、$P$：物価水準、$L$：貨幣需要を表す。因果関係として LM 側で、所得を与えると貨幣市場で利子率が決まり、IS 側でその利子率が投資を決定し、投資が乗数過程を通して所得を形成する。結果として均衡点で（$Y^*, r^*$）が決まる。このとき資本ストックは一定であると仮定されている。したがって投資の生産能力増強効果は考慮されず、投資が資本ストックの変化に結び付けられることはない。本稿では投資が資本ストックの増分へと結びつくケースを考える。

### 2－1．投資関数の修正

IS 曲線では投資は利子率の関数であるが、予想収益率表（投資関数）自体はシフトしない。資本ストックを考慮した場合、その影響が予想収益率表のシフトに結びつくことはカルドア（Kaldor. N）をはじめ多くの人によって指摘されている。カルドアの場合、資本ストックの増加は高い予想収益率を持つ投資先を減少させると仮定されている。これは縦軸を利子率、横軸を投資とする、投資の予想収益率表（あるいは資本の限界効率表）を原点方向へとシフトさせることを意味している。よって、カルドアの場合には、投資関数は次のような性質も持つことが想定されている。

$$I = I(r,\ K)$$
$$\frac{\partial I}{\partial r} = I_r < 0,\quad \frac{\partial I}{\partial K} = I_K < 0$$

ここで $\partial I/\partial r$ はケインズ型の投資関数であり、$\partial I/\partial K < 0$ は資本ストックの増加による投資の予想収益率表の原点方向へのシフトによる投資の減少を意味する。よって生産物市場を表す IS 曲線は $I(r,\ K) = S(Y)$ となる。

### 2－2．因果関係の時系列

ところで時間の流れを考える場合には、所得、利子率、投資の決定関係とその時系列が重要となり、次の２つのケースが考えられる。

① $Y_t \rightarrow r_{t+1} \rightarrow I_{t+1} \rightarrow Y_{t+1} \rightarrow \cdots$

② $Y_t \rightarrow r_t \rightarrow I_t \rightarrow Y_{t+1} \rightarrow \cdots$

パターン①は、$t$ 期の所得が $t+1$ 期の利子率を決定し、その利子率が同期の投資と所得を決める。パターン②では、$t$ 期の所得が同期の投資までを決定し、その投資が乗数を通して、$t+1$ 期の所得を形成する。

パターン①の場合、ある期の投資が同期の資本ストック増分となるため、懐妊期間は存在しない。パターン②では１期の懐妊期間が存在するため、ある期の投資は次期の資本ストック増分となる。資本ストックと投資の関係を考える場合にはパターン②が適切である。

また、LM 曲線の関係から所得を与えると利

子率が決まるが、パターン①では $t$ 期の所得を与えると $t+1$ 期の利子率が決まり、$t+1$ 期の投資と所得を生み出す。一方パターン②では $t$ 期の所得が同期の利子率と投資を決定し、この $t$ 期の投資が $t+1$ 期の所得を形成する。したがってパターン①では $t$ 期の投資が同じ $t$ 期の所得を形成するため、瞬間的乗数を想定していることになる。

それぞれのパターンより、所得と投資（ここでは資本ストックからの効果は取り除いている。）の間には次式を想定することができる。

① $I_{t+1} = r(r_{t+1}) = f(Y_t)$

② $I_t = r(r_t) = g(Y_t)$

### 2－3．基本となる関係

IS 側として投資が次期所得を形成する所得決定式を考える（ここでも資本ストックの効果を除いている）。ここで乗数を $1/s$ とする。$s$ は貯蓄率（＞０、一定）を表す。パターン①の所得決定式は、

$$Y_{t+1} = \frac{1}{s}I_{t+1} = \frac{1}{s}f(Y_t)$$

となり、パターン②では、

$$Y_{t+1} = \frac{1}{s}I_t = \frac{1}{s}g(Y_t)$$

となるため、基本的には投資はどちらも $t$ 期の所得の関数となる。なおここでは均衡式を想定しているため、需要に対し同額の生産があるものとしている。

資本ストック蓄積の側面では、パターン①と②はそれぞれ次式となる。

① $K_{t+1} = I_{t+1} + K_t = f(Y_t) + K_t$

② $K_{t+1} = I_t + K_t = g(Y_t) + K_t$

結局、形式的には同じ式となるが、内容的な違いについては２－２の通りである。

本稿では経済学的内容からパターン②を選択することにする。すると所得決定式と資本ストック蓄積式は、

$$Y_{t+1} = \frac{1}{s}g(Y_t)$$
$$K_{t+1} = g(Y_t) + K_t$$

とすることができる。ここで投資関数へ資本ストックの効果を取り入れるなら、上式は次式となる。

$$Y_{t+1} = \frac{1}{s}I(Y_t,\ K_t)$$
$$K_{t+1} = I(Y_t,\ K_t) + K_t$$

### ３．均衡モデル

以下では一定の資本ストック $K_0(>0)$ の下で、初期に経済は均衡点 $Y^*$ にあるものとする。分析の都合上この均衡点からの乖離を、

$$y_t = Y_t - Y^*$$
$$k_t = K_t - K_0$$

と定義することにする。

所得決定式は均衡モデルを仮定すると乗数を通して形成される需要がそのまま所得となる。この式を均衡からの乖離の式に改めると、

$$y_{t+1} = \frac{1}{s}I(y_t,\ k_t) \tag{1}$$

となり、資本ストック蓄積式は、

$$k_{t+1} = I(y_t,\ k_t) + k_t \tag{2}$$

となる。

これより特性方程式を求めると、

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{s}I_y - \lambda & \frac{1}{s}I_k \\ I_y & I_k + 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \left(\frac{1}{s}I_y + I_k + 1\right)\lambda + \frac{1}{s}I_y$$
$$= 0$$

ここでトレース（Tr）とデタミナント（Det）は、

$$\mathrm{Tr} = \frac{1}{s}I_y + I_k + 1 = ?$$

$$\mathrm{Det} = \frac{1}{s}I_y < 0$$

なるため、判別式Δは、

$$\Delta = \frac{I_y}{s}\left(\frac{I_y}{s} - 2\right) + \frac{I_y I_k}{s} + (I_k + 1)^2 > 0$$

である。

位相図を描くため補助線を求める。ただし、次のように定義する。

$$\Delta y = y_{t+1} - y_t$$

$$\Delta k = k_{t+1} - k_t$$

ここでは混乱を招くことがないと思われるため変数に付すべき時間は省略している。(1)式と(2)式をこの定義に従って書き直すと、

$$\Delta y = \frac{1}{s}I(y,\ k) - y$$

$$\Delta k = I(y,\ k)$$

となり、各式を全微分し、整理すると各補助線の傾きは次のようになる。

$$\Delta y = 0,\quad \frac{dk}{dy} = -\frac{s - I_y}{I_k} < 0$$

$$\Delta k = 0,\quad \frac{dk}{dy} = -\frac{I_y}{I_k} < 0$$

両補助線ともマイナスであるため、Δ $y = 0$ 線の傾きからΔ $k = 0$ 線の傾きを引き、両者の差を取ると、

$$\frac{s - I_y}{I_k} - \left(-\frac{I_y}{I_k}\right) < 0$$

となるため、Δ $y = 0$ 線のマイナスの傾きの方が小さいことが分かる。

特性方程式は $\lambda$ を解として、

$$\lambda^2 - \left(\frac{1}{s}I_y - 1 + I_k\right)\lambda - I_k = 0$$

であり、トレースとデタミナントは、

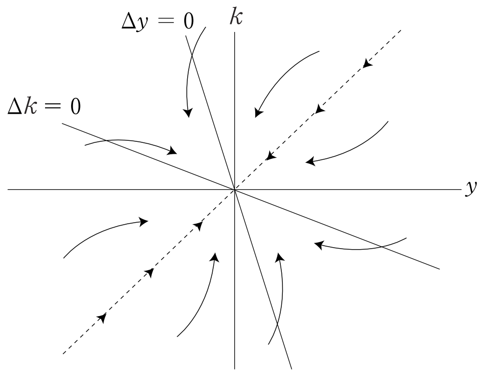
$$\mathrm{Tr} = \frac{1}{s}I_y - 1 + I_k < 0$$

$$\mathrm{Det} = -I_k > 0$$

となる。

判別式の正負号は不明であるが、位相を取ればNode 形であることが分かる。

以上の結果、Tr< 0 であるため、安定的なNode 形の位相となる。それを示したのが図‑1である。




図‑1

### 4．不均衡のケース

前節では生産物市場が瞬時に調整される均衡のケースを考察した。次に生産物市場で需給不均衡がある場合を考察する。投資の需要創出効果とは別に供給側を取り入れる。そこで最も効率的な資本係数を $\sigma$（=一定、> 0 ）とし、供給を

$$y = \frac{1}{\sigma}k$$

とする（この場合の生産と資本ストックも均衡からの乖離部分を表している）。

そこで基本の式を、

$$\dot{y} = \frac{1}{s}I(y,\ k) - \frac{1}{\sigma}k$$
$$\dot{k} = I(y,\ k)$$

とする。上式の右辺第１項は投資の乗数効果による需要創出を表しており、第２項は現存資本ストックを最も効率的に使用した場合の供給を表している。超過需要がある場合には次期の生産を拡大するため、LM 曲線を通して、下式によって投資が増加し、同様に、超過供給がある場合には LM 曲線を通して利子率が上昇し投資が縮小することを意味している。

特性方程式は、解を $\rho$ として、次のように求めることができる。

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{s}I_y - \rho & \frac{1}{s}I_k - \frac{1}{\sigma} \\ I_y & I_k - \rho \end{vmatrix} = \rho^2 - \left(\frac{1}{s}I_y + I_k\right)\rho + \frac{1}{\sigma}I_y = 0$$

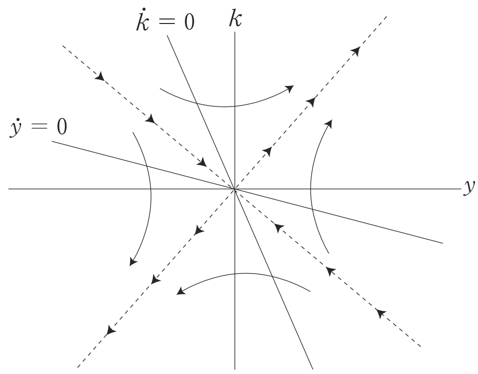
となり、これより Tr と Det は、

$$\mathrm{Tr} = \frac{1}{s}I_y + I_k < 0$$
$$\mathrm{Det} = \frac{1}{\sigma}I_y < 0$$

である。判別式は、

$$\Delta = \left(\frac{I_y}{s} + I_k\right)^2 - 4\frac{I_y}{\sigma} > 0$$

を得る。これより挙動は Saddle Point 形となることが分かる。両式を全微分し、$\dot{y}=0$ 線と $\dot{k}=0$ 線を求め[2]、位相図を完成させると図−２のようになる。




図−２

## ５．予想収益率表のシフト

カルドアは所得の上昇により拡張過程を表し、その過程の特徴としての予想収益率のシフトをモデル内に取り入れている。この節ではこの予想収益率のシフトをモデル内へ入れることにする。ただし、この節では予想収益率のシフトに焦点を当てるため、所得上昇に伴う利子率上昇が投資に与えるマイナス効果を特定値（−１）に固定することにする。

カルドアと同様に投資の予想収益率表を所得の関数とし、所得の増加は景気が良好であることを表し、逆に、所得の低下は不況を表すものとし、経済主体もそのように感ずるものとする。この仮定は非常に主観的であるため明確な式にするためには実証研究の結果を待たねばならない。しかし本節では過去の経験からこの仮定を置くことにするが、本節の分析は大雑把とならざるを得ない。

まず、次のような投資関数を想定するが、それ以外は IS-LM モデルを反映している。

$$I = I(y,\ r)$$

ここで $r$ は利子率を表す。所得 $y$ は予想収益率表のシフト効果を表し、$y$ の増加（減少）は予想収益率表を右へ（左へ）とシフトさせることを仮定する。

$$\frac{\partial I}{\partial y} \equiv I_y > 0$$

利子率 $r$ は通常のケインズ型投資関数を表している。利子率上昇による投資への効果はケインズ同様マイナスであると仮定する。

$$\frac{\partial I}{\partial r} \equiv I_r < 0$$

### 5－1．モデル

基本の式として次式を想定する。

$$\dot{y} = I(y,\ r) - sy$$
$$\dot{r} = r(y) - r$$

ここで $s$ ：貯蓄率（> 0）を表す。1本目の式は投資（需要）と貯蓄（供給）の差の分が生産調整されることを表す。2本目の式は利子率の変化を表す。以下の分析はこれら2本の式が基となる。

特性方程式は[3]、

$$\lambda^2 - (I_y - s - 1)\lambda - (I_r r_y + I_y - s) = 0$$

であり、Δ、Tr、Det はそれぞれ次のようになる。

$$\Delta = (I_y - s - 1)^2 + 4I_r r_y$$
$$\mathrm{Tr} = I_y - s - 1$$
$$\mathrm{Det} = -(I_r r_y + I_y - s)$$

ただし、$\partial r / \partial y > 0$ である。また、$I_r r_y > 0$ は所得が増加することで利子率が上昇し、その上昇による投資へのマイナス効果を表す。これを4節で述べたように－1と仮定する。この仮定によって投資の予想収益率表の傾きは一定であることを仮定していることと同じである。

以下、投資の予想収益率表のシフトを2つのケースに分けて考察して行く。

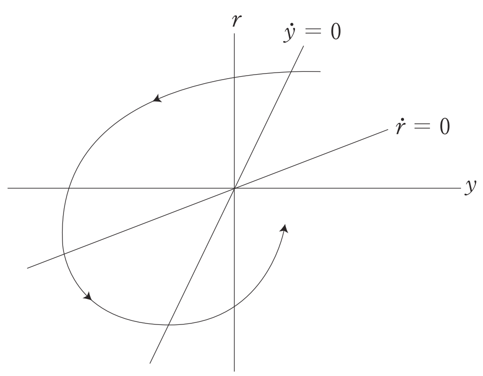
**① $1 > I_y > 0,\ I_r r_y = -1$ のケース**

所得増加による予想収益率表のシフトが小さく、利子率上昇による投資へのマイナス効果の方が大きいケースがこれに当たる。現実には経験上、景気回復の局面に対応すると考えられる。

Δ、Tr、Det はそれぞれ次のようになる。

$$\Delta = (I_y - s - 1)^2 + 4I_r r_y < 0$$
$$\mathrm{Tr} = I_y - s - 1 < 0$$
$$\mathrm{Det} = -(I_r r_y + I_y - s) > 0$$

それゆえ、位相図を作ると左回りの安定な Focus 型となる。図－3参照。




**図－3**

補助線に注目すると次の変化が現れる。補助線はそれぞれ次式となる。

$$\dot{y} = 0, \qquad \frac{dr}{dy} = \frac{s - I_y}{I_r}$$

$$\dot{r} = 0, \qquad \frac{dr}{dy} = r_y > 0$$

後者の式は LM 曲線より、所得の増加は利子率の上昇につながることを表している。

両者の傾きの差は、

$$\frac{s-I_y-I_r r_y}{I_r}$$

によって求めることができる。$\dot{r}=0$ 線の傾きはプラスで一定であると仮定する。この仮定は投資の予想収益率表の傾きが一定であることを仮定していることになる。ここで、$I_r<0$ であることに注意すると、$I_y<s$ であると $\dot{y}=0$ 線の傾きはマイナス（図- 4 の(ア)）となり、その後 $I_y$ の値が大きくなるにつれ、両者の差が近づき、$\dot{y}=0$ 線は垂直に近づき（図- 4 の(イ)）、$I_y<s$ となると $\dot{y}=0$ 線の傾きがプラスとなる（図- 4 の(ウ)）。さらに $I_y$ の値が増加するにつれ、$\dot{y}=0$ 線と $\dot{r}=0$ 線は近づき、

$$I_y=s-I_r r_y=s+1$$

となると、両線は合致する。このとき $\Delta=0$、$\mathrm{Tr}=0$、$\mathrm{Det}=0$ である。

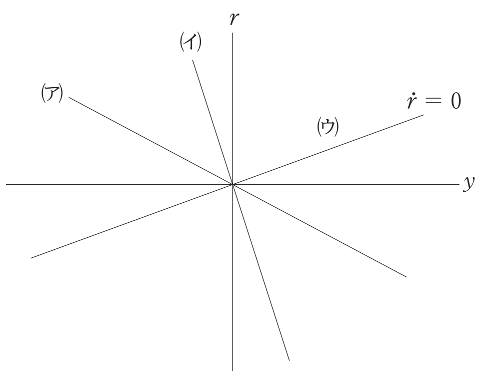



**図- 4**

一方、図- 4 における(ア)から $\dot{y}=0$ 線と $\dot{r}=0$ 線が合致する直前までの領域では

$$\Delta<0$$
$$\mathrm{Tr}<0$$
$$\mathrm{Det}>0$$

となり、図- 3 と同様に、左回りの安定的な Focus 型の位相図となる。換言すると、この領域では予想収益率の増加がもたらす投資の増加は利子率の上昇に伴う投資の減少を超え始めていることを意味する。

**② $I_y>s+1=s-I_r r_y$, $I_r r_y=-1$ のケース**

①のケースでは所得増加がもたらす予想収益率表のシフトが小さい場合が扱われた。ケース②では予想収益率表のシフトが大きい場合、拡張過程における好況局面に対応するケースを扱う。

$I_y$ の値が、

$$I_y>s-I_r r_y$$

となるや否や、$\dot{y}=0$ 線が $\dot{r}=0$ 線を越え、$\dot{y}=0$ 線の傾きが小さくなる。また同時に、

$$\Delta>0$$
$$\mathrm{Tr}>0$$
$$\mathrm{Det}<0$$

となるため、位相図は図- 5 のように Saddle point 型となる。

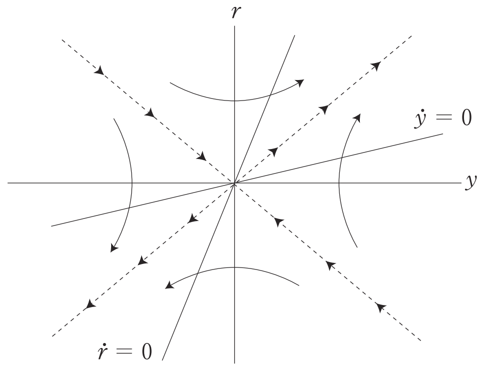



**図- 5**

### 5 - 2．位相図の合成

図- 3 は回復過程に対応しているため、第 2 象

限から第４象限までにこの図-３を組み入れ、第１象限には好況局面を表す図-５を適応させると図-６のようになる。

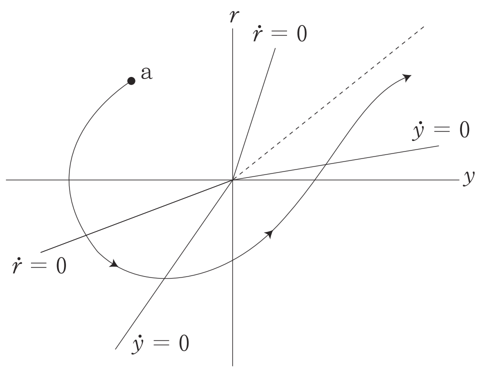



図-６

横軸が所得（GDP）であることに注意する。いま経済が第２象限（均衡が安定な Focus 型の位相図を持つ。）のａ点にあるものとする。ａ点からスタートした経済は第３象限へと進むが、その過程で利子率は低下、所得は上昇する。続く第３象限では所得と利子率の両方が上昇を始める。そして第１象限、つまり Saddle point の領域へと入り、所得と利子率は勢いよく上昇することになる。これは好況局面の特徴を示している。以上は景気循環における景気の後退局面から拡張局面へ至る過程を表している。

### ５-３．上方転換点

Saddle point の領域に入った経済は上昇を続けるが、カルドアによると所得の上昇は投資コストの上昇を招き、やがて活発な投資は衰退し始める。これは投資の予想収益率表の左側へのシフトを意味する。$I_y$ の低下が始まると $\dot{y}=0$ 線は左へとシフトし（傾きが次第に大きくなり）始める。$I_y > s-I_r r_y$ であった経済はやがて $I_y = s-I_r r_y$ となり、$\dot{y}=0$ 線と $\dot{r}=0$ 線は合致する。そして $I_y < s-I_r r_y$ となると $\dot{y}=0$ 線が $\dot{r}=0$ 線を越える（$\dot{y}=0$ の傾きが大きくなる）。このことは予想収益率の増加による投資の増加を、利子率の上昇による投資の減少が上回るためである。このときこの領域では位相図は左回りの Focus 型で、安定である（図-３参照）。したがって、勢いよく上昇を続けている経済は Focus の領域に入ると、所得の増加のスピードは弱められ、やがて減少を始める。利子率は当初上昇するが、やがて利子率も徐々に低下し始める。したがって上昇転換点は予想収益率から発生する投資増加が、利子率上昇による投資減少に凌駕されることで起こることになる。

## ６．結　語

IS-LM モデルの安定性についてはすでに研究が行われているが、投資の需要創出効果に着目されており、生産能力創出効果の側面はほとんど研究されていない。本稿では投資が資本ストックの増加に結び付く側面を論じた。資本ストックの変化は均衡点の変化をもたらす。

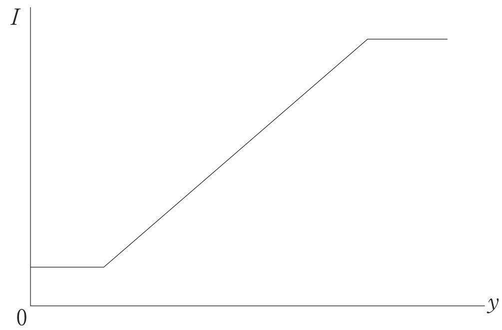
そこでまず均衡モデルの下で資本ストックの蓄積がもたらす経済の変動を見た。結果、位相図は安定的な Node 型となる。したがって経済は初期状態が均衡点になくても安定的に均衡へと収束するものとなった。

次に需給不均衡のケースを考察した。需要側は投資の乗数効果を想定し、供給側には資本ストックと資本係数の逆数を取り入れ、資本ストックの変化を考慮した。位相図は Saddle point 型となり、複雑な動きを示すこととなる。

最後に IS-LM モデルそのものに最も近い動学化を試みた。利子率による投資への効果と投資の予想収益率表のシフトによる投資への効果を取り入れた。予想収益率表のシフトの動きについてはカルドアの投資関数に従った。ここでは予想収益率表のシフトによる投資の動きに焦点を合わせているため、利子率からの投資の影響は一定（予想収益率表の傾きを一定）と仮定した。すると、不況局面から回復局面では Focus 型の位相が支配し、自動的に景気は回復することになる。拡張

局面を通して Saddle point 型が現れ、所得と利子率は上昇を続ける。その後、経済は Focus 型の位相へと入り、景気は後退局面へと移行する。

以上のような景気循環の動きはすべてカルドア型の投資関数の形状に依存している。カルドア型の投資関数は図−7のようなS字型のものである。




**図−7**

所得水準が低いところでは新たな有望な投資機会を見いだせないため投資水準は低くなっている。一方、所得水準の高いところでは投資資金調達コストが上昇するため投資の増加率は減少する。このような形の投資関数であるため、位相図は Focus から Saddle point へ、Saddle point から Focus へと変化する。

**（注）**

⑴ 本稿は大学院時代に恩師岡本武之先生から頂戴した宿題に対する答えである。

⑵ 補助線は先述と同様にして次のようになる。

$$\dot{y}=0,\qquad \frac{dk}{dy}=\frac{-I_y}{I_k-\frac{s}{\sigma}}<0$$

$$\dot{k}=0,\qquad \frac{dk}{dy}=\frac{I_y}{I_k}<0$$

$\dot{y}=0$ から $\dot{k}=0$ を引けば、

$$\left.\frac{dk}{dy}\right|_{\dot{y}=0}-\left.\frac{dk}{dy}\right|_{\dot{k}=0}=\frac{-\frac{s}{\sigma}I_y}{\left(I_k-\frac{s}{\sigma}\right)I_k}>0$$

となるため、$\dot{y}=0$ 線より $\dot{k}=0$ 線の方が傾きが小さくなる。

⑶ 偏微係数行列を用いると、特性方程式は次の行列式から求めることができる。

$$\begin{vmatrix}(I_y-s)-\lambda & I_r \\ r_y & -1-\lambda\end{vmatrix}$$

**参考文献**


［1］ 佐久間敬「IS-LM モデルと均衡分析」創価女子短期大学紀要，(3)，1987, PP.163–170.

［2］ 和田貞夫『動態的経済分析の方法』中央経済社，1989.

［3］ Ferguson, B. S. and G. C. Lim, *Introduction to Dynamic Economic Models*, Manchester University Press, 1998.

［4］ Gandolfo, G., *Economic Dynamics; study edition*, Springer, 1997.

［5］ Hicks. J. R., "Mr. Keynes and the Classics; A Suggested Interpretation," Econometrica, 1937.

［6］ Kaldor, N., "A Model of the Trade Cycle," Economic Journal, 1940. Reprinted in Essays on Economic Stability and Growth, 1960.

［7］ Puu, Toenu and I. Sushko, *Business Cycle Dynamics Models and Tools*, Springer 2006.