

令和元年6月6日現在

機関番号：34419

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2016～2018

課題番号：16K05163

研究課題名(和文) 3次元トポロジーによる空間グラフの対称性の研究

研究課題名(英文) Symmetries of spatial graphs by 3-manifold topology

研究代表者

池田 徹 (IKEDA, Toru)

近畿大学・理工学部・教授

研究者番号：00325408

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：(1) 3次元球面内の絡み目は、デーン手術により3次元多様体上の巡回群作用の不動点集合となることを示した。また、3次元球面内の空間グラフの対称性が閉曲面を不動点集合とする対合で与えられるための条件を与えた。(2) 3次元多様体上の向き反転周期的微分同相が縮小化された特異集合を持つならば、3次元球面、2次元球面上の円周束、3次元トーラスのいずれかに周期性を反映する手術の記述が存在することを証明した。(3) 抽象グラフの対称性が4次元直交群の有限部分群で与えられるとき、3次元球面上の線型作用のもとで集合として不変な空間埋め込みが存在するための条件を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

3次元多様体論の基盤となる重要な事実の一つとして、向き付け可能閉3次元多様体が3次元球面内の枠付き絡み目で記述されることが知られており、これに基づいて多くの理論が展開されている。本研究により枠付き絡み目に反映される3次元多様体の幾何学的性質を新たに示し、3次元多様体論の視界を広げることに貢献できた。また、先行研究に比べて汎用性の高いグラフ対称性の実現方法を提案したため、複雑な空間グラフや様々なグラフ対称性を扱うための研究の手段を提供することができた。

研究成果の概要(英文)：(1) We showed that a link in the 3-sphere is the fixed point set of a cyclic group action on a 3-manifold obtained by Dehn surgery, and gave a condition for a spatial graph in the 3-sphere to have a symmetry given by an involution with fixed point set being a closed surface. (2) We proved that an orientation-reversing periodic diffeomorphism on a 3-manifold with a reduced fixed point set has a surgery description in either the 3-sphere, the circle-bundle over the 2-sphere, or the 3-torus. (3) We gave a condition for an abstract graph with a symmetry given by a finite subgroup of the orthogonal group  $O(4)$  to admit a spatial embedding which is setwise invariant under the linear action on the three-dimensional sphere.

研究分野：3次元多様体論

キーワード：3次元多様体 デーン手術 空間グラフ 対称性

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

3次元球面内の空間グラフは、分子化学への応用性が高いことから活発に研究されている。その中でも、空間グラフの対称性に関して「抽象グラフと自己同型からなる有限群が与えられたとき、その群で定まる対称性を有する空間埋め込みが存在するか」というグラフ対称性の実現問題が注目されている。

先行研究では、メビウスの帯状の梯子型グラフや、完全グラフ、3連結グラフ、完全2部グラフなどが研究対象となってきた。また、有限群としては、交代群、巡回群、2面体群や、それらの直積群などが扱われてきた。また、主な議論の方針は、想定している有限群の3次元球面への標準的な作用のもとで、対象となる抽象グラフの頂点を集合として不変になるように3次元球面内に配置し、空間埋め込みへと拡張するというものである。基本的なステップにおける構成方法をサブルーチン化して体系的な議論を行っているが、グラフの構造が複雑になるほど議論も複雑になる上に、抽象グラフの特徴に応じた個別の議論を展開せざるを得ないという問題があった。

### 2. 研究の目的

デー手術等の3次元多様体論の手法を用いることにより、グラフ対称性の実現問題に対し汎用性のある解決方法を提案するため、下記項目について研究を行うことを目的とした。

(1) 3次元多様体論を用いて、3次元多様体の対称性やその中にある空間グラフの対称性と、対称性を定める有限群作用の不動点集合との関係を調べる。

(2) 3次元多様体上の有限群作用  $G$  が3次元球面内の枠付き絡み目  $L$  の対称性から誘導される時  $L$  を  $G$  の surgery description という。3次元多様体上の有限群作用の surgery description が存在すれば、グラフ対称性の実現問題の解決に有用と考えられるため、その存在条件を明らかにする。

(3) 4次元直交群  $O(4)$  の部分群で定まるグラフ対称性に対して、実現問題の解決を試みる。

### 3. 研究の方法

(1) 以下の2つの方法によって、3次元多様体の対称性やその中にある空間グラフの対称性と、対称性を定める有限群作用の不動点集合との関係を調べる。

3次元多様体上の向きを保つ有限巡回群作用の不動点集合は絡み目である。そこで、3次元球面内の絡み目をこのような不動点集合と見なすためのデー手術を構成する。

3次元球面内の空間グラフの外部空間において向き反転対合を考えると、不動点集合は球面とは限らず一般の向き付け可能閉曲面となる可能性もある。そこで、対合による対称性を持つ空間グラフと不動点集合の閉曲面の関係をオイラー数に基づいて調べる。

(2) 先行研究によって不動点集合のループの成分を同変デー手術によって増減する方法が知られているので、閉曲面の成分に対して同変デー手術によって連結和や圧縮を行う方法を考える。

(3) 抽象グラフの自己同型群に基づいて3次元多様体と有限群作用を構成し、surgery

description の議論を参考にしながら ,同変デーン手術理論によって 3 次元球面を得る方法を調べる。

#### 4 . 研究成果

(1) 3 次元多様体内の空間グラフの対称性と不動点集合との関係に関して , 以下の 2 つの研究成果が得られた。これらの研究成果は学術論文として査読付き論文誌へ掲載された。

3 次元球面内の与えられた絡み目を双曲多様体上の巡回群作用の不動点集合とするようなデーン手術が無数存在することを示した。

3 次元球面内の空間グラフが , 外部空間内の閉曲面を不動点集合とする滑らかな周期写像のもとで集合として不変となるための条件を明らかにした。

(2) 3 次元多様体上の向きを反転する滑らかな周期写像に対して , 同変デーン手術により特異集合が縮小化されていれば , 3 次元球面 , 2 次元球面上の円周束 , 3 次元トーラスのいずれかにおいて surgery description が存在することを証明した。また、特異集合が縮小化されていなければ、最大 3 段階のデーン手術が必要であることを示した。研究成果は論文にまとめ、学術誌へ投稿手続き中である。

(3) 抽象グラフの自己同型群の有限部分群が 4 次直交群の部分群と同型であるとき , 3 次元球面上の標準的線型作用のもとで集合として不変な空間埋め込みの存在について調べた。そして、特異集合が 3 次元球面上の標準的線形作用の特異集合の部分集合とみなせる場合に肯定的に問題を解決した。研究成果は論文にまとめ、学術誌へ投稿手続き中である。

#### 5 . 主な発表論文等

[ 雑誌論文 ] ( 計 2 件 )

T. Ikeda:

Involutions of hyperbolic spatial graph exteriors whose fixed point sets are closed surfaces,

J. Knot Theory Ramifications 27 (2018), 1850004.

DOI: 10.1142/S0218216518500049

<https://www.worldscientific.com/worldscinet/jktr>

査読有

T. Ikeda:

Hyperbolic rotations about links in 3-manifolds, J. Geom. 108 (2017), 111-118.

DOI 10.1007/s00022-016-0328-0

<https://link.springer.com/journal/22>

査読有

[ 学会発表 ] ( 計 2 件 )

池田 徹:

3 次元多様体上の向き反転周期的微分同相の surgery descriptions , 日本数学会トポロジー分科会 , 2019 年 3 月 19 日 , 東京工業大学 ( 東京 )

池田 徹:

補空間が双曲多様体となる空間グラフの構成について, ハンドル体結び目とその周辺 IX, 2016  
年 10 月 9 日, 近畿大学工学部理学科 (大阪)

[ その他 ]

池田徹 (Toru Ikeda) のホームページ

<http://www2.math.kindai.ac.jp/~ikedai/index.html>

## 6 . 研究組織

(1) 研究分担者  
なし

(2) 研究協力者  
なし

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。