Bulletin of the JSME
日本機械学会論文集
Transactions of the JSME (in Japanese)
Vol.84, No.866, 2018

# ヨー共振モードについての基礎的研究
## （簡潔モデルの共振現象から解釈するヨー共振現象とドライバの評価用語との関係）

酒井 英樹[*1]

# Fundamental study on yaw resonance mode
## (Relationship between yaw resonance phenomenon and evaluation terms of drivers interpreted based on resonance phenomenon in a simple model)

Hideki SAKAI [*1]
[*1] Kindai Univ. Dept. of Robotics Engineering
1 Umenobe, Takaya, Higashihiroshima-shi, Hiroshima 739-2116, Japan

**Received: 9 January 2018; Revised: 1 April 2018; Accepted: 13 May 2018**

**Abstract**
This paper starts with describing a method of deriving the resonance mode of a pendulum utilizing its equation of motion. This resonance mode is that the equilibrium position of the pendulum locates the vertical plane including its fixed point and the mass accelerates in proportion to the distance from the equilibrium position to its mass. Further, the equation of motion of vehicles was converted to a form conforming to the equation of motion of the pendulum. As a result, it was found that the equilibrium position of yaw resonance is the extension line of the vehicle speed vector at the front wheel position. Moreover, it turned out that its rear wheel accelerates toward this extension line in proportion to the distance from this extension line to the rear wheel is the yaw resonance mode under a special condition. Finally, the step steering response was considered. At the moment of steering input, the mode of the yaw lead time constant appears, and then the yaw resonance mode becomes apparent. Hence, the yaw resonance is revealed in the latter half of the transient response. Therefore, it is considered that the yaw natural frequency is suitable as a metric of the latter half behavior of the transient response.

***Keywords***： Yaw, Resonace, Natural frequency, Mode, Transinet behavior, Yaw natural frequency

## 1. 緒　　言

自動車の操縦性は，操舵に対する車両過渡応答の「気持ち良さ」，すなわち「感性」領域で競合していると指摘される（篠倉,2009）（松本,2005）．テストドライバに代表される，気持ちよさを感じ取れるドライバの中には，過渡応答を段階分けして前後輪の運動で表現する場合がある．例えば「ステアリング操作」に対して車両は「回頭」し，その後，「リヤが追従」したり「リヤが安定」であるとの表現がある（戸田，2008）．回頭の「頭」は車両前部を意味するから，この例では（操舵→）車体前部の旋回→車体後部の旋回のように少なくとも 2 段階の運動があることが示唆される．車両の開発においても，気になる段階の車両挙動やその良否をテストドライバがエンジニアに説明し，これらの表現をもとにエンジニアは，実際の車両挙動を理解し，設計や設計変更すると思われる．

したがって感性性能向上のための車両過渡応答開発のあるべきプロセスとして「①テストドライバが述べる各段階の動き方をエンジニアが理解し，②それらに対応する応答指標を選定し，③その応答指標の目標値を設定し，④この目標値を達成するように設計すること」を著者は提案したい．これらのうち③④は車種個別の課題だから，①②が全車種共通の枠組みである．ただし，この枠組みは未完である．なぜなら，現在報告されている①②はヨー進み時定数のモード（酒井，2013）だけしか見当たらないからである．ヨー進み時定数は，舵角に対するヨー

No.18-00014 [DOI:10.1299/transjsme.18-00014], J-STAGE Advance Publication date : 29 May, 2018
本論文は，第26回交通・物流部門大会 講演論文集(2017), No.1101の掲載内容に基づいた論文である．
[*1] 正員，フェロー，近畿大学工学部（〒739-2116　広島県東広島市高屋うめの辺 1）
E-mail of corresponding author: sakai@hiro.kindai.ac.jp


© 2018 The Japan Society of Mechanical Engineers

角速度の伝達関数の零点である．零点のモードが存在するのだから，その極であるヨー共振（入江，芝端，1985）にもモードが存在するはずだが，既往研究は見当たらない．したがって，ヨー共振モードが分かれば，極・零のモードが揃うため，①②の枠組みが完成し，感性性能向上のための車両過渡応答開発のあるべきプロセスが実行可能になるはずである．

そこで本論文は，「①ドライバが述べる各段階の動き方を理解し，②それらに対応する応答指標の選定を可能にする」ために，前半部ではヨー共振のモードを明らかにする．後半部では，ヨー共振モードとヨー進み時定数との関係との考察を通じて，ヨー共振が生じるタイミングやドライバの表現を考察する．なお，本論文では簡単のため，特殊なヨー慣性モーメントと特殊な車速との組合せの場合についてだけ扱い，これ以外の場合は扱わない．

## 2.　共振モードを求めるための運動方程式の着目点

共振モードを求める方法としてモード解析（中川他，1986）による方法がある．この方法は，多自由度の振動系のモードを導出できる汎用性のある方法であるが，逆に 1 自由度振動系，例えば 1 自由度ばねマス系や単振り子のモード解析には適さないと思われる．なぜなら，これらのモードは運動方程式から分かるからである．運動方程式による方法は，モードが単に分かるだけでなく，復元項や慣性項もわかるから，モード解析よりも，共振のメカニズムがより深く理解できるものと思われる．自動車の平面運動の方程式の特性方程式の次数も後述のように 1 自由度振動系と同じ 2 次であるから，本論文では運動方程式を吟味することによって，ヨー共振モードを求める．そこでこの章では，ヨー共振モードを求めるための運動方程式の着目点を，単振り子を例に確認する．

### 2・1　振り子のモデル

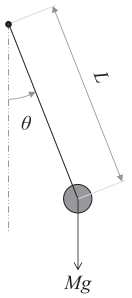
振り子のモデルを図 1(A)に示す．ここで $M$ は質点の質量を，$L$ は振り子の長さを，$\ddot{\theta}$ は振り子の角加速度を，$\dot{\theta}$ は振り子の角速度を，$\theta$ はつり合いの位置からの振り子の角度をそれぞれ表し，それらの向きは反時計回りを正とする．$\sin\theta \fallingdotseq \theta$ とみなせるとき，この系の運動方程式は周知のように，

$$ML\ddot{\theta} = -Mg\theta \tag{1}$$

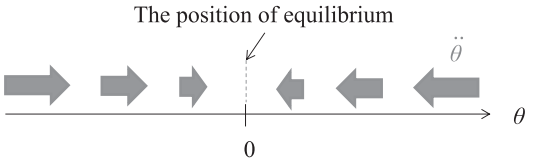
だから

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\theta \tag{2}$$

と表すことができる（中川他，1986）．




(A) Model




(B) Concept of resonance

Fig.1 A pendulum

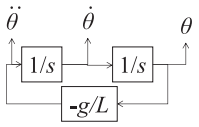



Fig. 2 A block diagram of the pendulum; the two integrals are located in series.

[DOI: 10.1299/transjsme.18-00014]
© 2018 The Japan Society of Mechanical Engineers

式(2)は，少なくとも次の三つを示唆する；

1）右辺の物理量が 0 のところ（$\theta$=0）につり合いの位置がある，

2）つり合いの位置からの変位（$\theta$）に比例して加速（-$\ddot{\theta}$）する，

3）加速度（$\ddot{\theta}$）の向きは，負号のため，変位（$\theta$）と逆方向なので，つり合いの位置に向く．

これらが振動モードである．

1)～3)を模式化したものを図 1(B)に示す．図 1(B)における矢印は，つり合いの位置に向かっているように見える．そこでこの運動を「つり合いの位置に向かう加速」と呼ぶことにする（「つり合いの位置に向かう加速」は，「復元力」（中川他，1986）を加速度次元で表したものである）．つり合いの位置に向かうことは式(2)の負号（と $\theta$）が表すので，車両の運動方程式の中から，負号に注意して式(1)，(2)に準じた形式の運動方程式を見出せば，つり合いの位置や，つり合いの位置に向かって加速するものが分かるはずである．これが，共振モードを求めるための運動方程式の着目点である．

### 2・2　運動方程式の構造

式(2)における運動方程式の構造について述べる．この系には自明の関係として，

$$\dot{\theta} = \int \ddot{\theta} dt \tag{3}$$

$$\theta = \int \dot{\theta} dt \tag{4}$$

がある．式(2)～(4)の組合せを総称して，本論文では運動方程式と呼ぶ．これらを状態方程式形式で表すと次のようになる．

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{g}{L} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \theta \end{Bmatrix} \tag{5}$$

式(5)の 3 変数（$\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$）のうちの 2 変数が定まると残りの 1 変数の値も決まる．したがって，このモデルの運動を過不足なく記述するためには， 2 変数が必要である．この意味で式(5)は 2 自由度の運動方程式である（そのため，平面 2 自由度モデルへの適用が期待できる）．

上式の構造を目で見るために，式(5)をブロック線図で表したものが図 2 である．図 2 に示すように，この運動は，$\ddot{\theta}$→積分→$\dot{\theta}$→積分→$\theta$ の順に進行する．このようにモデルの運動を表すための 2 変数（例えば $\theta$ と $\dot{\theta}$）が積分に対する入出力関係にあることを以後「直列構造」と記す（酒井，2013）．

## 3.　直列構造を有する平面 2 自由度運動方程式

### 3・1　重心の運動を表す運動方程式

本節では，図 3 に示す平面 2 自由度モデルの重心位置についての運動方程式が直列構造を有しないことについて述べる．

このモデルは，ヨー角速度 $r$ と重心位置車体横滑り角 $\beta$ の 2 自由度によって記述される線形モデルである．ここで，車両質量を $m$，ヨー慣性モーメントを $I_z$，前輪と重心との距離を $l_f$，後輪と重心との距離を $l_r$，前輪位置車体横滑り角を $\beta_f$，後輪位置車体横滑り角を $\beta_r$，車速を $V$（一定）とする．次に，旋回半径はトレッドよりも十分大きいと仮定する．そこで前後それぞれの左右輪は車両中心線上にあるものとして，前輪コーナリングパワを

[DOI: 10.1299/transjsme.18-00014]
© 2018 The Japan Society of Mechanical Engineers

$2K_f$（>0），後輪コーナリングパワを $2K_r$（>0），前輪コーナリングフォースを $2F_f$，後輪コーナリングフォースを $2F_r$ とする．また，オーバーオールステアリングギヤ比を 1 と仮定し，舵角を $\delta$ と記す．

以上のことから，このモデルの運動方程式は次式によって表される（安部，2012）．

$$mV\left(r+\dot{\beta}\right)=2F_f+2F_r \tag{6}$$

$$I_z\dot{r}=2l_fF_f-2l_rF_r \tag{7}$$

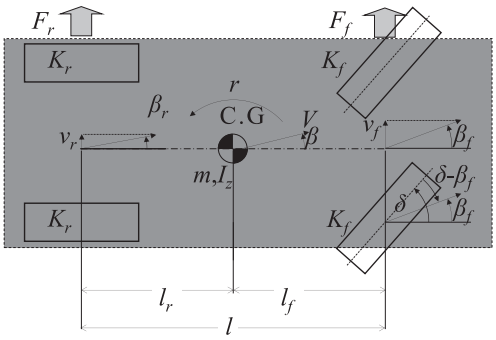



Fig. 3 A standard vehicle model; planar 2.D.O.F motion are represented by $r$

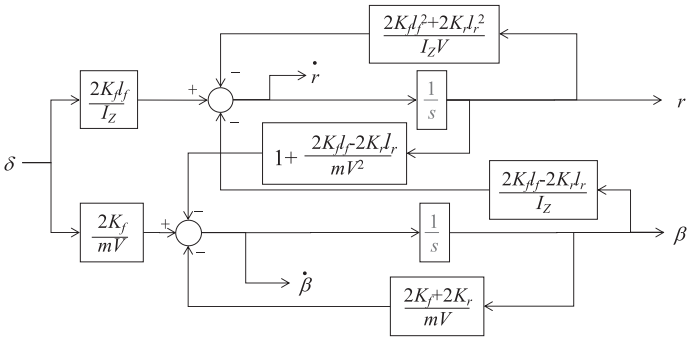



Fig. 4 Block diagram of a standard vehicle model; after $\delta$ is input, $r$ and $\beta$ occur at the same time.

式(6)左辺の $Vr$ は円旋回の加速度項，$V\dot{\beta}$ は重心位置の横方向の並進運動の加速度項である．

次にコーナリングフォースについて述べる．コーナリングフォースはコーナリングパワとタイヤスリップ角との積である．ここで，前輪のタイヤスリップ角は $\beta_f$ - $\delta$，後輪のタイヤスリップ角は $\beta_r$ である．このモデルでは，コーナリングパワを正の値で定義したため，コーナリングフォースの符号は，タイヤスリップ角の符号と逆になる．したがって，$2F_f$ と $2F_r$ はそれぞれ次式で表される．

$$2F_f=-2K_f\left(\beta_f-\delta\right) \tag{8}$$

$$2F_r=-2K_r\beta_r \tag{9}$$

また，車体の各部によって横滑り角が異なり，$\beta_f$ と $\beta_r$ はそれぞれ次式で表される．

$$\beta_f=\beta+\frac{l_f}{V}r \tag{10}$$

$$\beta_r=\beta-\frac{l_r}{V}r \tag{11}$$

なお，このモデルの運動方程式には，自明の関係

$$r=\int\dot{r}dt \tag{12}$$

[DOI: 10.1299/transjsme.18-00014]
© 2018 The Japan Society of Mechanical Engineers

$$\beta = \int \dot{\beta} dt \tag{13}$$

がある．

式(6)～(13)を状態方程式の形式で表示すると，式(14)になる．

$$\begin{Bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{2K_f l_f^2 + 2K_r l_r^2}{I_Z V} & -\dfrac{2K_f l_f - 2K_r l_r}{I_Z} \\ -\left(1 + \dfrac{2K_f l_f - 2K_r l_r}{mV^2}\right) & -\dfrac{2K_f + 2K_r}{mV} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r \\ \beta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{2K_f l_f}{I_Z} \\ \dfrac{2K_f}{mV} \end{bmatrix} \delta \tag{14}$$

上式の構造を目で見るために，式(14)をブロック線図で表わしたものが図 4 である．図 4 においては，$\dot{\beta}$ と $\dot{r}$ とが，そして $\beta$ と $r$ とがそれぞれ並列の関係にある．さらに，二つの積分も互いに並列の関係にある．すなわち，$\delta \to \dot{r} \to$ 積分 $\to r \to$ 積分 $\to \beta$ の経路がある一方で，$\delta \to \dot{\beta} \to$ 積分 $\to \beta \to$ 積分 $\to r$ の経路もある．よって，$r$ が入力，$\beta$ が出力ではないし，$\beta$ が入力，$r$ が出力でもない．このように $r$ と $\beta$ には入出力が関係ない．これは二つの積分についても同様であり，一方が入力，他方が出力の関係ではない．したがって，図 3 の車両モデルは，図 2 のような直列構造を有しないので，本論文では用いない．

### 3・2　因果関係モデル

本論文では以後，直列構造を有する車両モデルとして提案された因果関係モデル（酒井，2013）を用いる．因果関係モデルを図 5 に示す．このモデルでは，車両を表す $m$，$I_z$，$l_f$，$l_r$ からなる剛体を，質量 $m_f$ なる前輪上の質点と，質量 $m_r$ なる後輪上の質点とホイルベース $l$（$l = l_f + l_r$）とで表現する．本論文では以後，簡単のため前輪と前輪上の質点からなる系を単に「前輪」，後輪と後輪上の質点からなる系を単に「後輪」と記す．前輪の座標系 $o_f$-$x_f$-$y_f$ は，前輪上に原点 $o_f$ をとり，車両中心線上に $x_f$ 軸，そして $x_f$ 軸と直交する方向に $y_f$ 軸をとった車両固定座標系である．$o_f$-$x_f$-$y_f$ と同様に後輪の座標系 $o_r$-$x_r$-$y_r$ も定める．$o_f$ における車速を $V_f$，$o_r$ における車速を $V_r$ とそれぞれ記す．また $y_f$ 軸方向の横加速度を $a_f$，$y_r$ 軸方向の横加速度を $a_r$，$y_r$ 軸方向の横速度を $v_r$ とそれぞれ記す．さらに $|V_f| = |V_r| = |V|$ と仮定する．

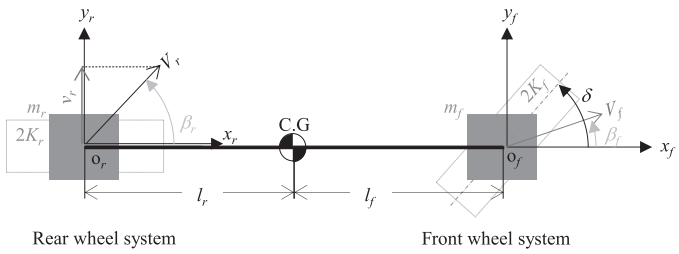



Fig. 5 Causal model; the body is expressed by two particles on the front and rear wheels. Planar 2 D.O.F motion is represented by two of $\beta_f$, $\beta_r$ and $r$.

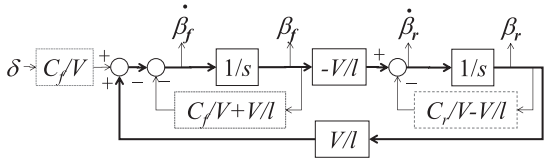



Fig. 6 Block diagram of causal model described with $\beta_f$ and $\beta_r$; the two integrals are located in series.

ここで $m_f$ と $m_r$ は，図 3 の重心位置および車両質量との整合のため，それぞれ次式で規定される．

$$m_f = \frac{l_r}{l} m \tag{15}$$

[DOI: 10.1299/transjsme.18-00014]
© 2018 The Japan Society of Mechanical Engineers

$$m_r = \frac{l_f}{l} m \tag{16}$$

よって，ヨー慣性モーメント $I_z$ は次式で表される．

$$I_Z = m_f l_f^{\ 2} + m_r l_r^{\ 2} = \frac{(l_f + l_r) l_f l_r}{l} m = l_f l_r m \tag{17}$$

したがって図 5 のモデルでは $I_z/(ml_f l_r)=1$ である．実車の $I_z/(ml_f l_r)$の値の測定結果の平均値は 0.98，標準偏差は 0.15 であったとの報告（北浜，酒井，1999）があるので，本論文の仮定はこの分布範囲内にある．

図 5 のモデルを，$\beta_f$ と $\beta_r$，$r$ のうちの 2 変数を用いて記述すると，運動方程式が直列構造になるとされる．したがって $\beta$ は用いない． そこで，式(10)，(11)から $r$ を消去することによって，$\beta$ を表すと，

$$\beta = \frac{l_r \beta_f + l_f \beta_r}{l} \tag{18}$$

となる．この式には，自明の関係として

$$\dot{\beta} = \frac{l_r \dot{\beta}_f + l_f \dot{\beta}_r}{l} \tag{19}$$

もある．式(15)~(19)を式(6)～(11)に代入して，前後輪それぞれの位置の横加速度 $a_f$，$a_r$ について整理すると，次式が得られる．

$$m_f a_f = m_f V(r + \dot{\beta}_f) = -2K_f(\beta_f - \delta) \tag{20}$$

$$m_r a_r = m_r V(r + \dot{\beta}_r) = -2K_r \beta_r \tag{21}$$

これらの式は，図 5 のモデルにおける「運動の第 2 法則」（質量×加速度=力）に相当し，前輪について $m_f a_f=2F_f$，後輪について $m_r a_r=2F_r$ を意味する（酒井，2013）．なお，式(17)より，前輪位置に力を加えたときの衝撃の中心（加速度が 0 の位置）は後輪位置にあり，後輪位置に力を加えたときの衝撃の中心は前輪位置にある．そのため，式(20)には $2F_r$ が含まれず，式(21)には $2F_f$ が含まれない．

次に，式(10)，(11)から $\beta$ を消去することによって，$r$ を表すと，

$$r = \frac{V}{l}\beta_f - \frac{V}{l}\beta_r \tag{22}$$

となる．

式(20)～(22)が因果関係モデルである．因果関係モデルは，$\beta_f$ と $\beta_r$ と $r$ の 3 変数によって記述されている．このうち 2 変数によって運動を記述することができる．例えばヨー進み時定数の考察においては $r$ と $\beta_r$ との組合せが用いられた（酒井，2013）．

### 3・3　前後輪の運動を表すための因果関係モデル

本論文では，因果関係モデルの変数として，回「頭」（車両前部）と「リヤ」（後輪）による車両運動の表現（戸田，2008）に最も近いと思われる $\beta_f$ と $\beta_r$ との 2 変数を用いる．すなわち，車両前部の運動を表すための変数とし

[DOI: 10.1299/transjsme.18-00014]
© 2018 The Japan Society of Mechanical Engineers

て$\beta_f$を，後輪の運動を表すための変数として$\beta_r$を用いる．そこで$r$を消去するために，式(22)を式(20)～(21)に代入して整理すると

$$m_f\dot{\beta}_f = -m_f\left(\frac{C_f}{V}+\frac{V}{l}\right)\beta_f + m_f\frac{V}{l}\beta_r + m_f\frac{C_f}{V}\delta \tag{23}$$

$$m_r\dot{\beta}_r = -m_r\frac{V}{l}\beta_f - m_r\left(\frac{C_r}{V}-\frac{V}{l}\right)\beta_r \tag{24}$$

となる．ここで，自明の関係として

$$\beta_f = \int\dot{\beta}_f dt \tag{25}$$

$$\beta_r = \int\dot{\beta}_r dt \tag{26}$$

もある．なお，式(23)および式(24)において，標記を簡略化するために，それぞれ

$$C_f \equiv \frac{2K_f}{m_f} \tag{27}$$

$$C_r \equiv \frac{2K_r}{m_r} \tag{28}$$

と記した．$C_f$や$C_r$は(m/s$^2$)/rad または m/s$^2$の次元の等価コーナリング係数（酒井，2015）である．これらの目安は，$C_f$ ≒100，$C_r$ ≒200[(m/s$^2$)/rad]とされる（北浜，酒井，1999）．

因果関係モデルの構造を目で見るために，式(23)～(28)のブロック線図を図6に示す．2つの積分が直列に配置されているため，この運動方程式は直列構造である．その経路は，直進（初期条件0）から操舵して，$\beta_r$が生じるまでの間は，$\delta\rightarrow\dot{\beta}_f\rightarrow$積分→（$\beta_f$，$\dot{\beta}_r$）→積分→$\beta_r$だけなので，運動の発生順序がより明確になる．

次に応答指標を求める．式(23)～(26)の初期条件を全て0としてラプラス変換し，$\delta$に対する$r$の伝達関数を求めると

$$\frac{r}{\delta} = \frac{C_r}{l}\cdot\frac{\left(\frac{V}{C_r}s+1\right)\frac{C_r}{V}}{s^2+\frac{C_f+C_r}{V}s+\left[\frac{C_r}{l}-\frac{C_f}{l}\left(1-\frac{lC_r}{V^2}\right)\right]} \tag{29}$$

となる．この導出に際して，式(22)および式(27)，(28)の関係を用いた．また$s$はラプラス演算子である．この分母が0と等しいと置いた式が特性方程式になる．すなわち，

$$s^2+\frac{C_f+C_r}{V}s+\left[\frac{C_r}{l}-\frac{C_f}{l}\left(1-\frac{lC_r}{V^2}\right)\right]=0 \tag{30}$$

[DOI: 10.1299/transjsme.18-00014]
© 2018 The Japan Society of Mechanical Engineers

が特性方程式である．なお，特性方程式とは，入力 0 で運動する際に満たすべき条件式のことである．ここで，ヨー固有振動数を $\omega_n$，ヨー減衰比を $\zeta$ とそれぞれ記すと，式(30)の $s^0$ の項が $\omega_n^2$ に，$s^1$ の係数が $2\zeta\omega_n$ にそれぞれ相当する（中川他，1986）から，

$$\omega_n = \sqrt{\frac{C_r}{l} - \frac{C_f}{l}\left(1 - \frac{lC_r}{V^2}\right)} \tag{31}$$

$$\zeta\omega_n = \frac{C_f + C_r}{2V} \tag{32}$$

となる．ここで $\zeta\omega_n$ は速応性（安部，2012）を表す指標である．なお，式(29)の形式の式の分子の $s$ の係数は，進み時定数と呼ばれる．この伝達関数は $\delta$ に対する $r$ の伝達関数だから，この時定数はヨー進み時定数と呼ばれる．したがってヨー進み時定数を $T_r$ と記すと

$$T_r = \frac{V}{C_r} \tag{33}$$

である（酒井，2013）．

## 4. ヨー共振現象

### 4・1　車速についての仮定

図 6 に示されるブロック線図を図 2 の形式により近づけるため，まず図 6 中の赤点線のブロックを消去する．赤点線ブロックに対応するのは式(24)の $\beta_r$ の係数だから，その係数を 0 にする．よって，

$$\frac{V}{l} - \frac{C_r}{V} = 0 \tag{34}$$

と仮定する．この式が成立する $V$ は

$$V = \sqrt{lC_r} \tag{35}$$

である．以後，本論文はこの $V$ だけの場合だけを扱い，これ以外の $V$ は扱わない．$l$=2.5[m]，$C_r$=200[m/s$^2$]のとき $V$=22.4[m/s]（=80.5[km/h]），$\omega_n$=1/ $T_r$=8.94[rad/s]，$\zeta\omega_n$=6.71[1/s]である．なお $V$=55.6[m/s]( =200[km/h]）において $\omega_n$=6.82[rad/s]であり，これは本論文が対象とする $V$=22.4[m/s]のときの 0.763 倍であるから，他の車速でも，2〜3 割の誤差をもって，以後の考察が成立するものと思われる．

本論文が設定した車両モデルにおける仮定は，式(35)と式(17)の二つであり，これが本論文の副題を意味する．そこで以後，本論文では，「式(35)と式(17)が成立する場合」などの注釈を省略する．

### 4・2　操舵法

図 2 と図 6 との相違点の一つは，図 6 に緑点線や青点線のブロックがあることである（赤点線のブロックは前節で消去済である）．そこで，緑点線や青点線のブロックを消去するために，青点線のブロックに相当する式(23)右辺第 2 項と緑点線のブロックに相当する同第 3 項との和を 0 と仮定する．すなわち，

[DOI: 10.1299/transjsme.18-00014]
© 2018 The Japan Society of Mechanical Engineers

$$-\left(\frac{C_f}{V}+\frac{V}{l}\right)\beta_f+\frac{C_f}{V}\delta=0 \tag{36}$$

と仮定する．式(36)を変形すると

$$\delta=\frac{V}{C_f}\left(\frac{C_f}{V}+\frac{V}{l}\right)\beta_f=\left(1+\frac{1}{lC_f}\right)\beta_f \tag{37}$$

となる．そこで，式(37)による操舵を仮定する．

### 4・3　つり合いの位置を示唆する運動方程式

式(37)と式(35)を式(23)，(24)に代入すると，式(23)，(24)はそれぞれ

$$m_f\dot{\beta}_f=m_f\frac{V}{l}\beta_r \tag{38}$$

$$m_r\dot{\beta}_r=-m_r\frac{V}{l}\beta_f \tag{39}$$

となる．これらが共振中の運動方程式である．式(38)～(39)をブロック線図で表したものが，図 7 である．図 7 では，負号の位置を図 2 と合わせている．この運動方程式は，周期的運動を表し，その角周波数は $\omega_n$ である．また，振幅は減衰せずに一定振幅で振動（スラローム）することを意味する（ただし $\beta_f$ か $\beta_r$ のうち，少なくとも一つの初期条件は 0 でないものとする）．なお，このスラロームの角周波数が $\omega_n$ であることの説明を付録 A1 に，スラロームが減衰しないことの説明を付録 A2 に記した．

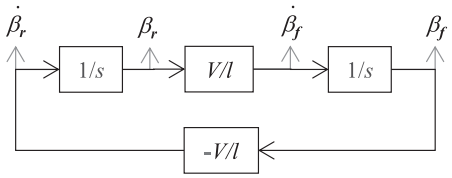



Fig. 7 Block diagram of the causal model under assumptions of eq.(17),(35) and (37).

次に，$\omega=\omega_n$ のスラローム性質を考察する．式(23)～(24)の初期条件を全て 0 として，ラプラス変換し，$\delta$ に対する $\beta_f$ や $\beta_r$ の伝達関数を求め，さらに $s=j\omega_n$ を代入すると次式になる（$s$ はラプラス演算子である）．

$$\beta_f(\omega_n)=\frac{C_f}{C_f+C_r}\delta(\omega_n) \tag{40}$$

$$\beta_r(\omega_n)=-j\frac{C_f}{C_f+C_r}\delta(\omega_n) \tag{41}$$

したがって，両者の振幅は等しく，その位相差は-$\pi$[rad]である．-$\pi$[rad]なる位相差は，$\omega_n=V/l$，$s=j\omega_n$ であることに留意すると，図 7 と整合する．また $\delta$ は，式(37)のように操舵されているから，$\beta_f$ との位相差がない．したがって，式(8)から $\delta$ と $2F_f$ も同位相である．

上記と同様に，前後輪の地面に対する横変位 $Y_f(\omega_n)$，$Y_r(\omega_n)$を，それぞれ前後輪位置横加速度の 2 階積分であることを用いて求めると，それぞれ次式で表される．

[DOI: 10.1299/transjsme.18-00014]
© 2018 The Japan Society of Mechanical Engineers

$$Y_f(\omega_n) = \frac{V(j\omega_n\beta_f + r)}{(j\omega_n)^2} = -\frac{C_f l}{C_f + C_r}\delta(\omega_n) \tag{42}$$

$$Y_r(\omega_n) = \frac{V(j\omega_n\beta_r + r)}{(j\omega_n)^2} = j\frac{C_f l}{C_f + C_r}\delta(\omega_n) \tag{43}$$

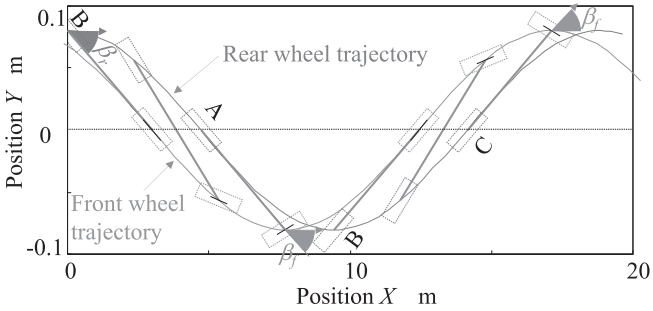



Fig. 8 Trajectories of wheels under the yaw natural frequency ($C_f$=100, $C_r$=200[m/s$^2$], $l$=2.5[m], $V$=$(lC_r)^{1/2}$=22.4[m/s], $\omega_n$=8.94[rad/s](1.42[Hz]), $I_z/l_f l_r m$=1)

ここで $Y_f = jY_r$ だから，前後輪の位置の振幅は等しく，その位相差は $\pi$[rad]である．したがって $\delta$ と $\beta_f$，$2F_f$，$Y_f$ とは同位相である．$Y_f(\omega_n)$と $Y_r(\omega_n)$をプロットしたものが図 8 である．なお図 8 は，式(20)～(28), (35), (37)に，ある初期値を与えて計算されたものである．

### 4・4　ヨー共振モード

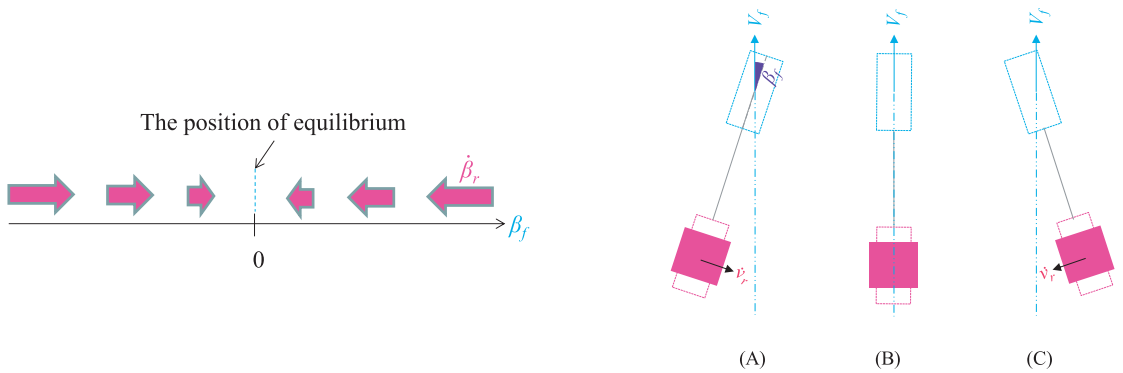
本節では，つり合いの位置と，そこに向かって加速するものが何かを求める．共振中の運動方程式である式(38)と式(39)のうち，式(1),(2)に準じた式に該当するのは，負号を含む式(39)である．したがって式(39)が，ヨー共振モードを内包する運動方程式である．ただし，この式には，式(1)とは違って，微分次数の違いを除いても 2 種類の文字変数（$\beta_f$，$\beta_r$）があるので，これらの文字変数の関係を表す補助方程式が式(38)であると解釈する．

式(39)と式(1)の右辺どうしを比較すると，$\ddot{\theta}$ に $\dot{\beta}_r$ が対応し，$\theta$ に $\beta_f$ が対応する．したがって振り子のつり合い位置 $\theta$=0 に対応する，ヨー共振のつり合いの位置は，

$$\beta_f = 0 \tag{44}$$

である．次に式(39)と式(1)の左辺どうしを比較すると，$ML$ に $m_r$ が対応するから，つり合いの位置に向かって加速する物体は $m_r$，すなわち後輪である．したがって，ヨー共振とは，つり合いの位置 $\beta_f$=0 に向かって後輪が加速する現象である．この概念図を図 9(A)に示す．なお，ヨー共振の次元（単位）についての考察を付録 A3 に記した．

[DOI: 10.1299/transjsme.18-00014]
© 2018 The Japan Society of Mechanical Engineers




(A)Concept (B) Physical meaning

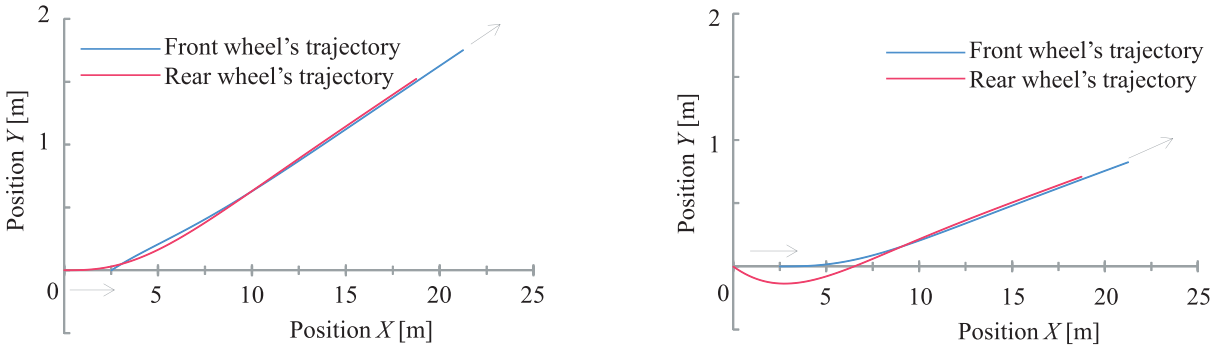
Fig. 9 Mode of yaw resonance ; the deviation from the position of equilibrium $\beta_f$=0 means the distance from the extended line of $V_f$ to the rear wheel system.

次に式(44)によって表されるつり合いの位置の意味をさらに具体的に考える．$\beta_f$は，図 5 に示したように，前輪位置の車速ベクトル $V_f$が $x$ 軸となす角である．そこで，$\beta_f$の代わりに $V_f$に注目する．$V_f$の向きを基準に，$\beta_f$が正，0，負の状態を図示したものが図 9(B)である．$\beta_f$=0 にあるのが図 9(B)における(B)であり，これはつり合いの位置である．このとき，つり合いの位置に向かって加速するべき後輪が $V_f$の延長線上にある．そこで，$V_f$の延長線をつり合いの位置と解釈する．したがって，ヨー共振とは，「$V_f$の延長線上に向かって後輪が加速する現象」であると考えることもできる．ここで $V_f$は前輪の進行方向であるから，直観的に言えば，ヨー共振とは「前輪の（進行方向）後方に後輪が回りこむ現象」あるいは「前輪（の車速ベクトル）に後輪が追従しようとする現象」である．なお，図 9(B)中の(A),(B),(C)に対応する図 8 中の車両の位置はそれぞれ A,B,C である．

### 4・5　前輪位置車速ベクトルへの後輪の追従現象

「前輪（の車速ベクトル）に後輪が追従しようとする現象」を確認するため，本節では $\delta$=0 として，$\beta_f$か $\beta_r$に初期値を与えた場合の運動を考察する．この場合 $\delta$=0 とすることにより，式(37)も図 7 も成立しないため，減衰が生じて，最後は直進になる．本節は，直進にいたる過程における前後輪の軌跡に注目する．

前節で述べたように後輪は $V_f$の延長線に向かって加速する．$V_f$は，地上固定座標系では前輪の軌跡の接線だから，前後輪の軌跡によっても $V_f$と $V_r$との関係を考察できる．そこで，前後輪の軌跡を図 10 に示す．図 10 は，地上に固定された直交座標系 O-$X$-$Y$ の $X$ 軸上を進行する車両の後輪の位置が $X$=0 のときに，$\beta_f$または $\beta_r$に初期値を与えたときの軌跡である．




(A)Initial conditions are $\beta_f$=0.1 and $\beta_r$=0 [rad] (B) Initial conditions are $\beta_f$=0 and $\beta_r$= - 0.1[rad]

Fig. 10 Trajectories under free oscillations; the rear wheel system follows the trajectory of the front wheel ($C_f$=100, $C_r$ =200[m/s$^2$], $l$=2.5[m], $V$=($lC_r$)$^{1/2}$=22.4[m/s], $I_z/l_f l_r m$=1, $\delta$=0).

図 10(A)における初期値は $\beta_f$=0.1，$\beta_r$=0[rad]である．この初期条件は，前輪は $X$ 軸に対して 0.1[rad]の進路角で進み，後輪は $X$ 軸上を進むことを意味する．前輪は，終始，初期条件の進路角をほぼ維持するのに対して，後輪は $X$ 軸の方向に進んだ後，左旋回し，最終的に前輪とほぼ同じ軌跡になる．これが，「前輪（の車速ベクトル）

[DOI: 10.1299/transjsme.18-00014]
© 2018 The Japan Society of Mechanical Engineers

に後輪が追従しようとする現象」の発露であると思われる．この場合，初期状態から最終状態までの間で，前輪の進路変化よりも後輪の進路変化のほうが，初期条件の進路角差である 0.1[rad]だけ大きい．したがって，「前輪（の車速ベクトル）に後輪が追従しようとする現象」とは，前輪の軌跡よりも後輪の軌跡の進路変化が大きい現象と考えることもできる．

図 10(B)における初期値は $\beta_f$=0，$\beta_r$= - 0.1[rad]である．この初期条件は，前輪は $X$ 軸上を進み，後輪は $X$ 軸に対して- 0.1[rad]の進路角で進むことを意味する．初期条件を与えると，前輪も後輪も左旋回し，最終的にはほぼ同一の軌跡になる．よって，初期条件の進路角の分だけ，前輪よりも後輪のほうが軌跡の進路角変化が大きい．したがって，これもまた「前輪（の車速ベクトル）に後輪が追従しようとする現象」の発露であると思われる．

## 5. 車両運動モードとドライバの感覚との関係の考察

諸言で述べたように「①ドライバが述べる各段階の動き方を理解し，②それらに対応する応答指標の選定を可能にする」ことが本論文の目的である．そこで，この章では①と②について考察する．

### 5・1　操舵過渡応答におけるモードの発生順序

この節では，「①ドライバが述べる各段階の動き方」として，操舵後まずヨー進み時定数モードが生じ，その後ヨー共振モードが生じることを，ステップ入力を例に述べる．

直進からの舵角ステップ入力時の時刻歴応答を図 11 に，前後輪の軌跡を図 12(A)にそれぞれ示す．図 12(A)に示されるように，操舵後，前輪はただちに旋回するのに対して，後輪は数 m の間，ほぼ直進する．このときの車両の運動を，$X$ 軸上を直進し続ける架空の車両から観測すると，図 12(B)のように後輪を中心に回転するように見える．この後輪まわりの回転運動がヨー進み時定数のモードであると指摘されている（酒井，2013）．

ここで，ヨー進み時定数について，ヨー角速度 $r$ も記されたブロック線図である図 13 を用いて述べる（図 13 は式(22)～(28)から導出される）．式(29)から，$\delta$ に対する $r$ の伝達関数 $r/\delta$ は 1 次進み／2 次遅れ系であるが，これは，図 13 において $r$ が第 2 積分の前にあることに対応する．一方，$\beta_r$ は第 2 積分の後にあるので，$\delta$ に対して $\beta_r$ の伝達関数 $\beta_r/\delta$ は 0 次進み／2 次遅れ系になる．よって，$r$ に対する $\beta_r$ の伝達関数 $\beta_r/r$ は 1 次遅れ系になる．この時定数は第 2 積分直下のブロックである $C_r/V$ の逆数によって表されるので，$V/C_r$ がヨー進み時定数 $T_r$ になる（この結果は式(33)と一致する）．したがって $T_r$ は，$r$ が生じてから $\beta_r$ が生じるまでの時間差の目安と考えることができる．

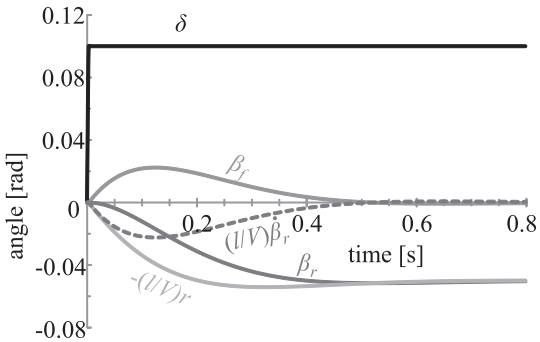



Fig.11 Time history of indicial response ($C_f$=100, $C_r$ =200[m/s$^2$], $l$=3[m], $V$=($lC_r$)=24.5[m/s], $I_z/l_fl_rm$=1, $\delta$=0). This figure implies $r$=-$\dot{\beta}_r$ and $\beta_r$=0 around t=0. This motion is shown in fig.12.

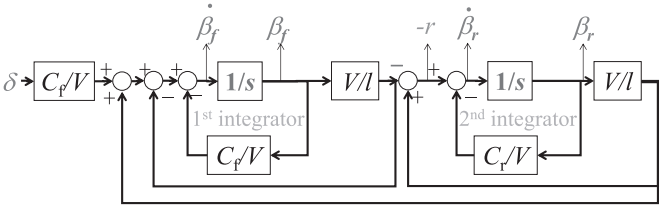
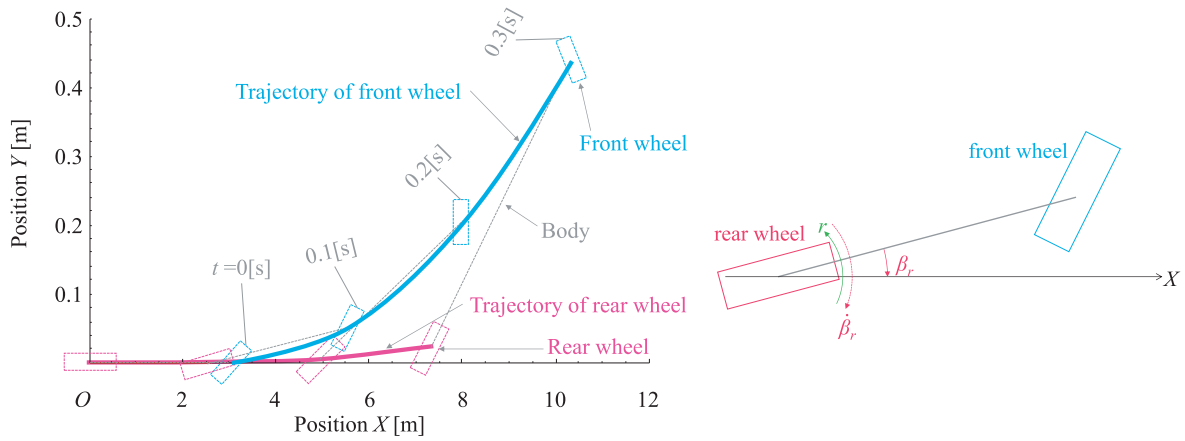



Fig.13 Block diagram within $r$. In this figure, a reciprocal number of $C_r/V$ below the second integrator means yaw lead time constant $T_r$.

[DOI: 10.1299/transjsme.18-00014]
© 2018 The Japan Society of Mechanical Engineers




(A) Trajectory of rear wheel under indicial response　　(B) Planar motion mode around $t$=0

Fig. 12 Mode of lead time constant of yaw angular velocity: Motion mode immediately after steering from straight ahead is shown in this figure (Sakai, 2013). ($C_f$=100, $C_r$=200[m/s$^2$], $l$=3[m], $V$=($lC_r$)=24.5[m/s], $I_z/I_fI_r m$=1, $\delta$=0.1[rad]).

次に，ヨー進み時定数のモードについて述べる．まず初期条件として直進からのステップ操舵を想定し，$\dot{\beta}_f=\beta_f=r=\dot{\beta}_r=\beta_r=0$ とする．この状態からステップ操舵すると，図 13 から，まず $\dot{\beta}_f$ が生じる．その後，$\dot{\beta}_f$ が積分されることによって $\beta_f$ と $r$，$\dot{\beta}_r$ が同時に生じる．さらにその後，$\dot{\beta}_r$ が積分されることによって $\beta_r$ が生じる．この，$r$ が生じてから $\beta_r$ が生じるまでの時間差の目安が $T_r$ である．ここでは $r$ が生じた後 $T_r$ [s]以内を対象として，$r\neq 0$ かつ $\beta_r=0$ とみなせる段階を想定する．この段階では式(9)から，$2F_r=0$ である．したがって式(21)から $a_y=0$ になるので「後輪は直進する」．一方，$\beta_r=0$ のとき図 13 から $r=-\dot{\beta}_r$ となる（図 11 でも，$t$=0 付近で $r=-\dot{\beta}_r$ であることが確認できる）ので「車両は回転する」．よって，$r$ が生じた後，概ね $T_r$ [s]以内は「直進する後輪まわりに車両は回転する」．これがヨー進み時定数モードであると指摘されている（酒井，2013）．これを本論文では操舵過渡応答の第 1 段階とみなす．

ヨー進み時定数モードが生じた後の車両運動について考察する．図 13 から，$r$ や $\dot{\beta}_r$ は $\beta_f$ に起因して生じる．したがって，ヨー進みモードが生じるとき，$\beta_f$ も生じている（このことは図 11 でも確認できる．また，図 12(A)中の $t$=0.1[s]では，前輪の軌跡と車両中心線との成す角度 $\beta_f$ が生じていることからも確認できる）．したがって，図 9(B)中の(B)のように直進時は後輪上にあったつり合いの位置は，ヨー進み時定数モードと同時に発生する $\beta_f$ によって，同(A)や(C)のように，後輪上から離れていく．つり合いの位置が後輪から離れることによって，後輪をつり合い位置に戻そうとするヨー共振モードが励起される．したがって，「直進する後輪まわりの車両の回転」を止めようとするのがヨー共振モードである．別の表現をすれば，操舵直後，図 12（A）に示されるように，操舵と同時に前輪は旋回するのに対して後輪は直進することによって軌跡差が生じるが，図 10(A)に示されるように，この軌跡差を後輪が解消しようとするのがヨー共振モードでもある．このヨー共振モードが操舵過渡応答の第 2 段階である．

以上のように，操舵すると，第 1 段階としてヨー進み時定数モードによって後輪がつり合いの位置から離れ，その結果，第 2 段階として，後輪をつり合いの位置に戻そうとするヨー共振モードが励起される．これがモードの発生順序である．

### 5・2　ヨー共振モードとドライバの官能表現との対応

前節で考察した，「①ドライバが述べる各段階の動き方」を受けて，本節では「②それらに対応する応答指標の選定」について考察する．

#### 5・2・1　リヤの追従性

本項では，「回頭性」，「リヤの安定性」，「リヤの追従性」（戸田，2008）の 3 表現とヨー共振現象との関係を考察する．

[DOI: 10.1299/transjsme.18-00014]
© 2018 The Japan Society of Mechanical Engineers

操舵過渡応答の現象についての説明を複数のテストドライバから著者が受けた経験では，「回頭性」とは，操舵直後の前輪やフードの向きの変化の大きさとのことであった．「回頭性」は，ドライバにほぼ共通した用語であった．また「リヤの安定性」とは回頭直後，後輪が旋回を素早く開始する感覚とのことであった．「リヤの安定性」はドライバによって表現が異なり，「リヤタイヤがしっかり踏ん張る」「リヤタイヤの上に自分が乗って軽いノーズを振り回している感じ」（熊倉，2017），「リヤタイヤが接地する」（三浦，2017），「フロントが曲がり始めるとリヤまで一体に曲がり始める」「（フロントの曲がり始めとリヤの曲がり始めに）タイムラグがない」（島下，2014）「リヤがグリップする」「リヤのコーナリングフォースがすぐに立ち上がる」「リヤに剛性感がある」「自転せずに公転する」（酒井，2015b）も同義語であると思われる．「リヤの追従性」とは，より正確には「前輪の動きに対する後輪の追従性」であり，「リヤの安定性」の後の現象であった．この感覚はヨー進み時定数 $T_r$ が小さいほど良好であると指摘されている（酒井，2015b）．「リヤの追従性」は，ドライバにほぼ共通した用語であった．

「前輪の動きに対する後輪の追従」とは，図 12(A)において前後輪の軌跡差が生じた後，図 10 直下の段落で述べたように，前輪の軌跡を「後輪が追いかける」現象に対応すると思われる．この現象はヨー共振現象に起因するから，「リヤの追従性」がヨー共振現象に概ね対応すると思われる．したがって，ヨー固有振動数かヨー減衰比が大きいほど，リヤの追従性をより大きく感じられると思われる．

以上のことから，3 表現を時系列順に並べると，操舵→「回頭性」→「リヤの安定性」→「リヤの追従性」（≒ヨー共振現象）となる．したがって，ヨー固有振動数やヨー減衰比に直接対応する現象は 3 表現の中では最も遅い段階の現象であると思われる．

#### 5・2・2　ヨー共振モード自体の直接知覚

舵角インパルス的な操舵をした後に「フロントを軸にして振り子のようにリヤが動く」現象が示唆された例がある（土屋，服部，2017）．「フロントを軸にして振り子のようにリヤが動く」は図 9(B)中の(A)～(C)に対応するので，ヨー共振モード自体が直接知覚されることもあるように思われる．したがって，振り子のような運動の周波数の高さがヨー固有振動数の高さに対応し，揺返しの少なさやリヤの動きにくさがヨー減衰比の大きさに対応するものと思われる．

#### 5・2・3　注意点

以上，ドライバの用いる用語と応答指標との関係について述べたが，用語が統一されていないので，上記の対応関係には誤差が含まれる可能性がある．ただし，これらの対応関係を，言わば「初期値」としてドライバにインタビューをしながら「修正」を繰り返すことによって，より正確な現象理解に到達できると思われる．

## 6.　結　　言

本論文は，①ドライバの説明する操舵過渡応答の現象をエンジニアがより具体的に理解し，②それに対応する応答指標を選定できるようにするためにヨー共振について考察した．その主な結果は次のとおりである．

1）ヨー共振のつり合いの位置は，前輪位置の車速ベクトルの延長線上にあり，この線に向かって後輪が加速する現象がヨー共振現象である．

2）操舵すると，最初にヨー進み時定数のモードによって後輪がつり合い位置から離れ，これに起因して後輪をつり合い位置に戻そうとするヨー共振モードが励起され，定常状態に至る．したがって，応答指標が顕在化するのは，ヨー進み時定数→ヨー固有振動数や減衰比の順である．このように，操舵後の時間帯による応答指標の使い分けが可能になったと思われる．

3）ヨー共振現象に対応する官能表現は「リヤの追従性」や「フロントを軸にしてリヤが振り子のように動く」であると思われる．これらの対応関係を，言わば「初期値」としてドライバと会話しながら，「修正」を繰り返すことによって，ドライバの感じた現象をエンジニアがより正確に理解できると思われる．

以上の結果，緒言において著者が提案した「感性性能向上のための車両過渡応答開発のあるべきプロセス」の一部が実行可能になったものと思われる．ただし，本研究は特定の車速やヨー慣性モーメントを想定した平面 2

[DOI: 10.1299/transjsme.18-00014]
© 2018 The Japan Society of Mechanical Engineers

自由度運動についてのものである．さらに，ドライバはロールやピッチからも旋回感覚を得ることが指摘されている（酒井，山本，2012）．したがって本論文の結果可能になったのは，あるべきプロセスの一部であって，全部ではないことも記しておく．

ドライバの感性により合った操舵応答の開発に本論文が少しでも貢献できれば幸いである．

## 文　　献


安部正人，自動車の運動と制御:車両運動力学の理論形成と応用(2012), pp.50-169.

入江南海雄，芝端康二，リヤサスペンション特性が操縦安定に及ぼす影響，自動車技術，Vol.39，No.3(1985), pp.275-285.

日本機械学会，制御工学 (2002)，p.37.

北浜謙一，酒井英樹，正規化したコーナリングパワーを用いた自動車の操舵応答性能の同定法，日本機械学会論文集 C 編, Vol.65, No.633(1999), pp.1960-1965.

古平貴大，大木幹志，久代育生，勝山悦生，酒井英樹，村岸裕治，福井勝彦，小野英一，人間の感受性に基づく車両過渡応答，自動車技術会学術講演前刷集，No.148-07(2007)，pp.13-18.

熊倉重春，BMW-i3 試乗インプレッション(online)，available from < https://youtu.be/lhD2R-uUQ6Q?t=140 >, (参照日 2017 年 12 月 16 日)．

松本豊，「走る・曲がる・止まる」基本性能を車との対話で作り込む，自動車技術，Vol.59, No.9(2005), p.70.

三浦健光，カローラフィルダー試乗インプレッション (online)，available from < https://youtu.be/9DH8_5DxpVY?t=105 >, (参照日　2017 年 12 月 16 日)．

中川憲治，室津義定，岩壺卓三，工業振動学 第 2 版，森北出版(1986)，pp.6-76.

酒井英樹，自動車の平面運動におけるヨー角速度進み時定数についての力学的考察，日本機械学会論文集 C 編, Vol.79, No.801(2013), pp.1681-1692.

酒井英樹，フォースコントロール下の固有振動数についての一考察，日本機械学会論文集, Vol.81, No.824(2015a), DOI：10.1299/transjsme.14-00663.

酒井英樹，自動車運動力学-気持ちよいハンドリングのしくみと設計-(2015b)，pp.108-123.

酒井英樹，山本 泰，過渡的な旋回感覚を強調する減衰力制御—カルマンフィルタを用いたロール・ピッチ同期化制御—，自動車技術会論文集，Vol.45，No.3(2012)，pp.709-716.

篠倉弘幸，操安性開発テストドライバ，自動車技術，Vol.63, No.9(2009), p.108.

島下泰久，Vitz RSG's 試乗インプレッション (online)(2014)，available from < https://youtu.be/iuSLxmvIU7E?t=113 >, (参照日　2018 年 4 月 1 日)．

戸田治宏，トヨタ・クラウン，Driver, 八重洲出版，No.4-5(2008)，pp.10-13.

土屋圭市，服部尚樹，マツダ AZ-1 登場!!K スポーツ頂上決戦，Best motoring (online)，available from < https://youtu.be/1jUbZy2qbZA?t=233>, (参照日　2017 年 12 月 16 日)．


## References


Abe, M., Automotive vehicle dynamics: Theory and applications (2012), pp.50-169 (in Japanese).

Irie, N. and Shibahata, Y., Improvement of vehicle controllability and stability by rear suspension, Journal of Society of Automotive Engineers of Japan, Vol.39, No.3(1985), pp.275-285 (in Japanese).

JSME, Control engineering (2002), p.37 (in Japanese).

Kitahama, K. and Sakai, H., Identification method of automobile response to steering input using normalized cornering stiffness, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, Vol.65, No. 633(1999), pp.1960-1965 (in Japanese).

Kodaira, T., Ooki, M., Kushiro, I., Sakai, H., Muragishi, Y., Fukui, K. and Ono, E., Vehicle Transient Response Based on Human Sensitivity, Proceedings of JSAE annual congress(2007), pp.13-18.

Kumakura, S., BMW-i3 (online), available from < https://youtu.be/lhD2R-uUQ6Q?t=140 >, (accessed on 16 December, 2017) (in Japanese).


[DOI: 10.1299/transjsme.18-00014]
© 2018 The Japan Society of Mechanical Engineers

Matsumoto, Y.,'Hashiru,magaru,tomaru'kihonseinou wo kuruma tonotaiwade tsukurikomu, Journal of Society of Automotive Engineers of Japan, Vol.59, No.9(2005), p.70(in Japanese).
Miura, K., Corolla Fielder sijyou inpuresshon(online), available from < https://youtu.be/9DH8_5DxpVY?t=105 >, (accessed on 16 December, 2017) (in Japanese).
Nakagawa, K., Murotsu, Y. and Iwatsubo, T., Kougyou shindougaku dainihan, Morikita publishing(1986), pp.6-76.
Sakai, H., A physical interpretation of lead time constant of yaw angular velocity in planar motion of automobile, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, Vol.79, No. 801(2013), pp.1681-1692 (in Japanese).
Sakai, H., A consideration to natural frequencies under force control, Transactions of the JSME (in Japanese), Vol.81, No. 824(2015), DOI：10.1299/transjsme.14-00663.
Sakai, H, Automotive vehicle dynamics (2015b), pp.108-123.
Sakai, H. and Yamamoto, Y., Damping control to enhance transient cornering feel - Control to synchronize pitching with rolling utilized Kalman filter -, Transactions of Society of Automotive Engineers of Japan, Vol.43, No.3 (2012), pp.709–716 (in Japanese).
Shinokura, H., Souansei kaihatsu tesuto doraiba, Journal of Society of Automotive Engineers of Japan, Vol.63, No.9(2009), p.108(in Japanese).
Shimashita, Y., Vitz RS G's sijyou inpuresshon(online)(2014), available from < https://youtu.be/iuSLxmvIU7E?t=113>, (accessed on 1 April, 2018) (in Japanese).
Toda, H., Toyota Crown, Driver, Yaesu publishing, No.4-5 (2008), pp.10-13(in Japanese).
Tsuchiya, K. and Hattori, N., Entry car MAZDA AZ-1, SUZUKI Cappuccino, Best motoring (online), available from < https://youtu.be/1jUbZy2qbZA?t=233>, (accessed on 16 December, 2017) (in Japanese).

## 付録 A.1　固有振動数

本節では，式(38)，(39)によるスラロームの角周波数がヨー固有振動数であることを確認する．

式(2)の固有振動数の 2 乗は $g/L$ であり（中川他，1986），これは，負号を除いた右辺の係数に対応する．したがって式(A3)の右辺の負号を除いた係数である$(V/l)^2$がヨー固有振動数のはずである．そこで，これを確認する．$(V/l)^2$に式(35)を代入すると，

$$\left(\frac{V}{l}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{lC_r}\right)^2}{l^2} = \frac{C_r}{l} \tag{A1}$$

となる．一方，式(31)に式(35)を代入すると

$$\omega_n{}^2 = \frac{C_r}{l} \tag{A2}$$

となる．よって式(A1)と式(A2)との比較から，式(35)の $V$ において

$$\left(\frac{V}{l}\right)^2 = \omega_n{}^2 \tag{A3}$$

となる．このように，式(35)の $V$ において $V/l$ がヨー固有振動数である．したがって式(38)，(39)によるスラロームの角周波数は $\omega_n$ であることが確認できる．

[DOI: 10.1299/transjsme.18-00014]
© 2018 The Japan Society of Mechanical Engineers

### 付録 A.2　持続振動

ここでは，図 7 に示されるブロック線図がヨー固有振動数におけるスラローム（持続振動）を表すことを述べる．

図 7 のブロック線図は閉ループである．これを $\dot{\beta}_r$ の箇所で切断し，開ループとすると，$\dot{\beta}_r$ から $\dot{\beta}_r$ までの開ループ伝達関数は

$$-\left(\frac{V}{l}\right)^2 \frac{1}{s^2} \tag{A4}$$

となる．これが一巡伝達関数である．1 から一巡伝達関数を引いた項が 0 に等しいとした式が閉ループの特性方程式になる（日本機械学会，2002）ので，

$$1+\left(\frac{V}{l}\right)^2 \frac{1}{s^2} = 0 \tag{A5}$$

が図 7 の特性方程式である．この式を整理すると

$$s^2 + \left(\frac{V}{l}\right)^2 = 0 \tag{A6}$$

となる．この式には，減衰項である $s^1$ の項が存在しないから，図 7 のブロック線図は持続振動を意味する．この式の $s^0$ の項が固有振動数の 2 乗に相当するので，この持続振動の固有振動数は $V/l$ [rad/s]であり，$V/l$ とは，式(A3)に示されるように $\omega_n$ である．したがって図 7 のブロック線図はヨー固有振動数によるスラロームを意味する．

### 付録 A.3　運動方程式の次元

振り子の共振を表す式(2)とヨー共振を表す式(39)は，どちらも回転運動なのに，両者の係数や変数の次元は異なる．そこで本節では，式(39)の次元が式(2)の次元に変換できることを述べる．図 5 に示したように，後輪の速度ベクトルが $V_r$，その $y$ 軸方向の速度成分が $v_r$ である．よって，$v_r=V_r \sin\beta_r \fallingdotseq V_r\beta_r$ だから，これを微分すると，

$$\dot{v}_r = V_r \dot{\beta}_r \tag{A7}$$

となる．ここで仮定から $|V_r|=|V|$だから，$V$ を本編同様スカラー量として扱えば，上の式は

$$\dot{\beta}_r = \frac{\dot{v}_r}{V} \tag{A8}$$

と書ける．これらの関係を使うと式(39)は

$$\frac{\dot{v}_r}{l} = -\left(\frac{V}{l}\right)^2 \beta_f \tag{A9}$$

と書ける．この式の左辺は角加速度の次元であるから，式(2)の左辺の次元と一致する．また，上式右辺の$(V/l)^2$ の次元は $1/s^2$ であり，式(2)の $g/L$ の次元と等しい．さらに，上式右辺の $\beta_f$ の次元は式(2)の $\theta$ と同様に角度である．よって，式(39)と式(2)の次元は一致する．したがって，ヨー共振とは，振り子と同様に，つり合いの位置に向かって質点が加速する現象であることが確認できる．

[DOI: 10.1299/transjsme.18-00014]
© 2018 The Japan Society of Mechanical Engineers