# 重要象限サンプリング法に基づく構造信頼解析法の研究

奥田　昇也*

# A study of structural reliability analysis based on an important quadrant sampling method

Shoya OKUDA

This study describes an "important quadrants sampling method" for the simulation-based estimation of structural failure probability.　In the first stage, generating real samples iteratively in arbitrary quadrants of the basic variable space and applying the previously proposed "inter-quadrant relational expression," the coordinates of the real sample points generated are transformed to those of pseudo sample points over the all quadrants.　Among the all quadrants, several quadrants whose coordinates of pseudo sample points judged to contribute to the estimation of structural failure probability, are determined as the "important quadrants. " In the second stage, the estimation of the failure probability of structural system based on the directional simulation is executed by using the pseudo samples transformed in the important quadrants transformed from real samples generated in the arbitrary quadrants.　Numerical examples show that the proposed method gives effectively accurate estimations of structural failure probabilities.

***Key Words:*** Structural failure probability, Simulation based reliability analysis, Directional simulation, Quadrant sampling

## 1.　緒　　言

シミュレーションに基づく構造破損確率推定のサンプリング法として、前報[(1)]では、基本確率変数の確率密度関数に従う実サンプルが、任意の象限において１個生成される度に、「象限間関係式」[(2)]を用いて、実サンプル点に対応する疑似サンプル点を、実サンプル点の象限以外の全象限内に変換・生成する「全象限サンプリング法」を提案した。

本研究では、「全象限サンプリング法」によって、全象限に変換・生成された実サンプル、疑似サンプル点の象限の中で、原点から各サンプル点を通る直線の限界状態曲面までの距離を判別基準として、ある基準値以下である象限を、構造破損確率の推定量に寄与すると考えられる『重要象限』として決定し、実サンプルが、ある象限において生成される度に、「象限間関係式」を用いて、実サンプル点に対応する疑似サンプル点をすべて、決定された『重要象限』へ変換・生成してサンプリングの効率化を図って、方向シミュレーションに基づく構造破損確率の推定を実行する方法を提案する。

具体的には、方向シミュレーションのサンプリングにおいて生成される実サンプルが、『重要象限』に生成された場合は、そのまま方向シミュレーションを実行する一方、サンプリングにおいて生成された実サンプルが、『重要象限』に生成されない場合、「象限間関係式」を適用して、当該実サンプルに対応する疑似サンプルを『重要象限』へ変換・生成し、『重要象限』内で、構造破損確率の推定を実行する。この手順を『重要象限サンプリング法』として提案し、数値計算例によって、この『重要象限サンプリング法』の有効性を検討する。

＊ 近畿大学工業高等専門学校
総合システム工学科　　機械システムコース

## 2.　方向シミュレーションに基づく構造破損確率の推定[(6)]

まず、方向シミュレーションに基づく構造破損確率推定の手順を示し、次に、提案手法である『重要象限サンプリング法』について述べる。

構造システムの状態を表す限界状態関数を記述する基本確率変数 $\boldsymbol{u}$ は、標準正規確率密度関数 $f_U(\boldsymbol{u})$ に従う $k$ 次元正規確率変数であり、互いに独立で、時間に依存しないものとする。この基本確率変数 $\boldsymbol{u}=(u_1, u_2, ..., u_k)$ を動径 $r$ と方向ベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, ..., a_k)$ の積 $\boldsymbol{u}= r \cdot \boldsymbol{a}$ で表す。ここで、$a_1, a_2, ..., a_k$ は、$u_1, u_2, ..., u_k$ 軸に対する方向余弦である。動径 $r$ と方向ベクトル $\boldsymbol{a}$ の結合確率密度関数を $f_{RA}(r \cdot \boldsymbol{a})$ とすると、構造破損確率[(5)]は、次のように表される。

$$P_f = \int_{all\ \boldsymbol{u}} \mathrm{I}_{D_f}(\boldsymbol{u}) f_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{u}) d\boldsymbol{u}$$
$$= \int_{\boldsymbol{a}\in\Omega_k} \int_0^\infty \mathrm{I}_{D_f}(r\cdot\boldsymbol{a}) r^{k-1} f_{R\mathbf{A}}(r\cdot\boldsymbol{a}) dr d\boldsymbol{a} \qquad (1)$$
$$= \int_{\boldsymbol{a}\in\Omega_k} \left\{ \int_0^\infty \mathrm{I}_{D_f}(r\cdot\boldsymbol{a})\cdot r^{k-1} f_{R|\mathbf{A}}(r|\boldsymbol{a}) dr \right\} f_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{a}) d\boldsymbol{a}$$

ここで、$\mathrm{I}_{D_f}(\boldsymbol{u})$ は、構造システムの状態を判別する指標関数であり、システムが破損状態にあれば、$\mathrm{I}_{D_f}(\boldsymbol{u}) = 1$、安全状態にあれば、$\mathrm{I}_{D_f}(\boldsymbol{u}) = 0$ となる。$\boldsymbol{a} \in \Omega_k$ は、方向ベクトル $\boldsymbol{a}$ の積分領域が $k$ 次元単位超球の超表面 $\Omega_k$ の全域であることを表す。$f_{R|\boldsymbol{A}}(r|\boldsymbol{a})$ は、方向ベクトル $\boldsymbol{a}$ を条件とする動径 $r$ の条件付確率密度関数であり、$f_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a})$ は、$\boldsymbol{a}$ の確率密度関数である。

式(1)の 第3式の{　}内を $P_f(\boldsymbol{a})$ で表すと、動径 $r$ の原点から $\infty$ までの積分において、動径 $r$ が限界状態曲面までの安全領域で、$\mathrm{I}_{D_f}(r\cdot\boldsymbol{a}) = 0$、限界状態曲面から∞までの破損領域で、$\mathrm{I}_{D_f}(r\cdot\boldsymbol{a}) = 1$ である。そこで、原点から $\boldsymbol{a}$ の方向の限界状態曲面までの距離を $r(\boldsymbol{a})$ と表すと、$P_f(\boldsymbol{a})$ は、カイ2乗確率密度関数 $f_{\chi^2}\left[\{r(\boldsymbol{a})\}^2\right]$ の動径 $r$ の積分として、次式で表される。

$$P_f(\boldsymbol{a}) = 1 - F_{\chi^2}\left[\{r(\boldsymbol{a})\}^2\right] \qquad (2)$$

ここで、$F_{\chi^2}(\cdot)$ は、カイ 2 乗確率分布関数である。

結局、式(1)による構造破損確率は、$P_f(\boldsymbol{a})$ の $f_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a})$ に関する期待値として、次式で表される。

$$P_f = \int_{\boldsymbol{a}\in\Omega_k} P_f(\boldsymbol{a}) f_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a}) d\boldsymbol{a} = \boldsymbol{E}_{f_{\boldsymbol{A}}}\left[P_f(\boldsymbol{a})\right] \qquad (3)$$

ここで、$\boldsymbol{E}_{f_{\boldsymbol{A}}}[\cdot]$ は、$f_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a})$ に関する $[\cdot]$ の期待値を表す。

構造破損確率の推定量 $\hat{P}_f$ は、総サンプル数 $N$ の方向ベクトルサンプル $\boldsymbol{a}^{(i)}$、$(i = 1,2,...,N)$ を生成して、次式で決定される。

$$\hat{P}_f = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} P_f\left(\boldsymbol{a}^{(i)}\right) \qquad (4)$$

$$P_f\left(\boldsymbol{a}^{(i)}\right) = 1 - F_{\chi^2}\left[\left\{r\left(\boldsymbol{a}^{(i)}\right)\right\}^2\right] \qquad (5)$$

また、構造破損確率の推定量の分散 $Var(\hat{P}_f)$ およびその変動係数 $Cov$ は、次式によって与えられる。

$$Var\left(\hat{P}_f\right) = \frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}\left\{P_f\left(\boldsymbol{a}^{(i)}\right) - \hat{P}_f\right\}^2 \qquad (6)$$

$$Cov = \sqrt{Var\left(\hat{P}_f\right)} \Big/ \hat{P}_f \qquad (7)$$

## 3. 重要象限サンプリング法

方向シミュレーションに基づく構造破損確率を推定する手順を実行する場合、シミュレーションの効率化を図るために、構造破損確率に寄与すると考えられるサンプル点の象限を『重要象限』として予め探索・決定しておき、シミュレーション過程で生成されるサンプルの中で『重要象限』内に生成されないサンプルは、「象限間関係式[(2)]」を利用して『重要象限』へランダムに変換・生成して、シミュレーションを実行することを提案する。

まず、基本確率変数空間の第 1 象限において、実サンプルの方向ベクトルを $N_R$ 個生成し、これらの実サンプルに対応する疑似サンプル方向ベクトルを全象限に変換･決定する。その中から『重要象限』を決定する手順を、以下に示す。

標準直角座標系の $k$ 次元基本確率変数空間は、象限数 $q=2^k$ の象限で構成される。第 1 番目、第 2 番目、･･･、第 $q$ 番目の各象限を、[1st]象限、[2nd]象限、･･･、[$q$-th]象限と表示のもとする。例えば、[1st]象限内で生成される $j$ 番目の実サンプルの実サンプル方向ベクトルを、$\boldsymbol{a}^{1(j)} = (a_1, a_2, ..., a_k)^{1(j)}, (j = 1,2,...,N_R)$ と表すと、[$q$-th]象限内の $j$ 番目の疑似サンプル方向ベクトル $\boldsymbol{a}^{q(j)} = (a_1, a_2, ..., a_k)^{q(j)}$ は、次の式(8)によって、決定・生成される。

$$\boldsymbol{a}^{q(j)} = \boldsymbol{a}^{1(j)} \begin{bmatrix} (-1)^{roundup\left(\frac{2^0+q}{2^0}\right)}, \\ (-1)^{roundup\left(\frac{2^1+q}{2^1}\right)}, ..., \\ (-1)^{roundup\left(\frac{2^{k-2}+q}{2^{k-2}}\right)}, \\ (-1)^{roundup\left(\frac{2^{k-1}+q}{2^{k-1}}\right)} \end{bmatrix}^T$$

$$= \boldsymbol{a}^{1(j)} \times QT(q), \quad (q = 2, 3, ..., 2^k) \qquad (8)$$

ここで、$QT(q) = [\cdot]^T$ は、象限間の座標位置関係を決定する変換関数であり、式(8)は、[1st]象限の実方向ベクトルサンプルを[$q$-th]象限の疑似方向ベクトルサンプルに変換する「象限間関係式」である[(2), (3), (4)]。

方向シミュレーションのサンプリング過程で、基本確率

変数空間の第 1 象限において、実サンプルの方向ベクトルを $N_R$ 個生成し、「象限間関係式」式(8)を用いて、これらの実サンプルに対応する疑似サンプルの方向ベクトルを全象限に変換･決定する。さらに、全象限に変換・生成された実・疑似サンプルの方向ベクトルの原点から限界状態曲面までの距離が、指定する基準値 $L$ 以下の象限を、構造破損確率の推定に寄与する『重要象限』として、次の手順で決定する。

Step 1： 第 1 象限において、 $i$ 番目の実サンプル方向ベクトル $\boldsymbol{a}_1^{(i)}$を生成する。

Step 2： 「象限間関係式」を用いて、$\boldsymbol{a}_1^{(i)}$ に対応する疑似サンプル方向ベクトル $\boldsymbol{a}_j^{(i)}$ を全象限 ($j$=2、 3、…、 $2^k$) に変換･生成する。

Step 3： 全ての実・疑似サンプルの方向ベクトルの原点から限界状態曲面までの距離が、指定された基準値 $L$ 以下の象限を『重要象限』として記憶する。

Step 4： $i = i+1$ として、Step 1 に戻る。 $i$ が $N_R$ 以上になれば終了する。

以上の手順で、$m$ 個の『重要象限』が決定され、これらを、$Q(j)$、 ($j$=1、 2、 …、 $m$)で表す。

次に、任意の象限において、実サンプルを $N$ 個生成して、方向シミュレーションを実行する。その中で、『重要象限』に生成された実サンプル点に対しては、これらの実サンプルの方向ベクトルを、そのまま構造破損確率の推定計算に用いる。一方、実サンプルが『重要象限』以外の象限に生成された場合、式(8)で与えられる「象限間関係式」を用いて、$m$ 個の『重要象限』のいずれかの象限 $Q(j)$の番号($j$=1、2、 …、 $m$)を、一様乱数によって決定し、その象限内に、疑似サンプルとして変換・決定して、各疑似サンプルの方向ベクトルサンプルを、構造破損確率の推定計算に用いるものとする。

単位超球の『重要象限』上の超表面を $\Omega_I$、『重要象限』以外の超表面を $\Omega_{Other}$ と表すと、式(3)の構造破損確率は、次式で表される。

$$
\begin{aligned}
P_f &= \int_{\boldsymbol{a}\in\Omega_k} P_f(\boldsymbol{a}) f_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{a}) d\boldsymbol{a} \\
&= \int_{\boldsymbol{a}\in\Omega_I} P_f(\boldsymbol{a}) f_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a}) d\boldsymbol{a} + \int_{\boldsymbol{a}\in\Omega_{Other}} P_f(\boldsymbol{a}) f_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a}) d\boldsymbol{a}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

ここで、 $f_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a})$ は単位超球表面上に一様に分布する方向ベクトルの確率密度関数であり、次式で表される。

$$
f_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{S_k(1)} \tag{10}
$$

また、単位超球の超表面積は、 $S_k(1) = 2\pi^{k/2} / \Gamma(k/2)$、各象限の超表面積は $S_k(1)/2^k$ で表される。

本研究では、方向シミュレーションのサンプリング過程で、『重要象限』以外の象限に生成された実サンプルを「象限間関係式」によって、『重要象限』へ変換･生成することを考える。その結果、構造破損確率は、『重要象限』に集中されることになり、式(9)の右辺第 2 項は、近似的にゼロとなる。その結果、『重要象限』の構造破損確率は、次式で近似される。

$$
\begin{aligned}
P_f &= \int_{\boldsymbol{a}\in\Omega_k} P_f(\boldsymbol{a}) f_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a}) d\boldsymbol{a} \approx \int_{\boldsymbol{a}\in\Omega_I} P_f(\boldsymbol{a}) f_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a}) d\boldsymbol{a} \\
&= \int_{\boldsymbol{a}\in\Omega_I} P_f(\boldsymbol{a}) h_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a}) \frac{f_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a})}{h_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a})} d\boldsymbol{a} \\
&= \boldsymbol{E}_{h_{\boldsymbol{A}}}\left[ P_f(\boldsymbol{a}) \frac{f_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a})}{h_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a})} \right]
\end{aligned}
\tag{11}
$$

ここで、 $h_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a})$ は、『重要象限』の方向ベクトルの確率密度関数であり、次式のように単位超球の『重要象限 $(j = 1, 2, \ldots, m)$』上の超表面に一様に分布する。

$$
h_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{mS_k(1)/2^k} = \frac{2^k}{mS_k(1)} \qquad for \quad \boldsymbol{a} \in \Omega_I \tag{12}
$$

ここで、『重要象限 $(j = 1, 2, \ldots, m)$』の全超表面積は、$mS_k(1)/2^k$ である。

以上より、『重要象限』にサンプルを集中して方向シミュレーションを行う場合、次式を式(4)に適用して、構造破損確率の推定量を計算する。

$$
P_f\left(\boldsymbol{a}^{(i)}\right) = \left(1 - F_{\chi^2}\left[\left\{r\left(\boldsymbol{a}^{(i)}\right)\right\}^2\right]\right)\left(\frac{m}{2^k}\right) \tag{13}
$$

構造破損確率の推定量 $\hat{P}_f$ の分散 $Var(\hat{P}_f)$ およびその変動係数 $Cov$ は、式(13)と式(6)、(7)によって与えられる。

以上の手順を、本研究では『重要象限サンプリング法』という。

## 4. 数値計算例

数値計算例によって、通常の方向シミュレーション(以下で、D. S.と表す)および『重要象限サンプリング法』を用いた方向シミュレーション (Important quadrant directional simulation: I. Q. D. S.と表す) に基づく構造破損確率の推定量を比較検討する。構造破損確率の推定量の精度を比較するために、サンプル数 $N$=$10^{11}$ の原始的モンテカルロ法[7]による構造破損確率の推定量 $\hat{P}_f$ を、厳密解（以下で、Exact と表す）として示す。『重要象限』を決定する際の実サンプル数は、$N_R$=10 とし、『重要象限』を判別する各方向ベクトルサンプルの原点から限界状態曲面までの距離の基準値を $L$ として、$L$=5、 7 の 2 種類で、構造破損確率の推定量への影響を検討する。また、設計点のある象限を仮に『重要象限』とする場合の、効果も数値計算例によって検討する。各手法による構造破損確率の推定量 $\hat{P}_f$ の変動係数 $Cov$ が、$Cov$≤0.01 の条件が満たしたとき、シミュレーションを終了する。D. S. および I. Q. D. S.において、方向ベクトル $\boldsymbol{a}^{(i)}$ の原点から限界状態曲面までの距離 $r(\boldsymbol{a}^{(i)})$ は、「2 分法」[8] で決定する。 使用計算機・言語は、「富士通製 ESPRIMO(CORE i5)」・「インテル Visual Fortran」である。

構造システムの限界状態関数[9]を式(14)に、正規分布に従う各基本確率変数の統計データを表 1 に示す。

$$g(\boldsymbol{x}) = x_1 x_2 \left\{ x_3 - \frac{x_1 x_2}{1.7 x_4 x_5} \right\} x_6 - (x_7 + x_8) x_9 \qquad (14)$$

この限界状態関数の設計点は、2 個あり[2]、各設計点が存在する象限だけを『重要象限』として、提案手法の『重要象限サンプリング法』に基づいて、構造破損確率の推定量 $\hat{P}_f$ を求めた結果を、表 2 の「2 quadrants related to 2 reliability indices」の欄に示す。この場合、得られた $\hat{P}_f$ は、真の値に比べ、かなり小さい値となり、設計点の象限だけを『重要象限』とすることは、不十分であることが判った。一方、本研究の提案手法に基づいて、方向ベクトルの原点から限界状態曲面までの距離の基準値を $L$=5 として決定した『重要象限』数は 32 個で、$\hat{P}_f$ としては、不十分な結果となっている。また、基準値を $L$=7 として決定した『重要象限』数は、300 個で、真の値に近い $\hat{P}_f$ を与えている。また、D。 S。に比べ、推定量の精度、計算時間に関して、提案手法が、効率的であることが判る。

## 5. 結　　言

1. 提案手法の『重要象限サンプリング法』は、構造システムのシミュレーションに基づく信頼性解析法に対して、有効である。特に、実サンプルを各象限に 10 個、方向ベクトルの原点から限界状態曲面までの距離を 7 以下の象限を全て、『重要象限』とすれば、『重要象限サンプリング法』において、真の値に近い構造破損確率の推定量が得られることが判った。
2. 設計点のある象限だけを『重要象限』とすることは、有効ではないことが判った。

## 文　　献


(1) 奥田昇也，米澤政昭，象限サンプリング法を用いた方向シミュレーションに基づく構造信頼性解析法の研究，日本機械学会 関西支部第 93 期定時総会講演会講演論文集 No. 184-1 (2018), pp. 209-212.

(2) 奥田昇也，米澤政昭，RF 法による設計点探索のための全象限初期点設定法の研究（多峰性重点サンプリング・シミュレーションに基づく構造信頼性解析の効率化），日本機械学会論文集, 84 巻, 857 号 (2018), pp. 17-00172.

(3) 奥田昇也，米澤政昭，効率的擬似サンプル生成法を用いたシミュレーションに基づく構造信頼性解析法の研究，日本機械学会 2017 年度年次大会 DVD 論文集 (講演番号 G0300801), 2017.

(4) 奥田昇也，米澤政昭，全象限サンプリング・シミュレーション法に基づく構造信頼性解析法の研究，日本機械学会 関西支部第 92 期定時総会講演会講演論文集 No.174-1 (2017), pp. 101-104.

(5) A. M. Freudenthal, Safety and Probability of Structural Failure, *Trans. ASCE*, Vol.121 (1956), pp. 1337-1375.

(6) Bjerager, P., Probability integration by directional simulation, *Journal of Engineering Mechanics*, (*ASCE*), Vol. 114 (1988), No. 8, pp. 1285-1302.

(7) Rubinstein, R, Y., Simulation and the Monte Carlo method (1981), John Wiley & Sons, p. 114.

(8) 渡辺力，名取亮，小国力（監修），Fortran77 による数値計算ソフト（第 3 刷），丸善 (1990), pp. 143-147.

(9) 長尚，基礎知識としての構造信頼性設計 (改訂新版), 山海堂(1996) pp. 103-104.

Table 1 Statistical data

| Variable | Mean value | Standard deviation |
|---|---|---|
| $x_1$ | 75.49 | 75.49 ×0.03 |
| $x_2$ | 3,300.00 | 3,300.0×0.04 |
| $x_3$ | 84.92 | 84.92 ×0.05 |
| $x_4$ | 100.00 | 100.0 ×0.05 |
| $x_5$ | 288.00 | 288.0 ×0.20 |
| $x_6$ | 1.00 | 1.0 ×0.1 |
| $x_7$ | 6,061,000.00 | 6,061,000.0 ×0.05 |
| $x_8$ | 2,564,000.00 | 2,564,000.0 ×0.35 |
| $x_9$ | 1.0 | 1.0 ×0.1 |

Table 2 Comparison of estimation of $\hat{P}_f$ Exact: $\hat{P}_f = 1.370\times10^{-5}$

| Method | | $N_R$ | $L$ | $\hat{P}_f \times10^{-5}$ | CPU time (sec) | $N$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| D. S. | | - | - | 1.37 | 17.41 | 2,467,121 |
| I. Q. D. S. | 2 quadrants related to 2 reliability indices[2] $\beta_1$=4.477, $\beta_2$=4.317 | | | 0.00526 | 17.62 | 2,545,191 |
| | 32 important quadrants | 10 | 5 | 0.04780 | 24.00 | 3,349,720 |
| | 300 important quadrants | 10 | 7 | 1.35 | 12.00 | 1,469,123 |

Reliability indices : $\beta_1$=4.477, $\beta_2$=4.317