〈原著論文〉

中学校数学における誤差の指導に関する一考察

西　仲　則　博*

A Study on Teaching “Error” in Junior High School Mathematics

（NISHINAKA Norihiro）

1．はじめに

データ活用の授業においては、データを基にして、視覚化、縮約、演算等を行い、データを得た集団やその集団の母集団の特徴や性質等を導き出すこと目的とする。この時、データは、単なる数字として扱われる。数字として扱う上で、それが持っている情報を捨象している。

しかし、数字で出された特徴や性質等は、それを解釈するときには、データの持つ背景等が必要になってくる。アメリカの統計学会（ASA）や国際統計教育学会（IASE）の会長を歴任したD. Moore（1990）は「データはその背景についてのわれわれの知識を結合し、それを理解し解釈できるようにするものであって、単に算術計算を実行させるものではない。」とし、統計的な推論を行う上での重要性を指摘している。

一方で、観測データは、観測を行うという行為を伴うため、または、観測機器などの誤差も含め、データの生来時に誤差を含んでいる。そのため、データの背景とともに、データの誤差についての学習も、統計的推論を行っていく上で、重要である。

平成29年告示の中学校学習指導要領（以下現行学習指導要領）では、中学校１年生での「データ活用領域」の学習時には、誤差に関する学習はない。平成20年告示の学習指導要領では、１年生の「資料活用」領域（平成29年告示からデータ活用領域に変更）の学習時に、誤差の学習は位置づけられていた。現行学習指導要領では、誤差の学習は、３年生の「数と式」領域に位置づけられた。このような変更がなされたのは、「誤差や近似値、$a \times 10^n$ の形の表現」という括りで示されていることから、数の表現の方法として位置づけられたと考えられる。そのためか、３年次の「誤差」についての内容は、真の値のある範囲を示すに留まり、誤差の構造として、系統的な誤差と偶然的な誤差があることや、偶然的な誤差についての３つの公理に

＊近畿大学教職教育部准教授

〔キーワード〕誤差、誤差の３つの公理、ガウスの誤差論

ついては扱われていない。すなわち、統計として「誤差」の学習として、誤差の持つ意味や意義等については扱われていないことに、問題があると考える。

そこで、本研究では、2030年の学習指導要領改訂に向けて、ガウスの誤差論における基本的な考え方を基にして、これらの扱われていない内容を中学校で扱うことができる教材を提示し、その可能性を探ることを目的とする。

２．誤差についての考え方

⑴　ガウスの誤差論の基本的な視座

ヨハン・カール・ガウス（1777-1855）（以降ガウスと表記する）は、ドイツの大数学者であり、天文学、物理学者である。1809年にガウスは“Theoria motus（『天体運行論』）”を書き、その中で、誤差についての数学的な意味づけを行い、正規分布を導き出し、更に最尤法として、最小二乗法を導き出した。この成果をまとめたのが、「誤差を最小にする観測の組み合せ理論　第１部」（1821）と「誤差を最小にする観測の組み合せ理論　第２部」（1823）、「誤差を最小にする観測の組み合せ理論　補遺」（1825）と論文化されている。これらの論文をまとめたものが、飛田武幸・石川耕春訳（1981）による『誤差論』（紀伊國屋書店）である。

本研究では、ガウスの誤差に関する３本の論文のうち、「誤差を最小にする観測の組み合せ理論　第１部」から、次の３つの基本的な視座をえる。

①　「観測で得たデータには必ず誤差がある」

②　「誤差を２つに分ける（系統誤差と偶発誤差）」

③　「偶発誤差の３公理」

上記の①～③についてのガウスの考え方について、次に詳述する。

以下、引用文については、特別な表記がない限り、飛田武幸・石川耕春訳（1981）『誤差論』（紀伊國屋書店）からであり、引用ページを括弧内に示す。

⑵　①「観測で得たデータには必ず誤差がある」について

ガウスは、①について、次のように述べている。

「観測は知覚的に得られたものを数量化する手段であるが、どんなに注意深く行ったとして

も、つねに多少の誤差を含むのはやむをえないだろう」(p 7)
とし、どのような観測においても、誤差を除くことは出来ないことを示唆している。

⑶ ② 「誤差を2つに分ける(系統誤差と偶発誤差)」

ガウスは⑵で示した考え方に立って、「観測の誤差は一般に単一ではなく、同時に発生する多くの原因によっておこるものである。それらの原因は二つの種類に分けられ、両者は正確に区別されなくてはならない。」(p 7)とする。これらの2つの誤差を、ガウスは「規則的誤差」、「不規則的誤差」(p 8)と示していたり、「規則誤差」を「定数誤差」(p 7)、「不規則的誤差」を「偶発的誤差」(p 8)と表記したりしていて、命名に一貫性がないため、ここでは、一瀬(1953)が示す、「系統誤差」と「偶発誤差」として、論を進める。

系統的誤差を「同種の観測ならいつでも完全に一定の影響を与えるか、あるいはその影響の大きさが適当に定まった方法で観測と本質的に結びついた状況のみに左右されるような性質をもつものである。こういった誤差は定数的である、あるいは規則的であると呼ばれる。」(p 7)とする。系統誤差に対しては、ガウスは、「定数誤差を生み出すすべての原因を念入りに捜し出すと、およびそれらの原因を取り除くかあるいは少なくとるそれらの効果と大きさをきちんと調べ、それによる個々の観測への影響を確かめ、そしてあたかも誤差が全く存在しなかったように修正することは観測者の仕事である。」(p 8)とする。すなわち、系統的な誤差については、それをなくす努力をすることが、実験者・観測者の務めであるとし、その影響の排除をすることを義務のようにしている。

それに対して、偶発誤差を「それぞれの観測への影響が、観測自身とは本質的な関係なしに変化する諸状況に依存するという性質をもっている。こういった誤差は不規則的である、あるいは偶発的であると呼ばれる。」(p 7)とし、「我々の感覚の不完全さから発生する誤差、たとえば空気の層によって生ずる視覚の不確かさのように不規則な外的原因に左右されるようなものもこの種類に属している」(p 7)としている。

ガウスは、この2つの誤差の分類については、「ところでこの区別はある程度相対的なものであり、我々が観測についてその概念をより広い意味で同じ種類のものとみなすか、あるいはもっと狭い意味で同種のものとみなすかによって左右されることは明らかである。」(p 7)として、観測の方法や観測に求める精度によって、系統誤差を偶発誤差と見做すことができることを次のように説明している。

「たとえば角度を測るに際し、もし何回か繰り返される同一の角の測定を問題とするとき、いつも同じ欠陥のある目盛で行うならば、具の目盛の不規則的誤差がある定数 誤差をひきおこすであろう。これに反して、何等かの方法で種々の大きさの角を測ろうとするとき、大きさに応じた誤差を示す表が与えられていない場合には、同じ原因から生じた誤差でも偶発的であるとみなすことができる。」（ｐ７）

一瀬（1953）は、ガウスの系統誤差、偶発誤差について、その起因によって更に、次の５つに分類している。

系統誤差
- a. 理論誤差・・・根本理論における間違い
- b. 器械誤差・・・器械の狂い
- c. 個人誤差・・・観測者個人の一定の癖

偶発誤差
- d. 過失誤差・・・不注意によるもの
- e. 必然的偶発的誤差・・・いかに注意しても人為によっては絶対に取り除くことができない誤差

図１．誤差の分類（一瀬（1953）Ｐ１掲載の図とＰ１の記載を基にして作成）

このようにガウスの誤差の分類を、更にその起因によって分類することにより、誤差の影響を排除することができるとともに、偶発的誤差についての数学的定式化を図ることも可能となる。

⑷　③「偶発誤差の３公理」

ガウスは、偶発的誤差について、排除されないものであるが、「観測においてはこれをやむをえないこととするが、組合せをうまく行って、それの観測から導かれる量への影響をできるだけ弱めなければならない。」（ｐ８）という考え方に立つ。この考え方がこの論文の題名にもなっている。

この「誤差の」組合せを行うにあたり、偶発的誤差の性質として、「連続性の法則により、それらの限界内にある誤差はすべておこりうる可能性のあるものとみなすべきである。また、そのような誤差の原因がどのようなものであるかがはっきりすれば、すべてこれらの誤差が同程度におこるとみなすことができるか否かがわかる。そして後の場合にはそれぞれの誤差に、あ

る大きさの相対確率が与えられるべきである。」（ｐ８）すなわち、偶然誤差の生起の連続を確率として示そうとしているのである。この偶然誤差の生起確率を、論文中の 4 節（ｐ９）において、ある観測を行った時の総誤差 x の相対頻度 ϕ（x）とし、4 節以降は、この ϕ（x）の導出が行われる。

この導出の過程において、ガウスは、後に誤差の 3 公理（美馬聡，2017）と呼ばれる下記の 3 つの条件を示す。

ア．大きさの等しい正負の誤差は等しく起こる

イ．小さい誤差は大きい誤差より起こりやすい

ウ．ある限界値より大きな誤差は起こらない

これらは、まとめては示されていないが。論文の 4 節中に示されている。

アについては、「多くの場合、絶対値が同じなら正と負の誤差は同じ頻度で現われるとみなされる」（ｐ９）として、ϕ（−x）＝ ϕ（x）という関係を導く。次にイについては、「小さな誤差ほど大きな誤差よりも生じ易い」（ｐ９）ことらから、一般に ϕ（x）は x ＝ 0 のとき最大の値をとり、そしてこの絶対値が大きくなるにつれて減少し続けるという関数のグラフの特徴を示す。

ウについては、「おこりうる誤差の限界の外にあるすべてのこの値に対して 0 とするから、定義域有限とみなされる。しかしこの限界の内ならば、それは（前節の終りに述べた場合は別として）どこでもある正の値をとる。」（ｐ９）とし、ϕ（x）は有限で定義されることが示されている。そして、ϕ（x）の積分 $\int \phi$（x）dx の値が、ある区間内における偶発誤差の総和であると考える。次に、全ての偶然誤差の起こりうる確率の総和が 1 であることと、ある限界より超えた大きな確率が起こらないことから、これらの確率が 0 であることをあわせて、ガウスは次の式が成り立つことを導く。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1$$

ガウスは、この後、正規分布の式と、最小二乗法の導出を行っていく。

同時期に、Laplace（Pierre-Simon Laplace, 1749-1827）は天体運動論で観測誤差を考慮した最確な観測値を研究していたとき、次のような確率を導いた。（日本数学史学会（2020）数学

史事典，ｐ303）

$$\frac{1}{n\,!}\left[r^{\,n}-\binom{n+1}{1}r^{\,n-1}+\binom{n+2}{2}r^{\,n-2}-\cdots\right]$$

図２．Laplaceの確率 （日本数学史学会（2020）数学史事典ｐ303より）

この確率を彼は独自の創出による母関数一特性関数を利用して「大数の関数である公式の近似とそれらの確率への応用に関する論文」（1810）の中で正規密度関数 e^{-x^2} の積分であることを示した。これは、観測誤差の確率が正規分布であることを示したことになる（日本数学史学会（2020））。この事は、今日的には、e^{-x^2} のマクローリン展開で確かめることができる。

ガウスは、この事について、次のように述べている。

「後に Laplace は、この事実を他の方法で取り組むことによって、誤差の確率の法則がどのようなものであろうとも、観測の数が多くさえあれば、この原理は他のどの原理よりも好ましいものであることを示した。けれども観測数が少なければ、問題は未確定のまま残ってしまう。しかし我々の仮説とする法則が成り立たないときにも、最小２乗法だけは他のものに優先して薦められるべき価値がある。なぜならば、それは計算を簡素化するためにもっとも適しているからである。 いろいろな対象に対してこの新しい取扱いをするとき、我々は平均誤差の定義が Laplace の意味でなく、５節および６節における我々の意味でなされさえすれば、最小２乗法は、誤差に対する確率法則が何であれ、観測の個数がどうあろうと、あらゆる組合せの中で無条件に最上のものを提供することを示した。」（ｐ 23）

これは、観測数が少ない中でも、最小二乗法（測定値の相加平均）の考えは、最も確からしい考えであるとしているのである。

⑸　①〜③の考え方の教育的意義について

現行学習指導要領解説では、中学校数学科における「データ活用」領域の指導の意義を次の２つをあげている（文部科学省2018, ｐ 54）。

・日常生活においては、不確定な事象についてデータに基づいて判断する場面が多いので、目的に応じてデータを収集して処理し、その傾向を読み取って判断することが有用であること。

・よりよい解決や結論を見いだすに当たって、データに基づいた判断や主張を批判的に考察することが有用であること。

特に、データに基づいた判断や主張を批判的に考察するには、データの持つ情報についての考察が重要である。なぜなら、データがどのような誤差を持っているのかは、判断において、点推定を行うか、誤差を見込んで区間で示すかにも及び、それにより判断が変わることがあるからである。

そこで、まず、①のガウスの考え方は、測定値には、必ず誤差を含んでいることを前提とすることを主張している。誤差が無いのは理想であるが、様々な要因で誤差が入るので、まずは、誤差の存在を認めることが大事である。

現行の学習指導要領解説数学においても、「測定には誤差が伴う。誤差とは、測定値と真の値の差である。」（文部科学省 2018, p 136）と指摘されている。①の考え方のように、「必ず」という絶対性を持つ言葉が使われていないが、測定値に誤差の存在を認められている。

このように、測定には、誤差があることを認識した上で、測定値をどのように見ていくかが重要であると考える。

②の考えは、誤差の起因による分解であるが、この考え方は、誤差の縮小と、誤差の数学的な解析の入り口の考え方である。

系統誤差については、ガウスは、「この誤差が全く無かったようにすることが実験者や観測者の仕事である。」と指摘している。これは、誤差があることが前提であるが、排除できる誤差については、排除すべきであるということである。実験者や観測者の基本的な態度を求めるものである。

同時に、この考えは、データを基にして考える際に、「観測した値にある系統的誤差が排除されているかどうか」という批判的な視点を与える。データが信頼できるかどうかを判断する時に、重要な視点である。そのため、中学校において、データを基にして判断する際に、必要な考え方である。

偶発誤差については、その起因が偶然に起こることから、その生起について、確率を用いることが可能であることを示すものである。誤差に、数学の考えを用いることの扉でもあると言える。

③の考え方は、②の偶発誤差の性質を 3 つ示したものである。簡単でかつ、自然な偶差につ

いての考え方である。「誤差の絶対値が等しいもの同士の起こる確率が同じである」や「小さい誤差は大きい誤差よりも起こりやすい」については、どちらかに偏った確率で生起した場合、それは、観測機器や観測の条件などの原因があるということであり、対応ができる。そのため、系統誤差として捉える事ができるからである。また、「ある限界値より大きな誤差は起こらない」については、直観的には理解できることである。これは、誤差にも限界があることと、その限界を無限で考えることで、数学的な形式に落とすことが可能となる。

この３つの公理を用いることで、統計的推測で最も重要である確率分布である正規分布を導くことができることである。正規分布は、単に確率分布としてだけでなく、統計的推測においては、正規分布が前提であることが多い。例えば、点推定や、区間推定、統計的検定等は、正規分布が前提でモデルが組まれている。そのため、数学的な価値以外にも、多くの学問の根底を支えていると言っても過言でないものである。また、誤差が正規分布することを前提とすることで、データの当てはめとしての最小二乗法を得ることができる。最小二乗法は、近年の機械学習における、重要なモデルである。

一方で、これらの①～③の考え方は、特殊な考え方をしているのではなく、直観的にも理解しやすい考え方である。誤差に関するこれらの考え方が、中学校教育において、生徒たちの理解を得ることが可能であると考える。また、それ以上に、前述したように、これらの考え方がデータを基にした思考、判断において重要であると考える。

３．中学校数学教育における誤差の取り扱い

本章では、中学校数学科における、「誤差」の取り扱いについて、学習指導要領上での変遷、全国学力・学習状況調査（2016年実施）の結果、現行の教科書の記述について述べていく。

⑴　誤差についての学習指導要領上での変遷

表１は、昭和22年の学習指導要領試案から現行学習指導要領（平成29年に告示）まで、８回出された学習指導要領における「誤差」についての取り扱いについてまとめたものである。「誤差」が中学校指導要領における初出は昭和33年に告示された学習指導要領である。このとき、学年は、１年生で、領域は「Ａ数」領域であった。ここでは、誤差や有効数字、近似値の意味及び、表し方が内容として示されていた。

昭和44年に告示された学習指導要領では、いわゆる現代化の時代の学習指導要領であり、確

表１．学習指導要領の変遷における「誤差」についての記述について

学習指導要領 告示	学年	領域	内容	〔用語・記号〕	内容の取扱い
昭和22年(1947)	―	―	―	―	―
昭和33年(1958)	1	A 数	(4)場面に応じて，適切な近似値の取扱ができるようにする。 ア 誤差や有効数字の意味と近似値の表わし方。	誤差，近似値，有効数字	―
昭和44年４月	1	A 数式	(4)近似値について理解させ，それぞれの場面に応じて，近似値を適切に扱うことができるようにする。 ア 誤差と有効数字の意味および近似値の表わし方。	近似値，誤差，有効数字	―
昭和52年７月	1	A 数と式	(5)近似値について理解させ，それぞれの場面に応じて，近似値を適切に扱うことができるようにする。	―	(2)内容のAの(5)については，近似値が実際に用いられる場面に応じて取り扱い，近似値のもつ意味を理解させることに重点を置くこととし，近似値の形式的な計算方法には深入りしないものとする。
平成元年３月	2	C 数量関係	(1)数の表現についての理解を探めるとともに，実際の場面で数を適切に用いることができるようにする。	有効数字，近似値，誤差，度数，階級	(4)内容のCの(1)については，２進法などの記数法，$a \times 10^n$ の形の表現を取り上げるものとする。
平成10年12月	―	―	―	―	―
平成20年３月	1	D 資料の活用	(1)目的に応じて資料を収集し，コンピュータを用いたりするなどして表やグラフに整理し，代表値や資料の散らばりに着目してその資料の傾向を読み取ることができるようにする。	―	(6)内容の「D資料の活用」の(1)に関連して，誤差や近似値，$a\times10^n$の形の表現を取り扱うものとする。
平成29年３月	3	A 数と式	―	―	(1)内容の「A数と式」のなどに関連して，誤差や近似値，$a \times 10^n$ の形の表現を取り扱うものとする。

国立教育政策研究所教育研究情報データベースを基に作成
https://erid.nier.go.jp/guideline.html

率や統計にも力を入れられたが、誤差の扱いは、確率や統計ではなく、１年生の「A 数式」領域であった。示された内容も昭和33年告示学習指導要領と同じである。

昭和52年告示の学習指導要領は、基礎基本の学習指導要領であったが、こちらの学習指導要領においては、１年の「A 数と式」領域での学習となっている。内容については、「誤差」と

いう言葉がなくなり、「近似値」だけとなっている。また、「内容の取り扱い」において、近似値の形式的な計算に深入りしないことが明記されている。これから、昭和44年告示された学習指導要領において、近似計算の学習が困難であったことを伺うことができる。

平成元年告示の学習指導要領においては、学年が２年になり、「C 数量関係」に領域が変更になっている。「C 数量関係」には、関数や確率、統計などが含まれていたことから、ここでは、統計での活用が図られた。

平成10年告示学習指導要領は、「ゆとり教育」とされる学習指導要領で、数学の週あたりの時間数が全学年、４から３時間に変わった。このため、学習内容の精選が行われ、統計的内容については、総合的な学習の時間に例示されるようになった。すなわち、「誤差」についても、削除された。

平成20年告示の学習指導要領において、統計的内容の重要性が見直され、中学校の統計的な内容が復活することになった。単に、平成元年の学習指導要領に戻すのではなく、新しい領域「資料の活用」を新設し、活用に重きをおいた学習の展開を求めた。ただ、内容には「誤差」は示されず、１年生の「資料活用」領域の「内容の取り扱い」において、誤差や近似値等を扱うことが明記された。

平成29年告示学習指導要領（現行学習指導要領）においては、１年生の「データ活用」領域において、統計的な確率を２年生から移動し、２年生の「データ活用」領域に高等学校数学Ⅰで学習していた四分位数、箱ひげ図の学習を移行するため、「誤差」が押し出された形になった。

このように見てくると、「誤差」については、統計的な見方をされるよりも、数の表現やその意味に重点が置かれてきたことが、読み取れる。３年生の「A 数と式」領域では、平方根や π などの値を正確に示すことは、無理なため（無理数は小数点表記で無限に続くため）これを近似値と示すことを学習する。

例えば、$\sqrt{2} = 1.414\cdots$ というように、$\sqrt{2}$ の近似値として 1.414 と示すことである。ここでの近似は、正確に示すことができないための、簡便な略記である。しかし、近似値を測定値における真の値と誤差の和であると定義すると、明らかな違いがそこにある。すなわち、$\sqrt{2}$ の近似値 1.414 は、正確な値の４桁を示していて、省略された小数点４位以下の数は、誤差ではないのである。よって、誤差、近似値、$a \times 10^n$ の形の表現は、平方根の近似値表現とは、異なる学習であると考える。

このように、学習指導要領上の変遷を追ってくると、誤差そのものに焦点をあてるよりも、測定値としての近似値の表し方に焦点があり、そのため、「A 数と式」領域での扱いが多いことの説明がつく。誤差をデータ解析とセットで考えた、先の学習指導要領が際立ってくる。

⑵ 全国学力学習状況調査（2016）における誤差問題の結果について

全国学力学習状況調査において誤差の問題が出題されたのは、2016年実施された数学Ａの12番「最頻値の意味・近似値と誤差」の（2）のみである。このような結果なのは、平成20年の学習指導要領では、誤差についての学習が１年生で行われていたため、2016年に出題された。しかし、現行学習指導要領では、３年生の学習になったため、2016年以降出題がなされていない。

数学 A12（2）の問題（図３参照）は、デジタルはかりで、郵便物の重さを調べたところ、30.2ｇと表示され、この数値が小数第２位を四捨五入されて得た値であることがわかっている。このときの郵便物の真の値の範囲として、適切なものを選択する。

（２）ある郵便物の重さをデジタルはかりで調べたところ，30.2 g と表示されました。この数値は小数第２位を四捨五入して得られた値です。この郵便物の重さの真の値を a g としたとき，a の範囲を不等式で表したものとして正しいものを，下の**ア**から**エ**までの中から１つ選びなさい。

ア　$30.15 < a < 30.25$

イ　$30.15 \leqq a < 30.25$

ウ　$30.15 \leqq a \leqq 30.24$

エ　$30.15 < a \leqq 30.24$

図３．2016年全国学力学習状況調査中学校数学　数学A12番（2）の問題

この問題の出題の趣旨は、「近似値と誤差の意味を理解しているかどうかをみる。」である。

結果は、正答率が35.4％であり、近似値と誤差の意味の理解について課題があることを示

した（表2参照)。

問題が四捨五入の不等式での表現という見方ができるが、中学校3年生が、誤差を含む近似値の表現について判断することに課題があることが明確に示された結果である。

表2．2016年全国学力学習状況調査中学校数学　数学 A12番(2) の問題の解答類型と反応率（国立教育政策研究所，2016)

解答類型と反応率

問題番号			解答類型	反応率（%）	正答
12	(2)	1	ア　　と解答しているもの。（$30.15 < \alpha < 30.25$）	7.3	
		2	イ　　と解答しているもの。（$30.15 \leqq \alpha < 30.25$）	35.4	◎
		3	ウ　　と解答しているもの。（$30.15 \leqq \alpha \leqq 30.24$）	43.7	
		4	エ　　と解答しているもの。（$30.15 < \alpha \leqq 30.24$）	11.0	
		9	上記以外の解答	0.0	
		0	無回答	2.5	

⑶　誤差についての現行の教科書での取り扱いについて

ここでは、現行の学習指導要領に基づいて作成された、(令和3年度採択）中学校3年生向けの数学の教科書7点について、誤差の取り扱いのページ数、取り扱いの単元、誤差の定義、誤差の例題、2章で示した誤差についての3つの視点である①〜③についての表記がなされているかどうかについての観点で調査を行った。その結果を表3に示す。各社の中学校をA〜Gとする。

表3から分かることとして、取り扱いのページ数は、有効数字の記述を含めて、2ページ以内の扱いであり、5社が平方根での取り扱いで、2社が相似の単元での取り扱いとなっている。2社の取り扱いについては、中学校学習指導要領解説数学編において「直接測定することが困難な高さや距離を相似な図形の性質や三平方の定理を用いて求める学習の場面など「B図形」の (1) や (3) などの学習と関連付けて指導することが考えられる。」(文部科学省 2018) とあることから、このような単元での取り扱いとなったと考えられる。

誤差の定義については、A社〜G社の7社とも、「近似値から真の値をひいた差」を基本として、定義していることがわかる。これは、誤差そのものを定義するよりも、近似値と真の値を定義してからの差であるため、トートロジーな定義となっている。また、誤差の例題については、全ての教科書で、測定値（近似値）を四捨五入から得たことを前提として、真の値の範

表3．現行中学校3年生の教科書における誤差の取り扱いについて

教科書会社名	A社	B社	C社	D社	E社	F社	G社
取り扱いページ数	2ページ	1ページ	2ページ	2ページ	2ページ	2ページ	1ページ
取り扱いの単元	平方根	平方根	平方根	平方根	平方根	相似	相似
誤差の定義 下記※1参照	定義ア	定義イ	定義イ	定義イ	定義イ	定義イ	定義イ
誤差の例題 下記※2参照	例題 第2位	例題 第2位	例題 第2位	例題 第1位	例題なし 第2位	例題なし 第2位	例題なし 第1位
①の記述	△	×	△	△	△	△	×
②の記述	×	×	×	×	×	×	×
③の記述	×	×	×	×	×	×	×

※1　誤差の定義の略記について
　　定義ア：近似値から真の値をひいた値　定義イ：近似値から真の値をひいた差
※2　誤差の例題の略記について
　　例題第2位：例題があり、小数点第2位を四捨五入して得た近似値（測定値）から真の値の範囲を求める問題である。
　　例題第1位：例題があり、小数点第1位を四捨五入して得た近似値（測定値）から真の値の範囲を求める問題である。
　　例題なし第2位：例題はないが、小数点第2位を四捨五入して得た近似値（測定値）から真の値の範囲を求めることを説明している。
　　例題なし第1位：例題はないが、小数点第1位を四捨五入して得た近似値（測定値）から真の値の範囲を求めることを説明している。

囲を求めることを問題にしたり、説明したりしていることがわかる。誤差についてよりも、真の値の存在を範囲で表現することに重きを置いていることがわかる。

①の記述については、B社、G社については、「観測で得たデータには必ず誤差がある」ことについての言及は見受けられなかった。

その他の会社については、次のような記述があった。

A社は、「道具を使って求めた長さ、時間、温度、重さなどの測定値は、真の値ではなく、近似値と考えられます。」として、測定値は、真の値と同じではないということを言及し、暗に、測定値には、誤差が必ずあることを示唆している。

C社は「ものさしで長さを測ったり、温度計で温度を測ったりするとき、真の値を正確に読み取れるとは限らない。」としている。誤差についての言及は明示されていないが、誤差の存在を暗に示唆している。

D社は、「測定して得られた値は、どんなに精密に測っても、真の値と等しいかどうかはわかりません。」としている。ここでも、誤差についての言及はないが、誤差のために真の値を特定できないことを示唆している。また、「真の値と等しいかどうかわからない」ということは、真の値であるという判断ができることも、出来ないこともどちらかわからないともとれる

ような表現である。そのため、判断の可能性についての示唆である。

E 社は、「長さや重さなどをはかるとき、真の値そのものはわからないが、真の値がどの範囲にあるかはわかる。」と記述している。これは、誤差が必ずあるとは明記していないが、誤差があることを前提として、真の値を特定することは出来ないが、その存在範囲を示す事ができることを示している。

F 社は、「計器を使った量の測定では、真の値がわからないことがふつうである。」とし、誤差が必ずあることを明記していないが、真の値を特定できないことで、誤差の存在を暗に示している。

このようなことから、①の記述については、「測定値には、誤差が必ずある」と明記されていないが、解釈として、その事を暗に示していると考えるので、△とした。

②、③の視点については、7 社とも、明記されていなかった。

このように、現行の教科書では、誤差の学習は、測定値から真の値の範囲を求めることだけの学習であることが示された。

４．中学校数学教育における誤差を実感する授業の開発

本章では、誤差や近似値について、生徒が実感できることを目的とする授業の構成について述べる。

中学校学習指導要領解説数学編において、誤差や近似値（[内容の取扱い]（1））の記述の中に、「近似値と誤差の意味について実感を伴って理解できるようにする。」（文部科学省 2018, p136）ことが記されている。

そこで、生徒が実感できることを目標とする授業の構成について述べる。生徒に近似値や誤差の意味を実感せるために、理科のような実験を行うことも考えられるが、数学としては、実験装置等の準備をせずに行う方法を考えた 。

それが、プロジェクターに、温度計のモデル（図 4 参照）を示し、この図に示されている値を読みとることである。

この図を示す前に、最小目盛りの 1/10 まで読み取ることを確認した後に、生徒にそれぞれ、付箋紙を渡す。筆記用具を用意させた後に、「これから示すものを読み取ること、誰とも

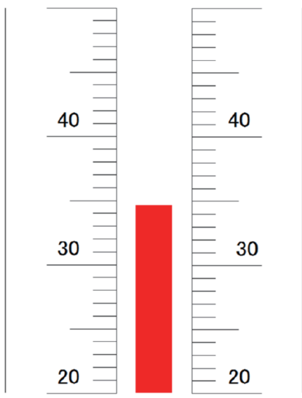

図４．温度計のモデル

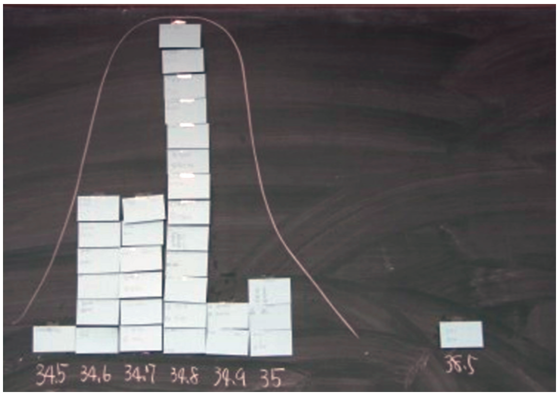

図５．図４の読み取りの結果

会話せずに読み取ったら、付箋紙に書き込むこと。その後、全員、付箋紙を黒板に貼りに来てもらうこと」と指示を出す。指示の後、図４をプロジェクターに示し、観測した値を付箋紙に書き、黒板に貼る。その結果が、図５である。

これは、同じ計測対象をクラス全員で読んだのに､全員が同じ値にならず、その値がバラついたことに、生徒達は、驚愕の声を上げる。この結果から、測定には、バラツキがあり、真の値が一意に決まらないことを実感する。

この後､「観測で得たデータには必ず誤差がある」ことを確認できる。また、誤差は、できるだけ無くすことが観測者としての務めであることと､「誤差を２つに分ける（系統誤差と偶発誤差)」の話ができる。そして、誤差には、制御できる誤差と、制御できない誤差の存在を示す事が可能である。

また、図５の観測値の分布を見ることにより、ある値の前後に集まっていることと、離れた所にある値の頻度は低いことから､「大きさの等しい正負の誤差は等しく起こる｣､「小さい誤差は大きい誤差より起こりやすい」ことを読み取ることができる 。更に､「ある限界値より大きな誤差は起こらない」についても、分布の外側にいくにつれ、値が現れる頻度が減少していることから、推論すると、大きくはずれた値の起こる確率については、0 に近づくことを理解できる。

このように、簡単な温度計のモデルを示すだけで、誤差についての学習を深めることができると考える。

５．今後の誤差についての指導に対して

本論文では、測定における誤差について、ガウスの誤差に関する３つの視点を中心にその教育的価値について考察するとともに、中学校数学においての誤差の学習について、省みた。

誤差に関する学習としては、真の値の範囲を求めることがメインであり、誤差の持つ構造や性質等についての学習はないことがわかった。また、真の値の範囲についても、2016年の全国

学力・学習状況調査において、正答率が36.4%であることから、「課題がある」と判断された。すなわち、誤差についての学習が、更に必要であることが示されたのである。

そのような中で、本論文で示した、簡単な授業事例は、誤差があることを体感し、誤差の学習を深めることができることを少なからず示すことができた。

このような、簡単な授業から誤差についての学習を深めることで、本論文で示した、ガウスの誤差に関する3つの視点を取り入れた授業の構築が可能であると考える。

ガウスは、誤差は、無くすことができないことから出発して、それを数学的に定式化することにより、現在の推測統計の根本的な部分の開拓をしていった。ガウスが行った数学的定式化の過程の中で、誤差に関する基本的な①〜③の考え方が示された。

ガウスの定式化は、中学校の生徒には難しいことであるが、①〜③については、比較的容易に理解できるであろう。また、①〜③の考え方を基にして、その先に、誤差の学習が広がっていることを知ることで、数学の面白さや不思議さを深めていくことになるであろう。

また、誤差に関する学習をすることにより、データに基づいて判断等を行うときに、「観測した値にある系統的誤差が排除されているかどうか」という批判的な視点を与えることを示した。また、偶発誤差についての3つの公理を用いることで、ある観測値の分布に偏りがあることや、多峰性であることが分かると、それらは、偶発的な誤差によって起こっているのではなく、系統的誤差が起こっている可能性が考えられる。それ以外にも、他の観測の結果が混じっているか、または、結果が恣意的に外されている可能性を疑うこともできる。すなわち、3つの公理が成立していることは、対称的な分布で、分布の頂上部より、裾野に行くほどに減少していると見做すことである。

このような学習をする、「データ活用」領域のカリキュラム開発が、今後必要であると考えている。

付　記

本研究は、JSPS 科研費（No.19K03157）、（No.23K02801）の助成を受けて行われた。

引用文献

カール・F. ガウス、飛田武幸、石川耕春（翻訳）（1981）：「誤差論」紀伊國屋書店

D. Moore（1990）：Uncertainty, On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy.

Lynn Arthur Steen, Ed Natl Academy Pr　三輪辰郎（2000）訳「世界は数理でできている」丸善株式会社 p 141
一瀬正巳（1953）:「誤差論」培風館
国立教育政策研究所（2016）：平成28年度　全国学力・学習状況調査　報告書【中学校／数学】
https://www.nier. go.jp/16chousakekkahoukoku/report/16middle/16math/
美馬聡（2017）：確率統計による測量の誤差論　基本型―残差を使用した平均二乗誤差式の証明―、ブイツーソリューション p 25
文部科学省（2018）：中学校学習指導要領解説数学編（平成29年告示）日本文教出版
日本数学史学会（2020）：日本数学史事典　丸善出版 p 303
3 章(3) で用いた教科書
重松　敬一　他（2021）「中学数学 3 」 日本文教出版
相馬　一彦　他（2021）「数学の世界 3 」大日本図書
岡部　恒治　他（2021）「これからの数学 3 」 数研出版
岡本　和夫　他（2021）「未来へひろがる数学 3 」 新興出版社啓林館
坂井　　裕　他（2021）「中学数学 3 」 教育出版
池田　敏和　他（2021）「中学校数学 3 」 学校図書
藤井　斉亮　他（2021）「新しい数学 3 」 東京書籍