理総研研報, 第 34 号, 9-17, 2023
Annu. Rep. RIST, No. 34, 9-17, 2023

解説：Review

「漸近安全な量子ブラックホールと熱力学との整合性」

石橋明浩 [1,2]
Akihiro Ishibashi[1,2]

[1] 近畿大学理工学総合研究所, [2] 近畿大学大学院総合理工学研究科
[1] *Science and Technology Research Institute, Kindai University*
[2] *Graduate School of Science and Engineering Research, Kindai University*

(Received May 8, 2023)

概要

漸近安全性は場の量子論と繰り込み群方程式を基礎とした量子重力理論構築の試みであり，近年になって宇宙論やブラックホール時空への応用研究が進展している．本稿では，漸近安全な量子重力理論における量子ブラックホールの基本性質について解説する．特に，重力と共に電磁相互作用の量子効果を取り入れた場合の量子補正ブラックホールの構成と，回転を伴うブラックホールの量子補正と熱力学との整合性問題，およびその解決策について解説する．

1 はじめに

理論物理学の大きな目標の一つは，重力理論の量子化である．一般相対論による重力の記述は現在まで非常に上手くいっており，一般相対論を積極的に否定する観測・実験結果は見つかっていない．もちろん，宇宙の加速膨張の発見のように，一般相対論の修正・変更を促す観測結果もあるが，それらは一般相対論のほころびというよりも，むしろ暗黒エネルギーや暗黒物質といった宇宙の未知の内容物の存在による効果とする考え方が，現在のところ研究の主流をなしている．しかしながら，初期宇宙やブラックホール内部のように，物質の量子的性質や重力が極端に大きくなる極限状態においては，重力の量子力学的側面が本質的になると予想されている．そのため一般相対論を筆頭とする様々な重力理論を量子化する試みが行われてきた．

一般相対論における重力を記述する基本力学変数は計量テンソル $g_{\mu\nu}$ である．この計量テンソルを，背景場 $\bar{g}_{\mu\nu}$ とその上の摂動量 $\delta g_{\mu\nu}$ とに分解しよう．つまり，

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$$

とする．これは，古典論の範疇では背景時空上での重力波を考えることになる．一方，量子論を考える際の出発点は，背景場は一般相対論における古典的な時空とし，その上で摂動量 $\delta g_{\mu\nu}$ を場の量子論の方法にしたがって量子化するのが素朴な方法となる．実際に自由場，つまり摂動の線形理論の枠内で量子化するのには問題はない．しかし，一般相対論による重力の本質は非線形性であり，それは $\delta g_{\mu\nu}$ の自己相互作用を考慮することである．一般に，相互作用の強さを決める定数を，**結合定数**と呼ぶ．重力理論の結合定数は，ニュートンの重力定数 G である．

場の量子論における摂動計算を行うと，一般に多くの発散量が現れることが分かっている．摂動展開に現れるグリーン関数を運動量・エネルギー積分を用いて表す際に，エネルギーによる積分が高エネルギーの極限に於いて発散する．これを**紫外発散**という．そして摂動の高次になるほど増々その発散の度合いが増大する傾向にある．素粒子の標準模型のように興味ある理論においては，そうした発散量は全て作用積分に現れる場の振幅，質量や結合定数など高々有限個のパラメーターに押しつけることで（つまり，それらのパラメーターの再定義により）取り除くことができる事が分かっている．この発散を取り除く作業を**繰込み**という．このような繰込みの操作では，まず発散を招く高いエネルギー極限を一旦，有限のエネルギー E_{cutoff} に置き換えて（これを切断による**正則化**という．またこのときの E_{cutoff} を切断エネルギーという），結合定数などの再定義の後に無限大の極限を取る．この繰込み操作により発散が取り除かれるためには，少なくとも摂動論的な考察によると，理論に現れる結合定数の質量次元が非負であることが必要である．

一般相対論の量子化で問題となるのは，重力の結合定数 G の質量次元が負 ($[G] = M^{-2}$) となることである．そのため摂動展開に用いる無次元の小さなパラメーター g を用意するには，何らかの質量次元 1 をもつ量 E を用いて

$$g = GE^2$$

とすることになる．この E は，つまるところ切断エネルギー E_{cutoff} となるので，紫外極限 $E_{\mathrm{cutoff}} \to \infty$ をとると，摂動の高次になるほど早く発散する．こうした事情から，一般相対論は摂動論的に繰込み不可能と考えられており，重力の量子論を構築する上での大きな障害と考えられてきた．そのため，高エネルギー（具体的にはプランク・エネルギー）では，より基礎的な重力理論があり，一般相対論はその基礎理論の低エネルギー有効理論であるとする研究が盛んに行われている．

量子化されるべきは一般相対論ではなく，高エネルギー基礎理論であるとする研究の代表例は，超弦理論であり，弦の長さのスケールに最小値があるため，そもそも発散が現れない理論構成になっている．しかし，これまでのところ摂動論的な構成のみであり，その全貌は未だ理解されていない．

一方，一般相対論を基本とする重力理論に於いては，摂動論的には上述の様な繰込み不可能性の問題があるものの，非摂動領域に於いて発散を抑えた定式化が可能であることを示唆する研究が進展している．その端緒を開いたのは，1993 年の Wetterich による**厳密繰り込み群方程式（汎関数繰込み群方程式）**の研究 [1] である．そこでは，エネルギースケールに依存する形の有効作用（**有効平均作用**）の概念を導入し，有効平均作用の従う厳密繰込み群方程式から，エネルギー・スケールに依存する，いわゆる **“走る結合定数”** の紫外極限における振舞いを考察するものである．たとえ摂動論的に繰込み不可能であっても，紫外極限で走る結合定数が非自明な固定点へと収束する場合には，そのような理論は発散の問題を含まない定式化が可能と期待される．この性質を**漸近安全性**という．一般に，高エネルギー極限において結合定数がゼロ（ガウス型固定点）となり自由場の理論に近づくときに，その理論を**漸近自由**というが，漸近安全性は，この漸近自由の概念を，結合定数が非自明な固定点に収束する場合へ一般化したものであり，Weinberg [2] により提案されたものである．

一般相対論を含む重力理論において漸近安全性が成り立つかどうかについては，現在のところ研究が進行中であるが，すでに多くの肯定的研究成果が発表されている．実際に，エネルギー・スケール k に依存して **“走るニュートン重力定数”** G_k や，**“走る宇宙項”** Λ_k の非自明な固定点が様々な重力理論において様々な近似の下で求められている．

本稿では，漸近安全性に基づく量子重力の一つの帰結である走るニュートン重力定数 G_k の振舞いを，ブラックホール時空に対する量子補正として取り込む方法を考察する．そのような方向の先駆的研究として，Bonanno と Reuter による量子補正ブラック

ホールの研究[3]がある．そこではエネルギー・スケール k と時空点 x を対応付ける**スケール同一視**の概念を導入し，走るニュートン定数 G_k を時空点依存するニュートン定数 $G(x)$ と置き換える．それにより，G を含む時空計量は修正を受けることになる．このようにして得られるブラックホール時空を**量子補正されたブラックホール時空**という．Bonanno と Reuter の他にも，これまでに様々な漸近安全量子補正ブラックホールが考察されてきたが，重要な課題の一つは，重力以外の基本相互作用の量子効果も含めた量子補正ブラックホールの構成，もう一つは，ブラックホール熱力学との整合性である．これら 2 つの課題について，2 篇の論文[4, 5]において解決策を考察した．以下では，その 2 篇の論文に基づいて，漸近安全な量子重力における量子ブラックホールのレビュー，上記 2 つの課題に対する解決として，

(1) 重力と電磁相互作用の両方の漸近安全性を考慮した量子ブラックホールの構築，

(2) 熱力学第 1 法則との整合性から地平面の面積に基づく新しいスケール同一視の方法の提案，

について解説する．なお，共同研究者である山口大輝氏の博士学位論文[6]にも日本語による本稿と同内容の詳しい解説があるので参照されたい．

2 漸近安全な量子重力における量子補正ブラックホール

2.1 厳密繰り込み群方程式

場の量子論に於ける有用な概念として**有効作用**がある．考えたい量子場を ϕ と表すことにしよう．その作用を $S[\phi]$，外場を J と表すことにすると，分配関数 $Z[J]$ は，経路積分を用いて

$$Z[J] := \int \mathcal{D}\phi e^{i(S[\phi]+J\phi)},$$

と表わされる．ここから，連結グリーン関数の生成汎関数 $W[J]$ を

$$iW[J] := \log Z$$

と定義する．すると，外場 $J(x)$ が存在する場合の量子場 $\phi(x)$ の期待値 $\varphi(x)$ は，$W[J]$ の変分により

$$\varphi(x) := \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \langle \phi(x) \rangle_J \tag{1}$$

と定義される．有効作用 $\Gamma[\varphi]$ は，連結グリーン関数の生成汎関数のルジャンドル変換により，

$$\Gamma[\varphi] := W[J] - \int dx J(x)\varphi(x)$$

と定義される．有効作用 $\Gamma[\varphi]$ は，作用積分 $S[\phi]$ に量子補正を含めたものに対応する．一般に，有効作用は紫外発散を含んでおり，導出も難しい．ただし，相互作用を含まない自由場の場合には，古典的な作用積分 $S[\phi]$ に於いて，量子場 $\phi(x)$ を期待値 $\varphi(x)$ に置き換えたものに一致する：$\Gamma[\varphi] = S[\varphi]$．

漸近安全性における厳密繰り込み群方程式は，この有効作用そのものの代わりに，エネルギー・スケール k に依存する有効平均作用 $\Gamma_k[\varphi]$ を考える．まず，有効作用を求める出発点である作用積分 $S[\phi]$ の代わりに，その低エネルギー領域に切断

$$\Delta S_k := \int dq \phi R_k(q^2) \phi$$

をいれた作用 $S[\phi] + \Delta S_k$ を考える．ここで，$R_k(q^2)$ は切断運動量 k に対して，それ以下の運動量スケール $q < k$ を抑える関数であり，様々なものが考えられている．この切断を組み入れた作用に対して上述の手続にしたがって求めた有効作用が有効平均作用 Γ_k である．これは $k \to 0$ の極限で通常の有効作用 Γ と一致し，一方 $k \to \infty$ で作用 S に帰着する．厳密繰り込み群方程式は，この有効平均作用が従う方程式であり，次のように与えられる:

$$k\frac{d\Gamma_k[\varphi]}{dk} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\frac{\delta^2\Gamma_k}{\delta\varphi\delta\varphi} + R_k\right)^{-1} k\frac{dR_k}{dk}$$

この右辺は，分母に切断 R_k を，分子にその微分 kdR_k/dk を含んでいるため，結局スケール k の近傍に着目した方程式になっており，全体としては発散を含まない厳密に成り立つ方程式になっている．この方程式により，適切な初期条件から始めて，スケール k 依存する有効平均作用 Γ_k の振舞い（流れ），

特に Γ_k が有界な紫外極限を持ち得るか，を見極めることができる．

次にこの有効平均作用 Γ_k を，原理的に考え得る全ての場の演算子 $\mathcal{O}_i$ で展開しよう：

$$\Gamma_k = \sum_i g_i(k)\mathcal{O}_i$$

ここで $g_i(k)$ は走る結合定数である．この表式を，上述の厳密繰り込み群方程式に代入すると，走る結合定数 g_i の従う方程式

$$k\frac{dg_k}{dk} = \beta_i(k)$$

が導出できる．右辺のベータ関数が与えられると結合定数の固定点が分かる．

2.2　スケール依存するニュートン重力定数

繰込み群方程式で扱う結合定数は次元をもたないものであるべきだから，重力結合定数については，無次元化した重力定数

$$\tilde{G} := Gk^2$$

を導入する．これに対して，

$$k\frac{d\tilde{G}}{dk} = \beta(\tilde{G}(k))$$

を考える．右辺のベータ関数は先行研究により

$$\beta(\tilde{G}) = 2\tilde{G}\cdot\frac{1-\omega'\tilde{G}}{1+(\omega-\omega')\tilde{G}}$$

で与えられる．ここで，ω, ω' はオーダー 1 の定数であり，重力理論の種類などに依存する．これより，無次元のニュートン重力定数は赤外と紫外極限において，次の固定点を持つことがただちに分かる：

$$\tilde{G}_{*\mathrm{IR}} = 0\,(k\to 0)\,,\quad \tilde{G}_{*\mathrm{UV}} = \frac{1}{\omega'}\,(k\to\infty)\,.$$

次元を持つ走るニュートン定数の k 依存性は

$$G(k) = k^{-2}\tilde{G} = \frac{G_0}{1+\omega G_0 k^2}\,,$$

となる．ここで G_0 は古典的なニュートン重力定数であり，赤外極限 $k\to 0$ において $G_k\to G_0$ となることが分かる．

2.3　スケール同一視

以上のようにエネルギー・スケール k に依存する走るニュートン重力定数 G_k が求まったが，その時空構造への帰結を見るために，エネルギー・スケール k そのものを時空の距離スケールと同一視する．

スケール同一視を導入する動機は，電磁相互作用の例にある．電荷 e の 2 つの電子が距離 r だけ離れているときの相互作用は，古典電磁気学に於いては，クーロン・ポテンシャル

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi r}$$

で与えられる．一方，繰り込み群方程式によりエネルギー・スケール k に依存する電荷は，

$$e^2(k) = \frac{e^2(k_0)}{1-(e^2(k_0)/6\pi^2)\log(k/k_0)}$$

で与えられる．ここで k_0 は赤外領域にて基準となる固定されたスケールとする．さて，エネルギー・スケール k と距離 r を，次元解析から

$$k \propto \frac{1}{r}$$

と見なして，$e(k)\to e(k(r))$ とし，それを上のクーロン・ポテンシャルに代入すると，

$$V(r) = -\frac{e^2(r_0)}{4\pi r}\left\{1+(e^2(r_0)/6\pi^2)\log(r_0/r)\right\}$$

を得る．ここで，$r_0 = 1/k_0$ とした．これは，ちょうどクーロン・ポテンシャルに場の量子論的効果である真空偏極を取り入れた Uehling ポテンシャルを単距離近似したものと一致する．つまり繰り込み群方程式により得られたエネルギー・スケール依存する結合定数に対して，適切なスケール同一視 $k = k(r)$ を行うことで，正しく量子効果を取り入れることが出来る例を与えている．

漸近安全な重力理論におけるスケール同一視の簡単な例として，静的球対称なブラックホールを考えよう．球対称性の面積半径を r として，中心 $r=0$ の特異点が紫外極限 $k\to\infty$ に対応し，無限遠方 $r\to\infty$ が赤外極限 $k\to 0$ に対応すると考えるのが自然であろう．そこで，面積半径 r を用いて，少な

くとも紫外極限では r とともに単調的な減少関数となる距離関数 $d(r)$ を導入して，

$$k \sim \frac{\xi}{d(r)}$$

の様に同一視するのが適切だと予想される．ここで ξ は適当な定数である．さらに，距離関数 $d(r)$ は，座標系に依存しない量であることが適切だから，中心までの固有距離 ds^2，あるいは Kretschmann スカラー $K := R_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\mu\alpha\nu\beta}$ などの曲率スカラー量を用いて，$d(r) \propto K^{-1/4}$，のように定義されるべきだと考えられる．これまでに様々なスケール同一視の方法が提案されているが，現在のところ物理的に最も妥当なスケール同一視について決定的な結論には至っていない．

スケール同一視 $k = k(x)$ を通して，走るニュートン重力定数は $G_k \to G(x) := G(k(x))$ のように，時空点依存するニュートン重力定数となる．

2.4 量子補正シュヴァルツシルト・ブラックホール

スケール同一視により量子補正を受けるブラックホール時空の具体例として，Bonanno と Reuter[3) による量子補正シュヴァルツシルト時空を考えよう．先ず，アインシュタイン方程式の静的球対称真空解である，古典的な時空を表すシュヴァルツシルト計量は

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

と表わされる．ここで，M をブラックホール質量に対応する定数として，

$$f(r) = 1 - \frac{2G_0M}{r}$$

である．

この古典解に対して，スケール同一視により古典的ニュートン重力定数 G_0 を時空点依存するニュートン重力定数 $G(r)$ に置き換えよう．距離関数 $d(r)$ として，固有距離を選ぶことにすると，その赤外および紫外領域での振舞いは，

$$d(r) = \int^r \sqrt{|ds^2|} \simeq \begin{cases} r & (r \to \infty) \\ r^{3/2} & (r \to 0) \end{cases}$$

中間領域を繋ぐには，例えば適当な定数 $\gamma > 0$ を介して，

$$d(r) = \sqrt{\frac{r^3}{r + \gamma G_0 M}}$$

とすれば良い．このスケール同一視により時空点依存するニュートン重力定数 $G(r)$ は，

$$\begin{aligned} G(r) &= \frac{G_0 r^3}{r^3 + \tilde{\omega}G_0[r + \gamma G_0 M]} \\ &\simeq \begin{cases} G_0 - \tilde{\omega}\dfrac{G_0}{r^2} & (r \to \infty) \\ \dfrac{r^3}{\gamma\tilde{\omega}G_0 M} & (r \to 0) \end{cases} \end{aligned}$$

と振舞う．ここで，$\tilde{\omega} = \omega\xi^2$ と置いた．これにより，計量関数 $f(r)$ は，次のように量子補正される：

$$\begin{aligned} f(r) &= 1 - \frac{2M}{r}G(r) \\ &\simeq \begin{cases} 1 - \dfrac{2G_0M}{r} & (r \to \infty) \\ 1 - \dfrac{r^2}{\ell^2} & (r \to 0) \end{cases} \end{aligned}$$

ここで，$\ell^2 := \gamma\tilde{\omega}G_0/2$ とした．赤外極限では古典的なシュヴァルツシルト時空が再現され，一方の紫外極限 $r \to 0$ では $f(r)$ は，曲率半径を ℓ とする正曲率の極大対称空間を表す de Sitter 計量に帰着する．つまり球対称の中心特異点が解消され，正則な中心核に置き換わっている．中間領域では，量子補正を受けた計量関数 $f(r)$ は一般に 2 つの零点を持つことがわかる．つまり，量子補正された時空は，図 1 の様に，ブラックホールの事象の地平面の内部にもう一つの内部 (Cauchy) 地平面を持ち，その内部で原点特異点が解消された構造になっていることが分かる．

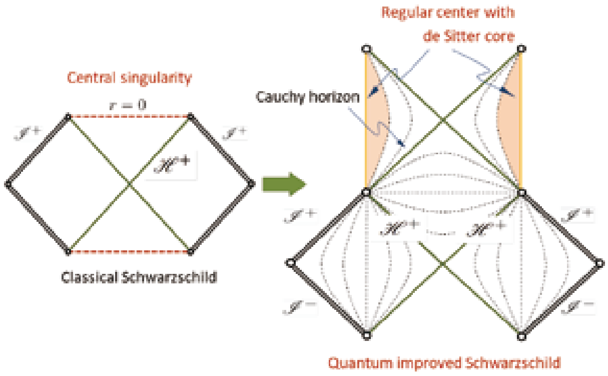

図 1: 左は最大拡張した古典的なシュヴァルツシルト時空のペンローズ図．右は，量子補正されたシュヴァルツシルト時空のペンローズ図.

3　量子補正された静的荷電ブラックホールの構築

ニュートン重力定数のスケール同一視により，量子補正されたシュヴァルツシルト時空の大域構造は，古典解のそれと大きく修正されることが分かった．特に特異点が解消されたことは，量子重力理論を考える動機に対する肯定的な回答であり興味深い．しかし，時空特異点の構造は重力のみでなく，その他の基本的相互作用や物質の効果にも大きく依存する．例えば，一般相対論における古典的時空においても，電磁相互作用を考慮した静的球対称時空（Reissner-Nordstrom 時空）は，地平面を 2 つ持ち，中心特異点は時間的な拡がりを持つものであり，重力のみのシュヴァルツシルト時空の特異点とは因果構造が大きく異なる．そこで，ニュートン重力定数とともに電磁相互作用の U(1) 結合定数（電荷）e のスケール依存性も考慮して量子補正した Reissner-Nordstrom (RN) 時空について考えよう．

古典的な RN 解の計量関数 $f(r)$ は，

$$f(r) = 1 - \frac{2G_0 M}{r} + \frac{G_0 e_0^2}{r^2}$$

で与えられる．ここで，e_0 は電磁相互作用の U(1) 結合定数である．ニュートン重力定数と合わせて 2 つの結合定数に対する厳密繰り込み群方程式は，

$$\begin{aligned} k\frac{d\tilde{G}}{dk} &= 2\tilde{G}\left(1 - \frac{1}{4\pi\tilde{\alpha}}\tilde{G}\right), \\ k\frac{de}{dk} &= \frac{1}{4\pi}e\left(\frac{b}{4\pi}e^2 - \tilde{G}\right). \end{aligned}$$

ここで b と $\tilde{\alpha}$ は定数（$0 < \tilde{\alpha}$）であり，これらのパラメーターを用いて紫外固定点は，$\tilde{G}_* = 4\pi\tilde{\alpha}$，$e_*^2 = (4\pi)^2\tilde{\alpha}/b$，となる．ここで，パラメーター $\tilde{\alpha}$ は，シュヴァルツシルト時空の場合には，$\omega = 1/4\pi\tilde{\alpha}$ となり，またパラメーター b は，考える物質の U(1) 電荷によって決まる．それぞれの走る結合定数のスケール依存性は，超幾何関数を用いて，

$$\begin{aligned} G(k) &= \frac{4\pi\tilde{\alpha}G_0}{4\pi\tilde{\alpha} + G_0 k^2}, \\ \frac{1}{e^2(k)} &= C\left(1 + Dk^2\right)^{\tilde{\alpha}} \\ &\quad + \frac{1}{e_*^2}\cdot F\left(1, \tilde{\alpha}, 1+\tilde{\alpha}; \frac{1}{1+Dk^2}\right). \end{aligned}$$

ここで，$D := G_0/4\pi\tilde{\alpha}$ と置いた．スケール同一視には Kretschmann スカラー K を用いて，$d(r) = K^{-1/4}$ とすると，量子補正を受けた計量関数の振舞いは，

$$\begin{aligned} f(r) &= 1 - \frac{2M}{r}G(r) + \frac{G(r)e^2(r)}{r^2} \\ &\simeq \begin{cases} 1 - \dfrac{2G_0 M}{r} + \dfrac{G_0 e_*^2}{r^2}\dfrac{D}{\log r + C} & (r \to \infty) \\ 1 - 2MAr^3 + Br^{4\tilde{\alpha}+2} & (r \to 0) \end{cases} \end{aligned}$$

ここで，A, B は適当な定数である．これより，漸近遠方（赤外）では平坦時空に漸近するが，分母の対数項のため，その速さは古典的解よりも急速であることがわかる．また，紫外極限では中心特異点は解消され，平坦時空の中心領域に置き換わることが分かる．その大域構造の変化は図 2 の様になる．

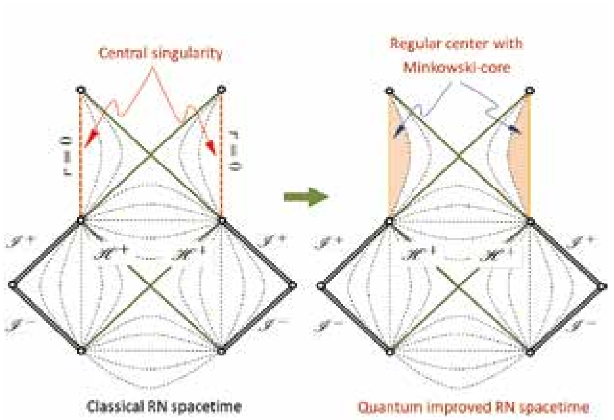

図 2: 左は一般相対論に基づく古典的な RN 解の大域構造．内部ホライズンの内側に時間的に拡がった中心特異点が存在する．右は，量子補正を受けた RN 時空のペンローズ図．中心領域がミンコフスキー核に置き換わっている．

中心付近でのより一般のスケール同一視として，距離関数が

$$d(r) = r^p \, (p > 0)$$

と与えられる場合を考えると，中心特異点が解消されるかどうかは，p と $\tilde{\alpha}$ の値により，次の様に分類されることが分かる：

- $p > \frac{3}{2}$, $\tilde{\alpha} > \frac{2}{p} - 1$: ミンコフスキー核
- $p = \frac{3}{2}$, $\tilde{\alpha} > \frac{1}{3}$: dS-核
- $p > \frac{3}{2}$, $\tilde{\alpha} = \frac{2}{p} - 1$: AdS-核
- $p = \frac{3}{2}$, $\tilde{\alpha} = \frac{1}{3}$: ミンコフスキー，dS, AdS-核
- $0 < p < \frac{3}{2}$, $\tilde{\alpha} > 0$: 弱い特異点

4　回転ブラックホールの量子補正と熱力学との整合性

角運動量を持つ真空ブラックホールを表すカー解は，

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{\Delta_r}{\Sigma}\left(dt - a\sin^2\theta d\varphi\right)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta_r}dr^2 + \Sigma d\theta^2 \\ &\quad + \frac{1}{\Sigma}\sin^2\theta\left(adt - (r^2+a^2)d\varphi\right)^2 \end{aligned}$$

ここで，

$$\Delta_r = r^2 + a^2 - 2GMr\,, \quad \Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$$

であり，a が角運動量パラメータを表す．地平面は $\Delta_r = 0$ の位置にある．この計量の特徴は，時空特異点が $r = 0$ かつ $\theta = \pi/2$ に位置し，リング状を成していることである．そのため，カー・ブラックホール内部へ落下した自由粒子は，“赤道”にあたる $\theta = \pi/2$ 上を運動しなければ，特異点には到達せず，図 3 にある様に $r = 0$ を通過して別の漸近領域へと向かうことができる．

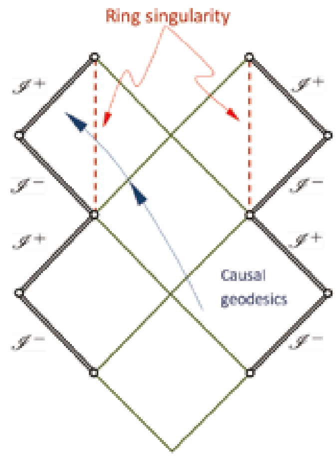

図 3: カー時空 ($\theta \neq \pi/2$) のペンローズ図．因果的測地線（青曲線）は，リング特異点 (赤破線) に衝突することなく，別の漸近平坦時空領域へと向かう．

スケール同一視の際に，紫外極限 $k \to \infty$ が取れるためには，曲率スカラーを用いた同一視が考えらる．しかし，Kretschmann スカラーの例で分かる様に，カー時空の曲率スカラーは一般に角度 θ に依存する．すると，そのようなスケール同一視による時空点依存するニュートン重力定数は，動径座標 r と共に角度座標 θ の関数 $G(r,\theta)$ となる．しかし，その様な計量から計算したスカラー曲率は，

$$\begin{aligned} R &= \frac{2M}{\Sigma}\Big[r\partial_r^2 G(r,\theta) \\ &\quad + 2\partial_r G(r,\theta) - \frac{Mr^2}{\Delta_r^2}\Big(\partial_\theta G(r,\theta)\Big)^2\Big] \end{aligned}$$

これより，G が θ に依存する限り，地平面 $\Delta_r = 0$ でスカラー曲率 R は発散する．つまり，地平面上に特異点が現れることが分かる．

そこで，スケール同一視において角度座標 θ を固定し，G を r のみの関数と仮定するのが次善の策と思われる．しかし，その様な仮定の下では一般にブラックホールの熱力学法則が満たされない，特に地平面の断面積によるエントロピー関数が上手く定義されないことが報告されている[7]．カー・ブラックホールの質量 M，角運動量 $J = Ma$，地平面の断面積

$$A = 4\pi(r_+^2 + a^2)\,,$$

角速度 $\Omega := a/(r_+^2 + a^2)$，表面重力 $\kappa = (r_+ - M)/2Mr_+$ の微分の間には，一般に

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega dJ$$

の関係が成り立つ．ここで $r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$ は，地平面の位置を表す．これは，M を熱平衡系のエネルギー E，κ を温度 T に比例する量，A をエントロピー S に比例する量，ΩdJ を仕事項 $-pdV$ と対応づけると，熱平衡系の熱力学第 1 法則

$$dE = TdS - pdV$$

に一致する．この関係式だけでなく，κ が定常ブラックホールの地平面上で一定値であることは，熱平衡系の温度は系全体で同じである第 0 法則に対応する．また，ブラックホールの表面積 A が一般に増大あるいは一定であっても，減少はしない性質は，熱力学第 2 法則（エントロピー増大則）に対応付けることができる．さらに，ブラックホール背景時空上で場の量子論を考えると，ブラックホールは $\kappa/2\pi$ を温度とするプランク分布に従う黒体輻射（ホーキング放射）を行うことが分かっている．そのため，定常ブラックホールは，係数 1/4 を含めて

$$S = \frac{A}{4}$$

をエントロピーとする熱平衡系と完全な対応関係がある．この様にブラックホールの面積で与えられるエントロピー関数を，**Bekenstein-Hawking エントロピー**という．この熱力学対応は，シュヴァルツシルト解やカー解に限らず，一般相対論の範疇で（高次元時空の場合も含めて）一般的に成り立つことが分かっている．カー・ブラックホールの表面積 A は，質量 M と角運動量パラメータ a，あるいは地平面半径 r_+ と a の関数として与えられる．そこで，上記のような熱力学法則を満たすエントロピー関数 S も (r_+, a) の関数 $S(r_+, a)$ として，次式を満たすものとして与えられる：

$$dS = \partial_+ S dr_+ + \partial_a S da\,,$$

$$\partial_+ S = \frac{(\partial_+ M - \Omega \partial_+ J)}{T}\,, \quad \partial_a S = \frac{(\partial_a M - \Omega \partial_a J)}{T}\,.$$

この様な関数 $S(r_+, a)$ が存在するための条件は，次の可積分条件である：

$$\partial_a \partial_+ S = \partial_+ \partial_a S\,. \tag{2}$$

スケール同一視に於いて，角度座標 θ を固定し，k を r のみの関数とすると，この可積分条件が満たされないことが分かるのである．この様に回転ブラックホールの量子補正については，ブラックホール熱力学法則との整合性の観点で適切なスケール同一視が見出されていなかった．

この様な状況に対して，論文[5]では，スケール同一視に用いる距離関数が地平面の面積を反映した変数

$$x_+ = 4\pi(r^2 + a^2)$$

の関数とすれば，上記の可積分条件を満たし，熱力学第 1 法則と整合するエントロピー関数 S を見出せることを発見した．つまり，スケール同一視を $k = k(x_+)$ とし，それにより得られる時空点依存するニュートン重力定数 $G(x_+)$ を用いて，量子補正を受けるブラックホールのエントロピーを，

$$S = \int \frac{dx_+}{4G(x_+)}$$

とすることを提案した．例として，

$$k(x) = \frac{\xi}{\sqrt{x_+}}$$

と同一視すると，エントロピー関数 S は，

$$S = \int \frac{dx_+}{4G(x_+)} = \frac{A_{\mathrm{class}}}{4G_0} + \pi\tilde{\omega}\log(r_+^2 + a^2)$$

となり，Bekenstein-Hawking エントロピーに対数補正が加わることがわかる．このエントロピー関数は，量子補正ブラックホールの表面重力に基づくHawking 温度と共に，ブラックホール熱力学第１法則を満たすことは直ぐに確認できる．また，このエントロピー公式はカー解以外の様々なブラックホールの量子補正に対して，やはりブラックホール熱力学と整合するエントロピーを与えることが確認できる [5)].

5　まとめ

本稿では，漸近安全な量子重力理論とそのブラックホール時空への帰結を，２篇の論文 [4, 5)] に基づいて解説した．漸近安全な量子補正ブラックホールにおけるスケール同一視の問題に対して，ブラックホール熱力学法則を指導原理として，面積を用いる新しい提案と普遍的なエントロピー公式の導出をしたが，この提案において，時空特異点が解消されるかどうかについては解析できていない．回転ブラックホールの量子補正による特異点解消の成否は今後の課題の一つである．

謝辞

Chiang-Mei Chen，Yi Chen，太田信義，山口大輝の共同研究者諸氏に感謝します.

参考文献

1) C. Wetterich, “Exact evolution equation for the effective potential”. Phys. Lett. B. 301 (1): 90-94 (1993).

2) S. Weinberg, “Ultraviolet divergences in quantum theories of gravitation”. In S. W. Hawking; W. Israel (eds.). General Relativity: An Einstein centenary survey. Cambridge University Press. pp. 790-831 (1979)

3) A. Bonanno and M. Reuter, “Renormalization group improved black hole space-times,” Phys. Rev. D **62** (2000), 043008 [arXiv:hep-th/0002196 [hep-th]].

4) A. Ishibashi, N. Ohta and D. Yamaguchi, “Quantum improved charged black holes,” Phys. Rev. D **104** (2021), 066016 [arXiv:2106.05015 [hep-th]].

5) C.-M. Chen, Y. Chen, A. Ishibashi, N. Ohta and D. Yamaguchi, “Running Newton Coupling, Scale Identification and Black Hole Thermodynamics,” Phys. Rev. D **105** (2022) no.10, 106026 doi:10.1103/PhysRevD.105.106026 [arXiv:2204.09892 [hep-th]].

6) 山口大輝，博士学位論文 「漸近安全性における量子ブラックホールと熱力学」近畿大学大学院総合理工学研究科　令和５年１月受理

7) M. Reuter and E. Tuiran, “Quantum Gravity Effects in the Kerr Spacetime,” Phys. Rev. D **83** (2011), 044041 [arXiv:1009.3528 [hep-th]].