理総研研報, 第 34 号, 1-7, 2023
Annu. Rep. RIST, No. 34, 1-7, 2023

解説：Review

代数体の多重ゼータ値

松田健太, 井原健太郎

近畿大学総合理工学研究科, 近畿大学理工学総合研究所

(Received May 7, 2023)

概要

Dedekind ゼータ関数の特殊値を多重化した「多重 Dedekind ゼータ値」に関する最近の著者らによる研究結果を解説する. 多重 Dedekind ゼータ値の級数による定義や反復積分表示, それに伴って得られる多重 Dedekind ゼータ値のシャッフル積のしくみを説明する. 例として, 虚 2 次体 $\mathbb{Q}(i)$ に付随する多重 Dedekind ゼータ値について解説する.

1 はじめに

Riemann ゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \prod_{p:\ \text{素数}} \frac{1}{1-p^{-s}} \quad \Re s > 1 \tag{1}$$

の拡張の 1 つに, Dedekind ゼータ関数がある. 代数的整数論では, 有理数体 $\mathbb{Q}$ をその拡大体である代数体 F に拡張し, 内包される有理整数環 $\mathbb{Z}$ も代数的整数のなす整数環 $\mathcal{O}_F$ に拡張して, その数論的な内部構造や拡大体間の相互関係などが研究されている. Riemann ゼータ関数は有理数体 $\mathbb{Q}$ に付随するゼータ関数であり, Dedekind ゼータ関数は, 一般の代数体 F に対して定義されるゼータ関数である. Riemann ゼータ関数の満たす様々な性質 (例えば, 解析接続, 関数等式, Euler 積表示) の多くが, 自然に Dedekind ゼータ関数に関しても成立することが知られている.

Riemann ゼータ関数	Dedekind ゼータ関数
$\Downarrow$	$\Downarrow$
多重ゼータ値	多重 Dedekind ゼータ値

表 1: ゼータの多重化

一方, 種々のゼータ関数や L 関数の特殊値の多重化が, 近年盛んに研究されている. 原型となる Riemann ゼータの特殊値の多重化である多重ゼータ値はもとより, Dirichlet L 関数, 保型形式の L 関数などの特殊値の多重化も研究されている. この原稿では, Dedekind ゼータ関数の多重化に関する筆者らの現在進行中の研究 (文献 [1]) について解説する.

この記事では, 第 2 節で, Dedekind ゼータ関数の概要を述べ, 第 3 節で [1] に沿って多重 Dedekind ゼータ値について説明する. 第 4 節ではとくに, 虚 2 次体の $F = \mathbb{Q}(i)$ に付随する多重 Dedekind ゼータ値について議論する.

2 Dedekind ゼータ関数

代数体 F に付随する Dedekind ゼータ関数は

$$\zeta^F(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{(N\mathfrak{a})^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1-(N\mathfrak{p})^{-s}} \quad \Re s > 1 \tag{2}$$

と定義される. 中央の和は整数環 $\mathcal{O}_F$ のイデアル $\mathfrak{a}\,(\neq 0)$ を渡り, 右辺の積は $\mathcal{O}_F$ の素イデアル $\mathfrak{p}\,(\neq 0)$

を渡る. $N\mathfrak{a} = |\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}|$ は $\mathfrak{a}$ のノルムである.

例えば, $F=\mathbb{Q}$ のとき, $\mathcal{O}_F=\mathbb{Z}$ には自然数 m の張る単項イデアル (m) しかなく, $N(m)=m$ である. よって, 式 (1) より $\zeta^{\mathbb{Q}}(s)=\zeta(s)$ となる.

代数体 F の整数環 $\mathcal{O}_F$ が単項イデアル以外のイデアルをもつかどうかは, F のイデアル類群 Cl_F を調べるとわかる. この群は, 剰余群

$$Cl_F = \frac{\{F\text{ の分数イデアル }\}}{\{F\text{ の単項分数イデアル }\}}$$

で定義される. ここで, F の (単項) 分数イデアルとは, F に含まれる 0 でない (1 元生成)$\mathcal{O}_F$ 加群のことで, Cl_F はイデアルの積により有限群になることが知られている. Cl_F の位数 h_F は F の類数と呼ばれ, 代数体の最も基本的な数である. $h_F=1$ であることは $\mathcal{O}_F$ が単項イデアル環であることと同値である. 例えば, $\mathbb{Q}$ や $\mathbb{Q}(i)$（Gauss 体, $i=\sqrt{-1}$）の類数は 1 である. 一方, $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ は類数が 2 である. 例えば, 2 項生成のイデアル $\mathfrak{p}=(2,1+\sqrt{-5})$ は単項イデアルではないことが簡単に確かめられる.

Dedekind ゼータ関数 $\zeta^F(s)$ は $s=1$ を除く全複素平面に解析接続されるが, 1 位の極である $s=1$ の留数に F の類数が現れる. 実際, F の実 (複素) 素点の個数を $r_1(r_2)$, 判別式を D, 単数基準を R_F, $\mathcal{O}_F$ に属す 1 の巾根の個数を w とするとき, 類数公式 (e.g. [6])

$$\lim_{s\to1}(s-1)\zeta^F(s) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}h_F R_F}{w\sqrt{|D|}}$$

が成立する. 例えば, $F=\mathbb{Q}$ の類数が 1 であることは, $\zeta^{\mathbb{Q}}(s)=\zeta(s)$ の $s=1$ での留数が 1 であることに対応している ($r_1=1, r_2=0, D=1, R_F=1, w=2$).

任意の自然数が素数の積に一意的に分解されるように, 代数体の整数環 $\mathcal{O}_F$ では, 任意のイデアルが素イデアルの積に一意的に分解される. Dedekind ゼータ関数 $\zeta^F(s)$ はその分解の様子をよく反映している. 例えば, 素数 p が 2 次体 F において生成するイデアル (p) の素イデアル分解の様子は, F の判別式を D とするとき, Kronecker 指標 $\chi(\cdot)=\left(\frac{D}{\cdot}\right)$ の p での値により決定される:

$\cdot\chi(p)=1 \quad \Leftrightarrow\ (p)=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ (\mathfrak{p}_1\neq\mathfrak{p}_2),\ N\mathfrak{p}_i=p$ 分解

$\cdot\chi(p)=-1 \ \Leftrightarrow\ (p)$ は素イデアル, $N(p)=p^2$ 惰性

$\cdot\chi(p)=1 \quad \Leftrightarrow\ (p)=\mathfrak{p}^2,\ N\mathfrak{p}=p$ 分岐

χ は法 $|D|$ の原始指標で, 対応する Dirichlet$L$ 関数を

$$L(s,\chi)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(m)}{m^s}=\prod_{p:\text{ 素数}}\frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}} \tag{3}$$

と定めると, (1)(2)(3) の積表示を比べて次が得られる：

$$\zeta^F(s)=\zeta(s)L(s,\chi). \tag{4}$$

$L(s,\chi)$ は $\chi\neq1$ ならば整関数に解析接続されることと, $\zeta(s)$ の $s=1$ での留数が 1 であることから, $\zeta^F(s)$ の $s=1$ での留数は値 $L(1,\chi)$ に等しいことがわかる.

より一般に, $F=\mathbb{Q}(\zeta)$ が円分体である場合は (ζ: 1 の原始 n 乗根), $\zeta^F(s)$ は $\bmod n$ の原始 Dirichlet 指標 χ たちに対応する L 関数たちの積となる. また, F が $\mathbb{Q}$ 上のアーベル拡大体である場合も, Kronecker – Weber の定理により, F はある円分体の部分体となることから, やはり $\zeta^F(s)$ は適当な L 関数たちの積となる.

3　多重 Dedekind ゼータ値

先ず, 通常の多重ゼータ値の定義を復習し, 文献 [1] に沿って, 多重 Dedekind ゼータ値を定義する.

$\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_d)\in\mathbb{N}^d$ を深さ d, 重さ $k_1+\cdots+k_d$ のインデックスといい, $k_1\geq2$ なら収束インデックスという. 収束インデックス $\boldsymbol{k}$ に対し, 多重ゼータ値を

$$\zeta(\boldsymbol{k})=\sum_{m_1>m_2>\cdots>m_d>0}\frac{1}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_d^{k_d}}\in\mathbb{R}.$$

と定める. k_1 を実数としても $k_1>1$ ならば右辺の級数は収束するが, $k_1=1$ のときは発散する.

多重ゼータ値たちの間には, $\zeta(3)=\zeta(2,1)$ や $\zeta(4,1)+\zeta(3,2)+\zeta(2,3)=\zeta(5)$ のような重さに

ついて斉次的な $\mathbb{Q}$-係数関係式が多く存在する．また, $\zeta(2)^2 = 2\zeta(2,2) + 4\zeta(3,1)$ のように, 2 つの多重ゼータ値の積は多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$ 係数結合で表されることが知られている．

次に, 任意の数列 $\{a_m\}$ に対して, 次の級数を考える．

$$\sum_{m_1>m_2>\cdots>m_d>0} \frac{a_{m_1-m_2}a_{m_2-m_3}\cdots a_{m_{d-1}-m_d}a_{m_d}}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_d^{k_d}}. \tag{5}$$

この形の多重級数はいくつかの先行研究の中にも見られる．例えば, 松本・谷川 [9] では, 各 k_j 達を複素変数とした関数が, 適当な $\{a_m\}$ についての条件の下 (数列 $\{a_m\}$ を d 個の数列に拡張した形で), $\mathbb{C}^d$ に有理型に解析接続されることを示している また, Choie と第 2 筆者の研究 [4] では, 数列 $\{a_m\}$ が楕円カスプ形式の Fourier 係数である場合を考察し, その特殊値間の関係式について考察している．なお, Masri[7] は, Dedekind ゼータに対応する $\{a_m\}$ に対して, 式 (5) の級数の分子が $a_{m_1}\cdots a_{m_d}$ である別種の多重級数を各 k_j 達を複素変数として考え, 解析接続などについて議論している．

命題 1 ([1]) 複素数列 $\{a_m\}$ が次を満たすと仮定する：

$$\forall\varepsilon > 0,\ a_m = O(m^\varepsilon), \quad m \to \infty. \tag{6}$$

つまり, $|a_m/m^\varepsilon|$ が有界であるとする．このとき, 任意のインデックス $\boldsymbol{k} = (k_1,\ldots,k_d)$ に対し,

$$\sum_{m_1>\cdots>m_d>0} \frac{a_{m_1-m_2}\cdots a_{m_{d-1}-m_d}a_{m_d}}{m_1^{k_1}\cdots m_d^{k_d}}\, z^{m_1} \tag{7}$$

は複素単位円板内 $|z| < 1$ において絶対かつ広義一様に収束し, 正則関数を定める．また, $\boldsymbol{k}$ が収束インデックスであれば, $z = 1$ のときも級数 (7) は絶対収束する．

命題 1 は次のように示される．仮定より, 正の定数 c が存在し, $|a_m| \le cm^\varepsilon$ $(\forall m)$ が成り立つので,

$$\begin{aligned}&\left|a_{m_1-m_2}\cdots a_{m_{d-1}-m_d}a_{m_d}\right| \\ &\le c^d(m_1-m_2)^\varepsilon\cdots(m_{d-1}-m_d)^\varepsilon m_d^\varepsilon \le c^d {m_1}^{d\varepsilon}\end{aligned}$$

である．また, $m_2^{k_2}\cdots m_d^{k_d} \ge 1$ であるので,

$$\begin{aligned}&\sum_{m_1>\cdots>m_d>0} \frac{\left|a_{m_1-m_2}\cdots a_{m_{d-1}-m_d}a_{m_d}z^{m_1}\right|}{m_1^{k_1}\cdots m_d^{k_d}} \\ &\le \sum_{m_1>\cdots>m_d>0} \frac{c^d {m_1}^{d\varepsilon}|z|^{m_1}}{m_1^{k_1}} \\ &\le \sum_{m_1>0} \frac{c^d {m_1}^{d\varepsilon}|z|^{m_1}}{m_1^{k_1}} m_1^{d-1} \\ &= \sum_{m_1>0} c^d {m_1}^{d-1-k_1+d\varepsilon}|z|^{m_1}\end{aligned}$$

となるが, この巾級数はダランベールの判定法により, $|z| < 1$ において収束する．よって, 前半の主張が示せた．次に, $\boldsymbol{k}$ を収束インデックス, $z = 1$ とすると,

$$\begin{aligned}&\sum_{m_1>\cdots>m_d>0} \frac{\left|a_{m_1-m_2}\cdots a_{m_{d-1}-m_d}a_{m_d}\right|}{m_1^{k_1}\cdots m_d^{k_d}} \\ &\le \sum_{m_1>\cdots>m_d>0} \frac{c^d {m_1}^{d\varepsilon}}{m_1^{k_1}\cdots m_d^{k_d}} \le c^d\zeta(k_1-d\varepsilon, k_2,\ldots,k_d)\end{aligned}$$

となる．ここで, $k_1 > 1$ より, $k_1 - d\varepsilon > 1$ となる ε がとれる．多重ゼータ値の級数は第 1 変数が 1 より大きい実数であれば収束する事実を用いると, 収束性が示される．以上で命題 1 が示された．

さて, 代数体 F に対して, 数列 $\{a_m\}$ を

$$a_m = \left|\{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_F \mid \mathfrak{a} \neq 0 \text{ はイデアル}, N\mathfrak{a} = m\}\right| \tag{8}$$

で定める．明らかに,

$$\zeta^F(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{(N\mathfrak{a})^s} = \sum_{m>0} \frac{a_m}{m^s} \tag{9}$$

となる．この $\{a_m\}$ に対し, 式 (6) の仮定が成り立つ．例えば, F が 2 次体なら簡単で, 等式 (4) より,

$$a_m = \sum_{d|m}\chi(d) \le \sum_{d|m}|\chi(d)| = \sum_{d|m} 1 = \tau(m) = O(m^\varepsilon)$$

という評価が成り立つ．ここで, ε は任意の正の数である．$\tau(m)$ は約数個数関数で, 最後の等式は約数個数に関する古典的な結果である (e.g. p. 296 [2]).

一般の n 次代数体の場合も, $a_m \le \tau(m)^{n-1}$ が示され (c.f. [3] Chapter 3, §7, Exercise, [14]), やはり約数関数の評価を用いて式 (6) が成り立つ．このことを, MathOverflow ([14]) にある KConrad 氏の議論を参照して以下に説明する．$\mathcal{O}_F$ の素イデアル

$\mathfrak{p}$ はある素数 p を割り, p を割る素イデアルは高々 n 個である. 更に, $p \le N\mathfrak{p}$ なので, $\sigma := \Re s > 1$ に対し,

$$\begin{aligned}\zeta^F(\sigma) &= \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{(N\mathfrak{a})^\sigma} \left(= \sum_{m>0} \frac{a_m}{m^\sigma} \right) \\ &= \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1-(N\mathfrak{p})^{-\sigma}} = \prod_{p} \prod_{\mathfrak{p}|p} \frac{1}{1-(N\mathfrak{p})^{-\sigma}} \\ &\le \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{1}{1-p^{-\sigma}} \right)^n = \zeta(\sigma)^n.\end{aligned}$$

一方, n 個の自然数の積が m であるとき, 各自然数は m の約数であり, 始めの $n-1$ 個の自然数が決まると最後の 1 つは自ずと決まることから,

$$\zeta(\sigma)^n = \sum_{m>0} \left(\sum_{m_1 \cdots m_n = m} 1 \right) \frac{1}{m^\sigma} \le \sum_{m>0} \frac{\tau(m)^{n-1}}{m^\sigma}$$

となる. $m^{-\sigma}$ の係数比較にて, $a_m \le \tau(m)^{n-1}$ となり, 式 (8) の数列 $\{a_m\}$ は仮定 (6) を満たす.

以上から, 命題 1 を適用して次の定義ができる.

定義 ([1]) 代数体 F, 収束インデックス $\boldsymbol{k}$ に対し,

$$\zeta^F(\boldsymbol{k}) = \sum_{m_1 > \cdots > m_d > 0} \frac{a_{m_1-m_2} \cdots a_{m_{d-1}-m_d} a_{m_d}}{m_1^{k_1} \cdots m_d^{k_d}}$$

を多重 Dedekind ゼータ値という. また, 任意のインデックス $\boldsymbol{k}$, $|z| < 1$ に対し,

$$Li_{\boldsymbol{k}}^F(z) = \sum_{m_1 > \cdots > m_d > 0} \frac{a_{m_1-m_2} \cdots a_{m_{d-1}-m_d} a_{m_d}}{m_1^{k_1} \cdots m_d^{k_d}} z^{m_1}$$

を多重 Dedekind ポリログという.

命題 (1) より, 多重 Dedekind ポリログは $|z| < 1$ で正則であり, $\boldsymbol{k}$ が収束インデックスのとき,

$$\lim_{z \to 1} \mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}^F(z) = \zeta^F(\boldsymbol{k}) \tag{10}$$

が Abel の定理によって成り立つ. $F = \mathbb{Q}$ の場合は, $a_m = 1$ $(m > 0)$ であるため, 多重 Dedekind ポリログが通常の多重ポリログになり, 多重 Dedekind ゼータ値が多重ゼータ値になる. 多重 Dedekind ポリログ関数 $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}^F(z)$ は次の微分公式を満たす：

命題 2 ([1]) 式 (8) で定義される数列 $\{a_m\}$ に対し, 巾級数を $f(x) = f^F(x) := \sum_{m>0} a_m x^m \quad (|x| < 1)$ によって定める. このとき,

$$\frac{d}{dz} Li_{\boldsymbol{k}}^F(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z} Li^F_{(k_1-1,k_2,\ldots,k_d)}(z) & (k_1 > 1) \\ \dfrac{f(z)}{z} Li^F_{(k_2,\ldots,k_d)}(z) & (k_1 = 1) \end{cases} \tag{11}$$

が成り立つ. 但し, 便宜的に $Li_{\varnothing}^F(z) = 1$ とみなす.

一般に, 仮定 (6) から, $f(x)$ の収束半径は 1 以上であるといえる. 更に, 式 (8) の a_m は非負整数であり, $f(x)$ は $x \to 1$ で発散するため, $f(x)$ の収束半径が 1 とわかる. 例えば, $F = \mathbb{Q}$ のときは, $f_{\mathbb{Q}}(x) = x/(1-x)$ となる. 命題 2 の証明は形式的で, $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}^F(z)$ の定義級数を項別微分することで示される. また命題 2 から以下が簡単に従う.

命題 3 ([1]) $\boldsymbol{k}$ を重さ k のインデックス, $|z| < 1$,

$$R := \{(t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k \mid 1 > t_1 > \cdots > t_k > 0\}$$

とする. 任意の代数体 F に対し, 次の重積分表示と反復積分表示が成り立つ：

$$\begin{aligned}Li_{\boldsymbol{k}}^F(z) &= \int_R \overbrace{\frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_.}{t_.}}^{k_1-1} \frac{f(zt_.)dt_.}{t_.} \cdots \overbrace{\frac{dt_.}{t_.} \cdots \frac{dt_.}{t_.}}^{k_d-1} \frac{f(zt_k)dt_k}{t_k} \\ &= \overbrace{\int_0^z \frac{dt_1}{t_1} \cdots \int_0^{t_.} \frac{dt_.}{t_.}}^{k_1-1} \int_0^{t_.} \frac{f(t_.)dt_.}{t_.} \cdots \\ &\qquad \overbrace{\int_0^{t_.} \frac{dt_.}{t_.} \cdots \int_0^{t_.} \frac{dt_.}{t_.}}^{k_d-1} \int_0^{t_.} \frac{f(t_k)dt_k}{t_k}.\end{aligned}$$

命題 3 の反復積分は右側から計算する. $f(t)/t$ は $t = 0$ で有限値 a_1 を値に取るので, 積分端点 $t = 0$ での収束性に問題はない. もう一方の端点 $t = 1$ は, $\lim_{t \to 1} f(t)/t = +\infty$ であるため, 広義積分になっている. しかし, $\boldsymbol{k}$ が収束インデックスであれば, (10) により, 積分は $t \to 1$ のとき $\zeta^F(\boldsymbol{k})$ に収束する:

$$\zeta^F(\boldsymbol{k}) = \int_R \overbrace{\frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_.}{t_.}}^{k_1-1} \frac{f(t_.)dt_.}{t_.} \cdots \overbrace{\frac{dt_.}{t_.} \cdots \frac{dt_.}{t_.}}^{k_d-1} \frac{f(t_k)dt_k}{t_k}.$$

命題 3 は $F=\mathbb{Q}$ の場合, 通常の多重ポリログの積分表示を与え, 更に $\boldsymbol{k}$ を収束インデックス, $z=1$ とすると, 多重ゼータ値の積分表示を与える.

命題 3 の反復積分表示から, 多重 Dedekind ポリログ (多重 Dedekind ゼータ値) がシャッフル積のしくみをもつことがわかる. つまり 2 つの多重 Dedekind ポリログ (多重 Dedekind ゼータ値) の積は, 多重 Dedekind ポリログ (多重 Dedekind ゼータ値) たちの和となる. 例えば, 任意の代数体 F に対し,

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}^F_{(2)}(z)\mathrm{Li}^F_{(2)}(z)&=\mathrm{Li}^F_{(2)Ш(2)}(z)\\ &:=2\mathrm{Li}^F_{(2,2)}(z)+4\mathrm{Li}^F_{(3,1)}(z)\\ \mathrm{Li}^F_{(2)}(z)\mathrm{Li}^F_{(3)}(z)&=\mathrm{Li}^F_{(2)Ш(3)}(z)\\ &:=\mathrm{Li}^F_{(2,3)}(z)+3\mathrm{Li}^F_{(3,2)}(z)+6\mathrm{Li}^F_{(4,1)}(z)\end{aligned}$$

が成立する. (シャッフル積の定義については e.g. [5] を参照)

定理 1 ([1]) 一般には, $\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^c,\boldsymbol{\ell}\in\mathbb{N}^d$ に対し, $\mathbb{N}^{c+d}$ の元の形式和 $\boldsymbol{k}Ш\boldsymbol{\ell}$ が定義され, 任意の代数体 F に対し,

$$Li^F_{\boldsymbol{k}}(z)Li^F_{\boldsymbol{\ell}}(z)=Li^F_{\boldsymbol{k}Ш\boldsymbol{\ell}}(z) \tag{12}$$

が成立する. とくに, $\boldsymbol{k},\boldsymbol{\ell}$ が収束インデックスならば,

$$\zeta^F(\boldsymbol{k})\zeta^F(\boldsymbol{\ell})=\zeta^F(\boldsymbol{k}Ш\boldsymbol{\ell}) \tag{13}$$

が成立する.

4　$F=\mathbb{Q}(i)$ の場合

この節では, 虚 2 次体 $F=\mathbb{Q}(i)$ (Gauss 体) の場合について多重 Dedekind ゼータ値を具体的に見る.

F の整数環 $\mathcal{O}_F=\mathbb{Z}[i]$ の元 $\alpha=a+bi$ の共役元は $\overline{\alpha}=a-bi$ であり, 素点は実が $r_1=0$ 個, 複素が $r_2=1$ 個である. ノルムは $N\alpha:=a\overline{\alpha}=a^2+b^2$ と定義され, 判別式は $D=\begin{vmatrix}1&i\\1&-i\end{vmatrix}^2=-4$ である. ノルムが 1 の元をみると, $(\mathbb{Z}[i])^\times=\{\pm1,\pm i\}$ であり, とくに, 含まれる 1 の巾根の個数は $w=4$ で, 単数基準は $R_F=1$ である. また, $\mathbb{Z}[i]$ は Euclid 環であるため, とくに単項イデアル環であり, 類数は 1 である. イデアル $\mathfrak{a}\subset\mathbb{Z}[i]$ のノルムは, $N\mathfrak{a}=|\mathbb{Z}/\mathfrak{a}|$ で定義され, とくに単項イデアル $\mathfrak{a}=(\alpha)$ では $N\mathfrak{a}=|N\alpha|$ となる. よってこの場合, 式 (8) で定義される数列 $\{a_m\}$ は,

$$\begin{aligned}a_m&=\left|\{\mathfrak{a}=(a+bi)\subset\mathbb{Z}[i]\mid N\mathfrak{a}=a^2+b^2=m\}\right|\\ &=\frac{1}{4}\left|\{(a,b)\in\mathbb{Z}^2\mid a^2+b^2=m\}\right|\end{aligned} \tag{14}$$

となる. つまり, 自然数 m を 2 つの平方数の和として表す方法の数を r_m とすると, $4a_m=r_m$ となる. (単数倍でイデアルは不変なため, 4 倍のずれが生じる)

まず, Dedekind ゼータ関数の低次項は,

$$\zeta^F(s)=\sum_{m>0}\frac{a_m}{m^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{2}{5^s}+\frac{1}{8^s}+\cdots$$

となる. 類数公式によると

$$\lim_{s\to1}(s-1)\zeta^F(s)=\frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}h_FR_F}{w\sqrt{|D|}}=\frac{\pi h_F}{4}=\frac{\pi}{4}$$

となる. $F=\mathbb{Q}(i)$ の Kronecker 指標 $\chi(\cdot)=\left(\frac{-4}{\cdot}\right)$ は, 法 4 の原始指標で, 具体的には

$$\chi(m)=\begin{cases}1 & m\equiv1 \pmod 4\\ -1 & m\equiv3 \pmod 4\\ 0 & m\equiv0 \pmod 2\end{cases}$$

である. よって, Dirichlet L 関数は

$$L(s,\chi)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(m)}{m^s}=\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell-1}}{(2\ell-1)^s}$$

である. ここで, 2 節の式 (4)

$$\zeta^F(s)=\zeta(s)L(s,\chi)$$

の $s=1$ での留数を両辺で比較すると,

$$L(1,\chi)=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

となり, これはよく知られたライプニッツの公式と合致する. また, 両辺の m^{-s} の係数を比較すると

$$a_m=\sum_{d|m}\chi(d)=\sum_{\substack{d|m\\ d:\mathrm{odd}}}(-1)^{\frac{d-1}{2}} \tag{15}$$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a_m	1	1	0	1	2	0	0	1	1	2	0	0	2
r_m	4	4	0	4	8	0	0	4	4	8	0	0	8

表 2: $F=\mathbb{Q}(i)$ の場合の a_m と r_m の表

を得る. χ は奇指標 (i.e., $\chi(-1)=-1$) であることから, $L(s,\chi)$ の s が正の奇数における値は知られている:

$$L(2n+1,\chi)=\frac{(-1)^n E_{2n}}{2^{2n+2}(2n)!}\pi^{2n+1},\quad n\geq 0$$

但し, E_n は Euler 数で次で定義される：

$$\frac{1}{\cosh x}=\sum_{n\geq 0}\frac{E_n}{n!}x^n.$$

これらから, 次の表の値が得られる：

k	1	3	5	7
$L(k,\chi)$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi^3}{32}$	$\frac{5\pi^5}{1536}$	$\frac{61\pi^7}{184320}$
$\zeta^F(k)$	$\times$	$\frac{\pi^3}{32}\zeta(3)$	$\frac{5\pi^5}{1536}\zeta(5)$	$\frac{61\pi^7}{184320}\zeta(7)$

一般の代数体における Dedekind ゼータの整数点での特殊値についてはさまざまな研究結果がある. 一部であるが例えば, [10, 13] など参照のこと.

式 (14) の数列 $\{a_m\}$ に対し, 定義 1 の多重 Dedekind ポリログ (多重 Dedekind ゼータ値) を考える.

命題 4 ([1]) 式 (14) の数列 $\{a_m\}$ に対し,

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{m>0}a_m x^m\\&=\sum_{m>0}\frac{x^m}{1+x^{2m}}=\sum_{m>0}\frac{(-1)^{m-1}x^{2m-1}}{1+x^{2m-1}}\end{aligned}$$

が成り立つ.

この命題は式 (15) を用いて簡単に示せる. また, この $f(x)$ は明らかな対称性 $f(x)=f(x^{-1})$ をもつ. a_m は (二平方和の表現数)/4 であり, その母関数が $f(x)$ であることから, $f(x)$ は本質的には古典的な楕円テータ関数, あるいは重さ 1 の Eisenstein 級数である. 実際, τ を複素上半平面の変数とし,

$$\theta_3(\tau):=\sum_{a\in\mathbb{Z}}q^{a^2},\qquad q=e^{2\pi i\tau}$$

とすると（保型形式との関係は [8, 12], テータ関数については e.g. [11] 参照）,

$$\theta_3(\tau)^2=\sum_{a,b\in\mathbb{Z}}q^{a^2+b^2}=1+\sum_{m>0}r_m q^m=1+4f(q)$$

となる. 式 (4) のポリログ版として, 深さ 1 の Dedekind ポリログの通常のポリログによる表示が得られる：

命題 5 ([1]) $|z|<1, k\in\mathbb{N}$ に対し,

$$Li_k^F(z)=\sum_{\ell>0}\frac{(-1)^{\ell-1}Li_k(z^{2\ell-1})}{(2\ell-1)^k}$$

が成り立つ. 特に, $k>1$ なら $z\to 1$ の極限が存在して, $\zeta^F(k)=\zeta(k)L(k,\chi)$ が得られる.

最後に, 取り留めなく多重 Dedekind ゼータ値に関して思いつくことを並べてみる. 3 節の定理 1(シャッフル積) により, 代数体 F に付随する多重 Dedekind ゼータ値全体が $\mathbb{Q}$ 上生成する線形空間は $\mathbb{Q}$-代数の構造をもつことになる. 多重ゼータ値の理論のように, この代数の定量的な構造の解明がひとつの問題となるだろう. 例えば, 多重 Dedekind ゼータ値の間に線形関係があるか, どの程度あるか. これはいわゆる多重ゼータ値間の関係式探しや次元予想の類似である. そもそもこの代数は重さによる次数代数か (つまり重さの異なる多重 Dedekind ゼータ値の間の線形関係の有無) も問題である. これは多重ゼータ値の直和予想の類似である. 代数の自由性や生成元の個数なども問題である. また, これらの問題は, 通常の多重ゼータ値が $\mathbb{P}^1\setminus\{0,1,\infty\}$ の幾何を背景にもつように, 多重 Dedekind ゼータ

値の背後にある幾何的対象の理解ができると見えてくるのかもしれない.

また, 様々な代数体で多重 Dedekind ゼータ値の特性をもっと包括的に調べる必要があるだろう. 例えば, 円分体, 総実体などで, 多重 Dedekind ゼータ値がどの程度, 代数体の性質を反映した対象なのかを調べてみたい. それにも関連して, 代数体の拡大 K/F に対して, それぞれの代数体の多重 Dedekind ゼータ値やそれらが張る空間に関係はあるだろうか. 例えば, $\mathbb{Q}$ と 2 次体のゼータ関数は等式 (4): $\zeta^F(s) = \zeta(s)L(s,\chi)$ で関係していた. この等式は多重化された形に拡張されたりしないだろうか.

ここでは整数環のイデアル全体を走らせた和として多重化を考えたが, もちろん, イデアル類を固定した partial ゼータの多重化を考えてもよいはずである. 多重化では, partial ゼータのイデアル類全体を渡る総計が多重 Dedekind ゼータとはならないことも不思議かもしれない. また, よく知られているように, 2 次体の Dedekind ゼータ関数は保型形式/テータ関数の L 関数と具体的な対応がある (e.g. [8, 12]). 保型形式の L 関数の多重化 (e.g. [4]) との関係も興味深い問題である.

謝辞 本研究は R4 年度までの期間, 下記の支援を受けています: JSPS KAKENHI (Grant numbers 18K03260).

参考文献

[1] K. Ihara, K. Matsuda, *Shuffle product for Multiple Dedekind zeta values*, in preparation.

[2] T. Apostol, 1976, *Introduction to Analytic Number Theory*, UTM, Springer.

[3] Z.I. Borevich and I.R. Shafarevich, 1966, *Number theory*, Academic Press.

[4] Y. Choie, K. Ihara, 2013, *Iterated period integrals and multiple Hecke L-functions*, Manuscripta math. **142**, pp. 245–255.

[5] K. Ihara, M. Kaneko, D. Zagier, 2006, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compositio Math., Vol. 142, pp. 307–338.

[6] S. Lang, 1994, *Algebraic number theory*, GTM 110, Springer.

[7] R. Masri, 2005, *Multiple Dedekind zeta functions and evaluations of extended multiple zeta values*, J. Number Theory **115** pp. 295–309.

[8] T. Miyake, 1989, *Modular Forms*, Springer.

[9] K. Matsumoto, Y. Tanigawa, 2003, *The analytic continuation and the order estimate of multiple Dirichlet series*, J. Theor. Nombres Bordeaux 15, no. 1, pp. 267 – 274.

[10] C. L. Siegel, 1961, *On Advanced Analytic Number Theory*, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics, No. 23, Tata Institute of Fundamental Research.

[11] E.T. Whittaker, G.N. Watson, 1962, *A course of modern analysis*, Cambridge.

[12] D. Zagier, 2008, *Elliptic Modular Forms and Their Applications*, The 1-2-3 of Modular Forms, Springer.

[13] D. Zagier, 1991, *Polylogarithms, Dedekind zeta functions and the algebraic K-theory of fields*, Arithmetic Algebraic Geometry, Progress in Maths 89, Birkhauser, pp. 391-430.

[14] MathOverflow, https://mathoverflow.net /questions/324840/bound-on-number-of-proper -ideals-of-norm-equal-to-n