

博士学位論文

漸近安全性における量子ブラックホールと熱力学

令和5年1月10日

近畿大学大学院

総合理工学研究科理学専攻

山口 大輝

博士学位論文
漸近安全性における量子ブラックホールと熱力学

山口大輝
近畿大学大学院
総合理工学研究科理学専攻

概要

本論文は、漸近安全性に基づく量子重力理論のブラックホールへの応用を考察する。本論文の内容は次の二編の論文に基づく。

- [1]. Phys. Rev. D **104**, 066016 (2021)
- [2]. Phys. Rev. D **105**, 106026 (2022)

まず、電荷を帯びた静的球対称ブラックホールを表す古典解であるライスナー・ノルドストローム計量に対して、漸近安全な量子重力理論における走るニュートン定数および走る $U(1)$ 結合定数に対して、曲率スカラー量を用いたスケール同一視を行うことで、量子補正したライスナー・ノルドストローム時空を導出し、その時空構造を調べる。特に、古典解においてその中心に存在する曲率特異点が量子効果で解消され、ミンコフスキー計量で近似される中心核へ修正される事を示す。さらに、紫外領域におけるスケール同一視の一般形を用いて中心核の構造を調べ、一般に (反)ド・ジッター核、ミンコフスキー核、弱い特異点が現れる可能性を指摘する。一方、定常回転ブラックホールに対しては、これまで適切なスケール同一視の方法が確立されていなかった。この問題に対する解決案として、ブラックホール熱力学との整合性を指導原理とし、ブラックホールの表面積を基にしたスケール同一視を提案する。この方法により、量子補正したブラックホールの熱力学第1法則が満たされ、量子補正を含めたブラックホールエントロピーに対する普遍的な公式が得られる事を示す。この新しいスケール同一視によるブラックホール熱力学第1法則とエントロピーの普遍公式については、カー時空や5次元のマイヤース・ペリー時空、カルツァ・クラインブラックホールの場合において具体的な計算を示す。

目次

1	序論	5
2	量子補正した静的球対称荷電ブラックホール	8
2.1	漸近安全性について	9
2.2	量子補正したシュバルツシルトブラックホール	10
2.3	量子補正したライスナー・ノルドストロームブラックホール	13
2.3.1	走る結合定数	13
2.3.2	$\tilde{\alpha} \neq 1 (\tilde{\alpha} > 0)$ の場合	15
2.3.3	$\tilde{\alpha} = 1$ の場合	18
2.3.4	クレッチマンスケール同一視と量子補正した時空	18
2.3.5	$\tilde{\alpha} \neq 1$ の場合	20
2.3.6	$\tilde{\alpha} = 1$ の場合	22
2.3.7	一般化されたスケール同一視と紫外極限	22
2.4	量子補正した静的球対称荷電ブラックホールのまとめ	24
3	回転ブラックホールの量子補正とスケール同一視	28
3.1	走る結合定数の概説	28
3.2	カー・(反)ド・ジッターブラックホール	29
3.2.1	カー・ブラックホール	31
3.2.2	カー・(反)ド・ジッターブラックホール	35
3.3	五次元のマイヤース・ペリー解	36
3.3.1	量子補正したブラックホールと二つの異なる角運動量	37
3.3.2	等角運動量の量子補正したブラックホール	39
3.4	カルツァ・クライン 黒弦	41
3.5	回転ブラックホールの量子補正と新しいスケール同一視についてまとめと考察	43
4	本論文の総括と展望	46
A	古典的ブラックホールの基本と熱力学第一法則	49
A.1	クルスカル座標	50
A.2	ペンローズ・カーター図	52
A.3	事象の地平面	53
A.4	クルスカル座標と地平面	55
A.5	物質の存在する球対称時空の解	55
A.5.1	(反)ドジッター・シュバルツシルト解	56
A.5.2	ライスナー・ノルドストローム解	57

A.6	ライスナー・ノルドストローム解のクルスカル拡張	59
A.7	表面重力	61
A.8	カーブラックホール	64
A.9	慣性系の引きずり: ZAMOs	65
A.10	静的観測者と静的極限	66
A.11	事象の地平面: 定常的観測者	66
A.12	曲率特異点	68
A.13	カー時空の最大拡張	69
A.14	カーブラックホールの表面重力	70
A.15	Smarr(スマー)公式	71
A.16	変分とブラックホールの法則	72
A.17	キリングベクトル、定常軸回転ブラックホール	73
A.18	真空定常軸回転ブラックホールの熱力学	75
B	厳密繰り込み群方程式と走るニュートン結合定数	77
B.1	厳密繰り込み群方程式:熱核展開	77
B.2	重力の繰り込み	80

1 序論

一般相対論と量子力学は現代物理学の二大支柱である。前者は宇宙全体のように最も大きなスケールの現象を扱うのに必要であり、後者は物質の根源である素粒子のように最も小さなスケールの現象を扱うのに必要である。これまでのところ、二つの理論が間違っていると言う実験的な証拠は見つかっていない。しかし、宇宙観測により我々の宇宙は膨張していることが分かっており、時間を遡れば、宇宙全体がビッグバン特異点と言う極微の状態から出発した事を考えるとビッグバン宇宙の理解には一般相対論と量子力学の融合が必要と考えられる。また、自然界を記述する「弱い力」、「強い力」、「電磁気力」、「重力」の内最初の三つが量子化されているのであるから、重力も量子化できると考えるのは自然であろう。しかし、一般相対論と量子力学を融合した量子重力理論は未だ完成されていない。

特異点定理 [3] により証明されているように、重力崩壊による時空特異点の発生は一般相対論の必然的な予言である。一般に特異点とは、物質のエネルギー密度や時空の曲率などが発散する領域を意味する。実際、一般相対論における一様等方膨張宇宙モデルやブラックホール時空において特異点の存在が確認できる。時空特異点では物理量が発散するため、物理法則が破綻する。したがって、そのような特異点の発生を許す一般相対論は、重力を記述する完全な理論とは言えず、特異点の近傍では重力の量子効果が支配的となって、一般相対論に基づく古典的な時空から修正されると予想されている。つまり、時空特異点の解消は重力の量子論を構築する上での主要な目的の一つである。

しかし、アインシュタイン重力理論を摂動論的に量子化する試みは上手くいかない。なぜなら、アインシュタイン重力は摂動論の枠組みでは繰り込み不可能であり、様々な物理量の計算が高エネルギーで発散してしまうからである。量子重力理論の一つの興味深い方法として、厳密繰り込み群 (汎関数繰り込み群) を用いた漸近安全な量子重力がある。漸近安全な理論は、たとえ摂動的に繰り込み不可能であっても、非摂動的に繰り込み可能な理論である。そのような理論は紫外 (高エネルギー) 領域において正則に振る舞い発散を持たない。一般相対論や、その拡張に当たる重力理論の漸近安全な可能性はこれまで多くの先行研究により調べられている [4,5] (レビュー文献 [6-8] も参照されたい)。厳密繰り込み群を扱う上での主要な概念は有効平均作用 Γ_k である。経路積分において切断エネルギースケール k を超える紫外領域を積分する事で有効平均作用は定義される。量子効果の主な結果の一つは、走るニュートン結合であり、それは切断エネルギー k に依存する。文献 [9] で指摘されているように、切断エネルギースケール k は必ずしも観測される物理現象のエネルギースケールを表すとは限らないが、時空の長さや切断運動量スケールとの関係性を与えれば、古典的な時空に対する量子効果の在り方について示唆が得られると期待される。

ブラックホールへの漸近安全重力理論の応用については、Bonanno と Reuter による先駆的な研究 [10] がある。Bonanno と Reuter はシュバルツシルト計量に現れるニュートン重力定数を繰り込み群方程式によって得られた「走るニュートン結合定数」に置き換えることで「量子補正されたシュバルツシルト計量」とその物理的帰結を考察した。その様なブラック

ホール時空を「縋り込み群に依る修正」または「量子補正されたブラックホール」と言う。本論文で詳しく説明するように、この方法によると、走るニュートン結合定数は然るべくスケール依存性 (位置依存性) を持つため、量子補正されたシュバルツシルトブラックホールの大域構造は、古典的なシュバルツシルト時空とは大きく異なる。例えば、ブラックホール地平面の内部にコーシー地平面を持ち、更に中心の曲率特異点は正則なド・ジッター時空の中心に置き換わる。つまり、古典的なシュバルツシルト時空の中心特異点は、量子補正されたシュバルツシルト時空では完全に解消される。これは、いわゆる Bardeen の正則ブラックホールの大域構造と同じである [11]。

コーシー地平面の発現は強い宇宙検閲官仮説の破綻と言った新しい問題点を提起するが、古典的な特異点の解消は、漸近安全な重力理論が量子重力理論の候補として期待される興味深い側面である。Bonanno と Reuter の研究に続いて量子補正されたブラックホールの様々な性質についての研究が行われた [12–21]。例えば、量子補正シュバルツシルト時空に回転を加えたり、「走る宇宙定数」を加えた解が考えられた [14]。

このように、漸近安全性における量子ブラックホールの研究には最近になって興味深い進展が見られる。しかしながら、現状では以下の2点に関して大きな課題がある。

- 1 重力以外の基本相互作用を含めた場合の量子補正
- 2 回転ブラックホールの量子補正におけるスケール同一視の方法

まず、第1の課題であるが、これまで行われたほとんどの量子補正ブラックホールの研究では、重力のみの量子効果に焦点を絞っており、重力の量子論とその他の相互作用の量子効果を合わせた考察は行われて来なかった。しかしながら、特異点近傍での量子効果を理解する上では重力以外の基本相互作用がどのような影響を持つのかは、自然な問いである。言い換えると、特異点の構造を形作るのに重力が最も支配的な相互作用であるかどうかは自明ではない。例えば、古典論の範疇でも、電磁相互作用を考慮するとブラックホール時空はライスナー・ノルドストローム計量で記述されるが、その時空構造は重力のみであるシュバルツシルト時空とは大きく異なる。特に、ライスナー・ノルドストローム時空の中心特異点がコーシー地平面の中に隠された時間的特異点となる事を鑑みると、重力相互作用と同等かそれ以上に電磁相互作用が時空特異点の構造に決定的な影響を及ぼしていることが分かる。この様に漸近安全な量子重力理論を考える上に置いても、重力に加えて電磁相互作用の量子効果も含める事がきわめて重要であると思われる [22–25, 27–29]。

次に、第2の課題であるが、ブラックホール解はシュバルツシルト時空やライスナー・ノルドストローム時空のような静的球対称解だけでなく、定常回転するブラックホールを表すカー解も存在する。しかしながら、定常回転するカー解の量子補正を試みた場合、大きな問題が在る。それは、量子補正した回転ブラックホールが、ブラックホールの熱力学第一法則を破る事である。熱力学の第一法則はエネルギー保存則から導かれるので、準古典的な場合だけでなく、量子補正したブラックホール時空でも成り立つべきだと考えられる。文献 [13]

では、切断エネルギー k は特定の固定した角度座標において動径距離の逆べきとスケール同一視されている。このスケール同一視では、エントロピーに対応する状態量が存在せず、温度と表面重力も比例関係を持たない (通常ホーキング温度は表面重力 κ と $T = \kappa/2\pi$ の関係にある)。この様な理由から、Reuter-Tuiran [13] で述べられているように、回転する時空の場合等において、熱力学第一法則が成り立つように温度やエントロピーが修正されるべきではないかと議論される。しかし、温度はホーキング放射の議論では幾何学的に与えられるので、事象の地平面上における表面重力で定義しておきたい。

更に、文献 [14] ではクレッチマンスカラー $K = R_{\mu\nu\rho\lambda}R^{\mu\nu\rho\lambda}$ を用いたスケール同一視で、シュバルツシルト・(反)ド・ジッター時空や、カー・(反)ド・ジッター時空の量子補正した議論が行われている。しかし、カー解の場合は、曲率スカラー量は角度座標を含むはずであり、その解析は角度座標を固定して行っている。この場合でも、やはり、熱力学第一法則を満たすことは難しく、課題は解決されていない。そもそも、スケール同一視において、角度座標を特定の値に固定するという事は、自然な選択と言えるかどうかは疑問である。実際、角度座標に依存したスケール同一視を考えると、後に示すように、事象の地平面上で特異点が発生してしまう。文献 [30] では、様々な曲率スカラーが考えられているが、それらは何れも角度に依存した形式である。スケール同一視の方法によって、地平面の数やホーキング温度、曲率の強さなど量子補正したブラックホール時空の物理的特徴が大きく変わるので、スケール同一視 $k(r)$ の選び方は重要な課題である。適切なスケール同一視のための物理的な指導原理が必要だと思われる。

本論文は、漸近安全性における量子ブラックホールの上記2つの問題に対する考察と新しい提案を行う。本論文は、著者を含む共同研究の成果に関する次の2篇の基本論文

- [1]. Phys. Rev. D **104**, 066016 (2021)
- [2]. Phys. Rev. D **105**, 106026 (2022)

に基づくものであり、今後は [1,2] それぞれを、基本論文 [I]、基本論文 [II] のように引用する。その他の関連する論文については文献欄の番号で引用する。

本論文の構成は以下のとおりである。第2章では、課題1について基本論文 [I] に基づき漸近安全な量子重力における静的荷電ブラックホールについて解説を行う。第3章は、課題2について基本論文 [II] に基づき、回転ブラックホールの量子補正と新しいスケール同一視について解説をする。第4章は、本論文全体のまとめにあてる。付録Aでは、古典的ブラックホールの基本とブラックホールの熱力学第一法則をレビューし、付録Bでは、厳密繰り込み群方程式と走るニュートン結合定数についてレビューを行う。

2 量子補正した静的球対称荷電ブラックホール

本章では、基本論文 [I] に基づき、走る重力結合に加えて、走る $U(1)$ ゲージ結合定数もあわせもつ「量子補正された荷電ブラックホール」を新たに構築し、漸近安全性における重力と電磁相互作用の効果について調べる。この様な量子補正した計量を考える事は漸近安全性における相互作用を理解する第一歩である。この目的のために、以下のような二点の問題について迫らなくてはならない。初めに、電磁場に対する重力の効果がどのように作用するかと言う問題点については、有限な運動量スケールにおいて走る $U(1)$ ゲージ結合定数が発散してしまう Landau 極の問題について考察しなければならない。この問題を扱うためには、Eichhorn と Versteegen [28] によって考案された方法を採用し、漸近安全な量子重力理論から与えられる $U(1)$ ゲージ理論の紫外完全性 (高エネルギー領域における走る結合定数の安全性) を活用する。二番目に、どのように切断運動量スケールと物理的な距離との同一視を決めるべきかという問題がある。(そのような同一視の問題に対する議論としては [31] を参照。) これまでスケール同一視に対する幾つかの異なった技法が提案されてきた。本章では Pawlowski と Stock [14] によって考えられたクレッチマンスカラーを用いた方法を採用する。これは古典的な真空解 (例えばシュバルツシルト解) と真空ではない解 (例えばライスナー・ノルドストローム解) を比べる上で便利であり、微分同相で不変的な方法である。これらの方法を用いて、我々は量子補正したライスナー・ノルドストローム計量を構築し、その特異点は解消でき、中心付近で曲率テンソルは消える事を示す。簡単にまとめると、量子補正したライスナー・ノルドストロームブラックホールは一般的に「ミンコフスキー核」を持つことが分かる。さらに一般のスケール同一視の下で解のパラメータを変化させると、ミンコフスキー核の他に弱い特異点も現れ、その境界にド・ジッター核、もしくは(反)ド・ジッター核が現れる事が分かる。

本節の構成は以下のとおりである。まず、次節 2.1 において、漸近安全性の概念とそこで用いる厳密繰り込み群方程式について簡潔にレビューする。続いて節 2.2 において、文献 [10] によって考えられた量子補正したシュバルツシルト時空に関して復習し、それは中心でド・ジッター核を持つ事を確認する。更にニュートン定数がどのように切断運動量スケールに依存するか、そしてスケール k と距離 r は球対称の中心からどのように同一視されるべきかを検討する。節 2.3 では、ライスナー・ノルドストローム計量において、 $U(1)$ ゲージ場の量子重力に対する可能な効果を調べて、繰り込み群方程式から走るニュートン結合定数と $U(1)$ ゲージ結合定数を導出する。我々の量子補正したライスナー・ノルドストローム時空として中心で正則な核を持つものを見つける。節 2.3 の最後の話題として、動径距離の冪で与えられる一般的なスケール同一視を考え、弱い特異点を解消する可能性のために中心が正則となる量子補正のための条件を導く。節 2.4 は、本章のまとめと議論である。

2.1 漸近安全性について

本章では、ニュートン定数及び $U(1)$ 結合定数に対する厳密繰り込み群方程式を用いるので、ここで簡単にスカラー場の場合を例として、漸近安全性と厳密繰り込み群方程式についての基本概念をまとめておく。より詳しい導出や漸近安全重力理論については付録 B を参照されたい。

漸近安全理論は、非摂動的な繰り込みの可能性を追求した理論であり、たとえ、摂動論で繰り込み不可能であっても漸近安全であれば、高エネルギーで理論は正則となる。これは、結合定数 g の繰り込み群における流れが紫外極限でガウス型固定点 $g_* = 0$ となる漸近自由性の概念を非ガウスの固定点 $g_* \neq 0$ へと拡張するものである。そこで中心的な役割をはたすのが厳密繰り込み群方程式である。

スカラー場の場合に、切断運動量を考慮した作用は、

$$S(\phi) + \Delta S_k = \frac{1}{2} \int d^4x \phi(x) (\Delta + \omega + R_k(\Delta)) \phi(x), \quad (2.1)$$

である。ここで、

$$\Delta S_k = \frac{1}{2} \int d^4x \phi(x) R_k(\Delta) \phi(x). \quad (2.2)$$

ここで、切断関数 R_k は赤外領域の切断 k の関数であり、様々なものが提案されている。この切断を考慮した作用を用いた経路積分から、連結グリーン関数の生成汎関数 $W_k[J]$ が求まり、

$$\varphi := \langle \phi \rangle = \frac{\delta W_k[J]}{\delta J} \quad (2.3)$$

として、通常手続きにより導出される

$$\Gamma_k[\varphi] := -W_k[J] + \int d^4x J \varphi = \frac{1}{2} \log \left[\det(\Delta + \omega + R_k(\Delta)) \right], \quad (2.4)$$

を有効平均作用と言う。これが従う方程式、

$$k \frac{d\Gamma_k[\varphi]}{dk} = \frac{1}{2} \text{Tr} \frac{\partial_k R_k(\Delta)}{\Delta + \omega + R_k(\Delta)}, \quad (2.5)$$

が厳密繰り込み群方程式 (Wetterich 方程式) とされるものである [32]。これは、有効平均作用の理論空間の中での流れを表す式であり、切断運動量 k の付近のみに着目してその変化を見る方程式であるから、厳密に成り立つ。

場の演算子を $\mathcal{O}_j(\varphi)$ 、走る結合定数を $g_j(k)$ とし、有効平均作用を、

$$\Gamma_k[\varphi] = \sum_j g_j(k) \mathcal{O}_j(\varphi), \quad (2.6)$$

と展開し、厳密繰り込み群方程式に代入すれば、

$$k \frac{d\Gamma_k[\varphi]}{dk} = \sum_j \beta_j \mathcal{O}_j(\varphi) \quad (2.7)$$

が得られる。ここで

$$k \frac{dg_j}{dk} = \beta_j(g), \quad (2.8)$$

である。厳密繰り込み群方程式と比較すれば、右辺のベータ関数 β_j が求まる。

同じ手続きをニュートン結合定数に施したものに従って、走るニュートン定数の従う方程式が得られる。右辺のベータ関数を調べれば、紫外固定点の有無が判定できる。

2.2 量子補正したシュバルツシルトブラックホール

ここでは Bonanno-Reuter [10] の結果について詳細なレビューを行う。シュバルツシルト解はアインシュタイン方程式の真空中で静的球対称な解である。シュバルツシルト計量は以下のように書かれて、

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.9)$$

となる。ここで、

$$f(r) = 1 - \frac{2G_0M}{r}, \quad (2.10)$$

と与えられ、質量パラメータ M とニュートン定数 G_0 を含む関数を表す。以降では $f(r)$ をラプラス関数と呼ぶ。

文献 [10] では、シュバルツシルト時空における量子重力の効果が考えられている。それは繰り込み群の方法と走るニュートン定数を導入する事で古典的な時空を補正する方法だ。まずは、厳密繰り込み群方程式を用いてスケール依存したニュートン定数 $G(k)$ を導く。無次元化したニュートン定数 $\tilde{G}(k) := k^2G(k)$ は、前節の (2.8) に対応する次式に従う。

$$k \frac{d\tilde{G}}{dk} = \beta(\tilde{G}(k)). \quad (2.11)$$

ここでベータ関数 $\beta(\tilde{G})$ は文献 [10] の式 (2.13) で与えられる。この方程式は赤外と紫外のエネルギー領域で二つの固定点がある。紫外固定点の様子を調べ、更に $G_0 = G(k=0)$ とすると、次元の在るニュートン定数 $G(k)$ は、

$$G(k) = \frac{G_0}{1 + \omega G_0 k^2}, \quad (2.12)$$

となる。ここで ω は紫外固定点の逆数で定数である。

次に、球対称性の中心から切断運動量スケール k と動径距離 r をどのように同一視するべきかの問題点を考える。そのようなスケール同一視は一般的な形式として、

$$k = \frac{\xi}{d(r)}, \quad (2.13)$$

と表される。ここで $d(r)$ は距離 r の関数として与えられる。これまで長くに渡って、幾つかの異なる $d(r)$ の定義が提案された。例として、 $d(r)$ は中心へ向かう観測者の固有距離であり、この場合非光的な動径距離が用いられる事もあり紫外領域で $k(r) \propto 1/r^{3/2}$ となる。

(2.13) で与えられるスケール同一視を決めると、走るニュートン定数 $G(k)$ に代入する事で位置依存したニュートン定数 $G(r) = G(k(r))$ が得られる。すると (2.10) で与えられる古典的なラプス関数のニュートン定数 G_0 を位置依存したニュートン定数 $G(r)$ に変更する事で量子補正したラプス関数は次のように書き換えられる。

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r}G(r). \quad (2.14)$$

動径距離 $d(r)$ の選択によって、遠方では $d(r) = r[1 + \mathcal{O}(1/r)]$ となり中心近傍 $r = 0$ において $d(r) = r^{3/2} \sqrt{2/(9G_0M)} + \mathcal{O}(r^{5/2})$ となる。そして位置依存するニュートン定数は遠方で $G(r) \simeq G_0 - \omega\xi^2 G_0^2/r^2 + \mathcal{O}(1/r^3)$ となるだけでなく $r = 0$ 近傍で $G(r) \simeq 2r^3/9\omega\xi^2 G_0M$ となる。よって動径距離を用いた特別なスケール同一視の方法では中心近傍で量子補正したラプス関数は、

$$f(r) = 1 - \frac{4}{9\omega\xi^2 G_0}r^2 + \mathcal{O}(r^3), \quad (2.15)$$

のように振る舞う。よって、量子補正したラプス関数は中心付近で正則であり、曲率半径 $l = (3/2)\xi\sqrt{\omega G_0}$ のド・ジッター時空を表す。そのような中心近傍の領域は「ド・ジッター核」と言われる。文献 [10] によるとパラメータは $\omega\xi^2 = 118/(15\pi)$ と与えられる。

$d(r)$ の選択は運動量スケール k と長さ r の依存性を決めてくれる。しかしながら、そのようなスケール同一視は重力系に対して、一意に決めるかどうかは未解決である。これまで様々なスケール同一視の方法が考えられた。上記の [10] の例においては、 $d(r)$ は動径方向における固有距離として扱われている。もう一つの微分同相で普遍的な $d(r)$ の仮定は、曲率スカラーもしくはクレッチマンスカラーを用いることである。これらの曲率スカラーは古典的な時空もしくは対応する量子時空から算出されるべきである。紫外領域における $d(r)$ の幾つかの例を表 1 にまとめた。他の $d(r)$ の紫外領域の結果を表すリストについては [14] を参照されたい。

表 1: $d(r)$ の紫外極限の振る舞い (数因子は落としてある)。

	Kretschmann	Radial path	Geodesic path
Schwarzschild (Classical)	$r^{3/2}$	$r^{3/2}$	$r^{3/2}$
Schwarzschild (Quantum)	$r^{3/4}$	r	$r^{3/4}$

ここで量子補正したブラックホール解の一般的な構成方法を三段階にまとめる。より詳細は、例えば [10, 14, 21, 26] を参照されたい。

Step 1. 厳密線り込み群方程式からスケール依存した結合定数を導く: 例えば、走るニュートン定数 $G(k)$ に対するベータ関数は $k \frac{d(k^2 G)}{dk} = \beta(k^2 G)$ である。ゆえに、このベータ関数を積分する事で走るニュートン定数 $G(k)$ を決める事ができる。

Step 2. 切断運動量スケールに対してスケール同一視 $k = k(x)$ を与える。そして位置依存した切断運動量スケールを用いて位置依存したニュートン定数に書き換える: $G(k) \rightarrow G(x) := G(k(x))$ 。球対称時空においては k は面積半径 r で表すことは一つの自然な仮定である。表 1 によれば、スケール同一視には幾つかの異なった方法があるが、これらは二つの場合に分ける事ができる:

- (i) 固有距離 $d(r)$ を考える事で、紫外極限に置ける様々な経路を基に $k \propto 1/d(r)$ を考える場合。
- (ii) リッチスカラー R や、リッチテンソルから作られる曲率スカラー量 $R^\alpha_\beta R^\beta_\alpha$ 、もしくはリーマンテンソルから作られる曲率スカラー量であるクレッチマンスカラー $K = R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}$ を基にして、 $k \propto K^{1/4}$ のように同一視を決める場合。

上記の (i),(ii) の幾何学量は古典的な時空または量子時空に対して考えて良い [14]。

Step 3. 量子補正には三つの段階が有り得る:

- (i) 解の量子補正 古典的な解の中に現れるニュートン定数 G_0 を走るニュートン結合定数 $G(r)$ に書き換える事で量子補正する。
- (ii) 運動方程式自体の補正 運動方程式の段階で走る結合定数を用いて量子補正する: 例えば補正されたアインシュタイン方程式

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G(x) T_{\mu\nu} - \Lambda(x) g_{\mu\nu}$$

のように走るニュートン結合定数と宇宙項を用いて書き換えその帰結を考える。ここで物質項には走る結合が含まれていないことを仮定し、有効物質を定義した。

- (iii) 作用自体の補正 作用の段階で走る結合定数を用いて書き換える事で量子補正する。量子補正された作用から導かれる運動方程式を考える。例として量子補正したアインシュタイン・ヒルベルトの作用を与えるラグランジアンは、

$$L = \frac{1}{16\pi G(x)} \{R - 2\Lambda(x)\}.$$

これらの三つの量子補正の方法は互いに異なった予測を与える。(iii) の方法を用いて、量子補正された作用からアインシュタイン方程式を導出すると、一般に $G(r)$ の微分を含むために (ii) の方法で量子補正のアインシュタイン方程式とは異なる結論になると予想される。ただし、作用の段階で量子補正を行う方法は、理論構成が自然であり、信

頼できる結果を与えると思われる。一方で、(i)の方法はとても簡易で尚且つ応用の利く方法と考えられる。ただし後者の方法は古典的な解と量子補正した解が余り大きく違わない場合にのみ信頼できると思われる。

以下ではステップ3については (i): 解の量子補正の方法を採用する。

2.3 量子補正したライスナー・ノルドストロームブラックホール

ここでは静的球対称な荷電ブラックホール時空に対して重力と電磁場の量子効果を考える。この目的のために、古典的な背景時空はライスナー・ノルドストローム計量 (2.9) を考えて、そのラプス関数は、

$$f(r) = 1 - \frac{2G_0 M}{r} + \frac{G_0 e_0^2}{r^2}, \quad (2.16)$$

とする。ここで e_0 は古典的な $U(1)$ 結合定数である。厳密繰り込み群方程式から導かれる走るニュートン定数 $G(k)$ と走る $U(1)$ ゲージ結合 $e(k)$ を導いて、切断運動量スケール k のスケール同一視によって、これら二つの走る結合定数は動径距離 r に依存する。それにより量子補正したライスナー・ノルドストローム計量を得る。そして、量子補正したライスナー・ノルドストロームブラックホールの大域構造を議論する。

2.3.1 走る結合定数

電磁場の相互作用における量子効果を考える場合、ランダウ極の問題に対処する方法を考えなければならない。この目的のために Eichhorn と Versteegen [28] によって近年考えられた方法を採用する。この方法は、 $U(1)$ ゲージ理論と重力が相互作用する状況で厳密繰り込み群を考えた時に、 $U(1)$ ゲージ理論の紫外領域における完全性 (漸近安全性) を実現する例である。文献 [28] では宇宙項 Λ も考えられているが、ここでは宇宙項をゼロとして、ニュートン結合定数と $U(1)$ ゲージ結合定数に注視する。重力と $U(1)$ ゲージ結合定数のベータ関数の一般形は以下のように (文献: [29] 参照)、

$$k \frac{d\tilde{G}}{dk} = 2\tilde{G} \left(1 - \frac{1}{4\pi\tilde{\alpha}} \tilde{G} \right), \quad (2.17)$$

$$k \frac{de}{dk} = \frac{1}{4\pi} e \left(\frac{b}{4\pi} e^2 - \tilde{G} \right), \quad (2.18)$$

と与えることができる。ここでパラメータ $\tilde{\alpha}, b$ は固定点 \tilde{G}_*, e_* を表すためのパラメータで、

$$\tilde{G}_* = 4\pi\tilde{\alpha}, \quad e_*^2 = (4\pi)^2 \frac{\tilde{\alpha}}{b}, \quad (2.19)$$

となる。シュバルツシルト背景時空の場合との対応性を考えると、式 (2.12) の ω と $\tilde{\alpha}$ の関係性は以下のように、

$$\omega = \frac{1}{4\pi\tilde{\alpha}}, \quad (2.20)$$

になる。

パラメータ b は、 $U(1)$ ゲージ理論におけるディラック場とスカラー場の電荷とその種類に依存して、それらの電荷を (Q_{Di}, Q_{Si}) とすれば、

$$b = \frac{4}{3} \sum_i (Q_{Di})^2 + \frac{1}{3} \sum_i (Q_{Si})^2, \quad (2.21)$$

と書かれる。ここで D と S はディラック場とスカラー場の区別を表し、 i は場の種類を表す。素粒子の標準模型を超えて重力の効果と $U(1)$ ゲージ場を含めた繰り込み理論では、漸近安全な $U(1)$ ゲージ結合定数が得られる事が示唆され、 $U(1)$ ゲージ結合定数の固定点は $b = 41/6$ を与える (文献 [28] を参照)。繰り込み群方程式において宇宙項がゼロとなる場合を考えて、ベクトル場、ディラック場、スカラー場の数をそれぞれ N_V, N_D, N_S と表せば、これらの物質場の数には以下のような関係性が成り立つ。

$$N_V = 1 + 2N_D - \frac{N_S}{2}. \quad (2.22)$$

標準模型の場合には $N_V = 12, N_D = 45/2, N_S = 4$ であるから、上記の関係式は厳密には成り立たないが、ダークマターを表すような粒子を仮定するか、素粒子標準模型を超えた理論を考える状況では (2.22) が成り立つと見なせる可能性が在る。更に、 $SU(5)$ 統一理論の場合を考えてみると、24 のゲージボソンと 2 つのヒッグス場を持つが、ゲージ対称性の破れによって $SU(3) \times SU(2) \times U(1)_Y$ 理論へ遷移し、この場合では $N_V = 24, N_D = 45/2, N_S = 34$ の物質場の数を持つ。この様な場合においても (2.22) で表される関係式は満足されない。しかし、宇宙項が消えるように取った関係式 (2.22) は以下の解析を簡略化してくれる。

文献 [28] の厳密繰り込み群方程式から導かれる $U(1)$ 結合定数を参照して (2.18) と比べる事で、以下の関係式を得る。

$$\frac{1}{\tilde{\alpha}} = \frac{-2N_D - N_S + 4N_V + 29}{3}. \quad (2.23)$$

(2.22) を用いて N_V を除く事で、パラメータ $\tilde{\alpha}$ は $\tilde{\alpha} = 1/(11 + 2N_D - N_S)$ となる。パラメータ $\tilde{\alpha}$ は十分に小さな値 $\tilde{\alpha} \ll 1$ を考えるべきであろう。なぜなら、 $N_D = N_S = 1$ の最も簡易な場合では $\tilde{\alpha} = 1/12$ であり、 $b = 41/6, N_D = 45/2, N_S = 4$ の場合では $\tilde{\alpha} = 1/52$ ($e_*^2 = (4\pi)^2 \tilde{\alpha}/b = 24\pi^2/533 \approx 0.444$) となる。しかし、古典的な特異点解消を考える場合では紫外極限を考えて議論を進めるために、低エネルギー領域におけるパラメータに依存した方法が明らかに良いかどうかと言うよりも、標準模型を超えた状況が特異点解消に役割を果たす考え方と言う方が妥当な予想と言える。ここでは、漸近安全性の自然な拡張の可能性を視野に入れて、パラメータ $\tilde{\alpha}$ は広い範囲で $0 < \tilde{\alpha} \lesssim 1$ と考える事にする。

(2.17) を切断運動量 k_0 から k まで積分し、 $\tilde{G}(k) = k^2 G(k)$ の関係式を用いると、走るニュートン定数は次のようになる。

$$G(k) = \frac{4\pi\tilde{\alpha}G(k_0)}{4\pi\tilde{\alpha} + (k^2 - k_0^2)G(k_0)}. \quad (2.24)$$

以下では、 $k_0 = 0$ として初期条件を $G_0 = G(k_0 = 0)$ とする事で、走るニュートン定数は以下のようなになる。

$$G(k) = \frac{4\pi\tilde{\alpha}G_0}{4\pi\tilde{\alpha} + G_0k^2}. \quad (2.25)$$

これは (2.20) の同一視と合わせて、(2.12) に一致する事が分かる。紫外と赤外における $G(k)$ の極限值は、

$$G(k) \simeq \frac{4\pi\tilde{\alpha}}{k^2} \quad (k \rightarrow \infty), \quad G(k) \simeq G_0 \quad (k \rightarrow 0), \quad (2.26)$$

である。

次に、 $U(1)$ ゲージ結合定数についてであるが、以下のような関数、

$$P(k) := \frac{\tilde{\alpha}G_0k}{4\pi\tilde{\alpha} + G_0k^2}, \quad Q(k) := \frac{b}{(4\pi)^2k} = \frac{\tilde{\alpha}}{e_*^2} \cdot \frac{1}{k}, \quad (2.27)$$

を導入すれば、(2.18) はベルヌーイ方程式の形に書けて次のようになる。

$$\frac{de}{dk} + P(k)e = Q(k)e^3. \quad (2.28)$$

(2.28) を積分する事で一般解は:

$$\frac{1}{e^2(k)} = \exp\left(2\int dk P(k)\right) \left[C_0 - 2\int dk Q(k) \exp\left(-2\int dk P(k)\right) \right]. \quad (2.29)$$

ここで C_0 は積分定数である。類似した形式は文献 [29] で得られている。さらに詳細を調べるためには、 $0 < \tilde{\alpha} < 1$ と $\tilde{\alpha} = 1$ を別々に解析する必要がある。

2.3.2 $\tilde{\alpha} \neq 1 (\tilde{\alpha} > 0)$ の場合

この場合、(2.27) を解 (2.29) に代入する事で $U(1)$ ゲージ結合定数を得られて、

$$\frac{1}{e^2(k)} = C_0 (1 + Dk^2)^{\tilde{\alpha}} + \frac{1}{e_*^2} \frac{\tilde{\alpha}}{(1 - \tilde{\alpha})} (1 + Dk^2) F(1, 1 - \tilde{\alpha}, 2 - \tilde{\alpha}; 1 + Dk^2), \quad (2.30)$$

となる。ここで F は超幾何関数であり、以下では $D := G_0/4\pi\tilde{\alpha}$ とする。文献 [34] に在る超幾何関数の線形変換公式を用いて (2.30) を書き換えると、

$$\frac{1}{e^2(k)} = C (1 + Dk^2)^{\tilde{\alpha}} + \frac{1}{e_*^2} \cdot F\left(1, \tilde{\alpha}, 1 + \tilde{\alpha}; \frac{1}{1 + Dk^2}\right), \quad (2.31)$$

となる。ここで C は積分定数である。この表示から、紫外 $k \rightarrow \infty$ における振る舞いが直ちに理解できる。

$$\frac{1}{e^2(k)} \simeq C \cdot D^{\tilde{\alpha}} \cdot k^{2\tilde{\alpha}} + \frac{1}{e_*^2} + O(k^{2(\tilde{\alpha}-1)}). \quad (2.32)$$

$\tilde{\alpha} > 1$ の時、 $O(k^{2(\tilde{\alpha}-1)})$ の項は $1/e_*^2$ より大きくなるが、そのような状況は固定点の物理的な解析状況から許されない事に注意されたい。

解 (2.31) は更に変形する事が出来て、

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^2(k)} &= C \cdot (1 + Dk^2)^{\tilde{\alpha}} \\ &+ \frac{\tilde{\alpha}}{e_*^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tilde{\alpha})_n}{(n!)^2} \left\{ \psi(n+1) - \psi(\tilde{\alpha} + n) - \log \left(\frac{Dk^2}{1 + Dk^2} \right) \right\} \left(\frac{Dk^2}{1 + Dk^2} \right)^n, \end{aligned} \quad (2.33)$$

である。ここで ψ はディガンマ関数であり、また $(\tilde{\alpha})_n := \Gamma(\tilde{\alpha} + n)/\Gamma(\tilde{\alpha})$ である。赤外領域 $k \rightarrow 0$ において、

$$\frac{1}{e^2(k)} \simeq C - \frac{\tilde{\alpha}}{e_*^2} [\gamma + \psi(\tilde{\alpha})] + \frac{\tilde{\alpha}}{e_*^2} \cdot \log \left(\frac{1 + Dk^2}{Dk^2} \right), \quad (2.34)$$

となる。ここで $\gamma = -\psi(1)$ はオイラー定数である。これは赤外で対数発散を示すが、積分定数 C を抜き出すことができ、その値を古典的な $U(1)$ 結合の e_0 で表される事が分かる。

ここで定数 C について幾つか留意点を述べよう。まず、与えられた $\tilde{\alpha}$ に対して (2.34) の右辺第二項目は有限である。(なぜなら小さな $\tilde{\alpha}$ に対して、 $\tilde{\alpha}[\gamma + \psi(\tilde{\alpha})] = -1 + O(\tilde{\alpha}^2)$ 。) 第三項目は正である。この第三項目は小さな k に対して増大し、定数 C の値に依らず (2.34) を正定値にする。 $C < 0$ ならば (2.32) より (2.31) はその符号を変えるように見えるかもしれない。しかしこれは起こり得ない。なぜなら、微分方程式 (2.18) によれば、その解はゼロの近傍で走ることをやめるからである。 $1/e^2(k)$ がゼロとなる点は特異点に対応し、それを超えて解を拡張する事ができない。正しい解釈は以下の通りである。

- (i) 負の定数 C に対しては、 $U(1)$ 結合は発散しそこで走るのをやめる。これはランダウ極として知られている現象である。
- (ii) 正の C に対しては解は符号を変えないので、 $0 < k < \infty$ の切断エネルギーの範囲で $U(1)$ 結合定数 $e^2(k)$ は符号を変えず漸近的にゼロに近づく。
- (iii) 特別な値 $C = 0$ に対しては、 $1/e^2(k)$ は漸近的に定数 $1/e_*^2$ に近づく (e_*^2 は $U(1)$ 結合定数の上限)。

ここで $k = k_L \equiv 1 \text{ GeV}$ の切断運動量での $U(1)$ 結合定数の固定点 e_* の関係を次式で定義する。

$$\frac{1}{e_0^2} = C(1 + Dk_L^2)^{\tilde{\alpha}} + \frac{1}{e_*^2} F \left(1, \tilde{\alpha}, 1 + \tilde{\alpha}; \frac{1}{1 + Dk_L^2} \right). \quad (2.35)$$

表 2: $\tilde{\alpha} = 1/52$ と $e_*^2 = 24\pi^2/533$ の場合の C と e_0^2 の表

C	-0.7	-0.4	-0.1	0	0.1	0.4	0.7
e_0^2	0.189	0.179	0.170	0.167	0.164	0.156	0.149

$\tilde{\alpha} = 1/52$, $e_*^2 = 24\pi^2/533$ 、ニュートン定数を $G_0 = 6.7 \times 10^{-39}$ GeV に対して、積分定数 C と e_0^2 は表 2 にまとめられる。
 比較対象として、 $\tilde{\alpha} = 2/3$ と $e_*^2 = 24\pi^2/533$ の場合における C, e_0^2 を表 3 にまとめておく。これは微細構造定数 $e^2 = 1/137 = 0.00730$ と比較すべきものである。

表 3: $\tilde{\alpha} = 2/3$ と $e_*^2 = 24\pi^2/533$ とした時の C と e_0^2 の表

C	-0.7	-0.4	-0.1	0	0.1	0.4	0.7
e_0^2	0.00738	0.00737	0.00735	0.00734	0.00734	0.00732	0.00731

図 1 は、表 2 に基づく $U(1)$ 結合定数 (2.30) のグラフである。 $C = 0$ ($e_0^2 = 0.167$) の場合より大きな電荷 $e_0^2 > 0.167$ の場合において $U(1)$ ゲージ結合定数は発散し、 $e_0^2 < 0.167$ ではゼロへ収束する事が分かる。臨界値 $e_0^2 = 0.167$ では有限な値に漸近的に近づく (グラフ 1 の緑の曲線)。

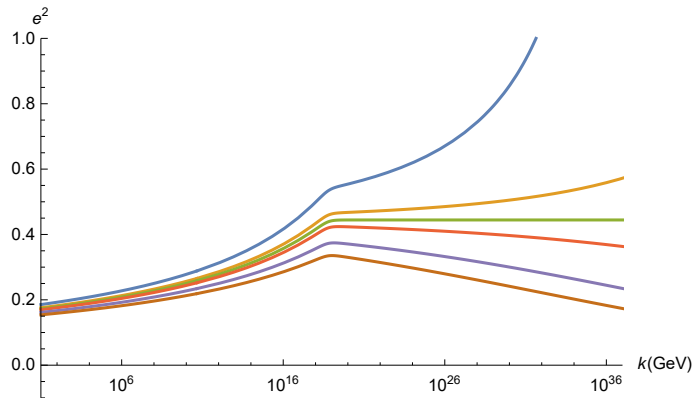


図 1: $\tilde{\alpha} = 1/52$ と $e_*^2 = 24\pi^2/533$ の場合における $e^2(k)$ のプロット。上から下へ向けて各線はそれぞれ $e_0^2 = 0.179, 0.170, 0.167, 0.164, 0.156, 0.149$ と対応する。

2.3.3 $\tilde{\alpha} = 1$ の場合

パラメータ $\tilde{\alpha} = 1$ の場合では、($b = (4\pi)^2/e_*^2$ で)(2.18) を積分する事で、次の一般解を得る:

$$\frac{1}{e^2(k)} = \left(1 + \frac{G_0}{4\pi} k^2\right) \left[C_0 - \frac{1}{e_*^2} \cdot \log \left(\frac{G_0 k^2}{4\pi + G_0 k^2} \right) \right]. \quad (2.36)$$

ここで C_0 は積分定数である。 $\gamma + \psi(\tilde{\alpha} = 1) = 0$ に注意すれば、赤外領域における $e^2(k)$ の振る舞いは (2.34) において、 C を C_0 に置き換え、 $\tilde{\alpha} = 1$ とした場合と同じであることが分かる。再びエネルギースケール $k = k_L \equiv 1 \text{ GeV}$ での $U(1)$ 結合定数を次式で定義する。

$$\frac{1}{e_0^2} = \left(1 + \frac{G_0}{4\pi} k_L^2\right) \left[C_0 - \frac{1}{e_*^2} \cdot \log \left(\frac{G_0 k_L^2}{4\pi + G_0 k_L^2} \right) \right]. \quad (2.37)$$

C_0 が正の場合に、 $U(1)$ ゲージ結合定数の紫外領域における振る舞いは次の通りである。

$$\frac{1}{e^2(k)} \simeq C_0 \frac{G_0 k^2}{4\pi}. \quad (2.38)$$

一方、 C_0 が負の時は、あるエネルギースケールで発散するので、そのエネルギーを超えるともはや理論は成り立たない。 $\tilde{\alpha} = 1$ の場合では $\tilde{\alpha} \neq 1$ の場合のように積分定数 C_0 の臨界値を求める事ができない事に注意したい。

(2.37) を用いると C_0 と e_0^2 は表 4 にまとめられる。(2.36) のゲージ結合定数の振る舞いはグラフ 2 に描かれている。

表 4: $\tilde{\alpha} = 1$ と $e_*^2 = 24\pi^2/533$ における C_0 と e_0^2 の表

C_0	-0.7	-0.4	-0.1	0	0.1	0.4	0.7
e_0^2	0.00493	0.00492	0.00492	0.00491	0.00491	0.00490	0.00490

2.3.4 クレッチマンスケール同一視と量子補正した時空

走るニュートン定数 $G(k)$ と走る $U(1)$ ゲージ結合定数 $e(k)$ を得た。次にすべきことは切断エネルギースケール k と動径距離 r を関係づける事で、その結果として位置に依存した走る $G(r)$ と $e(r)$ が得られる。鍵となるのはスケール同一視 $k(r)$ である。中心では曲率テンソルが発散するので、曲率テンソルから成るスカラー量を用いてスケール同一視を行うのが一つの方法である。しかし、シュバルツシルト時空を背景時空として考えた場合、真空解であるシュバルツシルト時空ではリッチテンソルがゼロとなるのでリッチテンソルを用いたスカラー量による同一視は自明となる。しかし、曲率テンソルの成分は必ずしもゼロではなく、リーマンテンソル (曲率) の縮約から導かれるクレッチマンスカラー量 $K = R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}$ は、

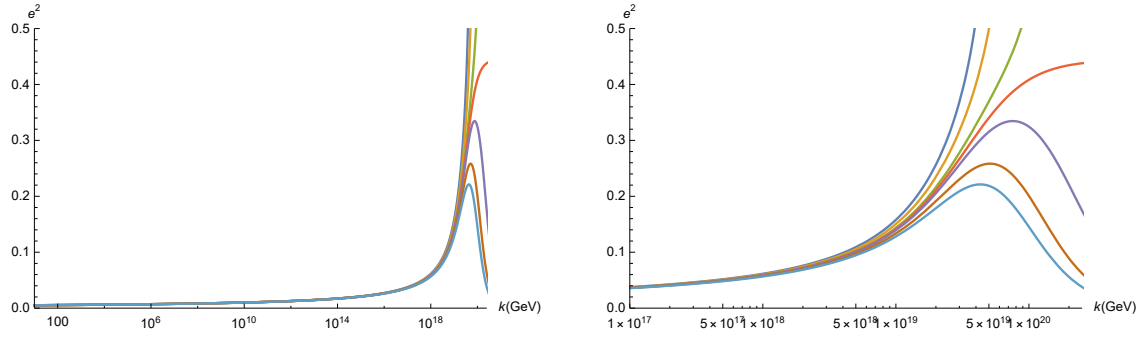


図 2: 表 4 に与えられた e_0 を用いて $e^2(k)$ を描いたグラフ。上から下へ向けて各グラフは表 4 の左から右の値に対応する。左側のグラフは $k = 10 \sim 3 \cdot 10^{20}$ GeV のエネルギースケールで、右側のグラフは $k = 10^{17} \sim 3 \cdot 10^{20}$ GeV のエネルギースケールの範囲で描かれているグラフである。

文献 [14] で議論されるように四次元の運動量次元を持つ座標変換で普遍な量である。そこで、クレッチマンスカラー量 (背景時空の曲率) を用いてスケール同一視を決めると、

$$k^4 = \chi^4 K(r), \quad (2.39)$$

となる。ここで χ は任意定数である。

ライスナー・ノルドストローム計量から与えられるリッチテンソルはゼロではない。スケール同一視にリッチスカラーを用いた場合やスカラー曲率を用いた場合などの任意性があるが、上記のように (2.39) を用いることにする。この場合のクレッチマンスカラーは背景時空であるライスナー・ノルドストローム計量から与えられる。この方法を用いる事で、文献 [10, 14] で与えられた結果である量子補正した真空ブラックホール解の場合と明確に比較可能となる。異なるスケール同一視による結果は後に述べる事にしたい。

古典的なライスナー・ノルドストローム計量 (2.9) と (2.16) を用いる事で、クレッチマンスカラーは、

$$K_{\text{CRN}}(r) = \frac{8G_0^2}{r^8} (6M^2r^2 - 12Me_0^2r + 7e_0^4), \quad (2.40)$$

である。ここで電荷 e_0 は $U(1)$ ゲージ結合定数 (2.35) の低エネルギーにおける電荷 e_0 と考えて良い。(2.40) を (2.39) に代入する事で、クレッチマンスケール同一視を得る。

$$k^2(r) = \frac{2\sqrt{2}\chi^2G_0}{r^4} \sqrt{6M^2r^2 - 12Me_0^2r + 7e_0^4}. \quad (2.41)$$

中心近傍と遠方における $k^2(r)$ の振る舞いは以下のようになる。

$$k^2(r) \simeq \frac{2\sqrt{14}\chi^2G_0e_0^2}{r^4} \quad (r \rightarrow 0), \quad k^2(r) \simeq \frac{4\sqrt{3}\chi^2G_0M}{r^3} \quad (r \rightarrow \infty). \quad (2.42)$$

(2.41) を走る結合定数 $G(k)$ と $e(k)$ に代入する事で、位置に依存した結合定数 $G(r)$ と $e(r)$ が得られる。それを古典的な計量 (2.16) の G_0, e_0 と置き換える事で、量子補正したラプス関数は以下の通りになる。

$$f(r)_{\text{QRN}} = 1 - \frac{2M}{r}G(r) + \frac{G(r)e^2(r)}{r^2}. \quad (2.43)$$

量子補正したラプス関数の中心近傍 $r = 0$ の振る舞いを、 $\tilde{\alpha} \neq 1$ と $\tilde{\alpha} = 1$ の場合に分けて考察する。その際に、 $G(r)$ の次のような漸近的振る舞いに注意する。

$$G(r) \simeq A(\tilde{\alpha})r^4 + O(r^5), \quad A(\tilde{\alpha}) := \frac{2\pi\tilde{\alpha}}{\sqrt{14}\chi^2 G_0 e_0^2}. \quad (2.44)$$

2.3.5 $\tilde{\alpha} \neq 1$ の場合

(2.32) と (2.42) を用いると、中心近傍 $r \rightarrow 0$ において、

$$e^2(r) \simeq 4\pi B(\tilde{\alpha})r^{4\tilde{\alpha}} + O(r^{4\tilde{\alpha}+1}). \quad (2.45)$$

である。ここで定数 $B(\tilde{\alpha})$ は、

$$\frac{1}{B(\tilde{\alpha})} := 4\pi \left(\frac{\sqrt{14}\chi^2 G_0^2 e_0^2}{2\pi\tilde{\alpha}} \right)^{\tilde{\alpha}} C, \quad (2.46)$$

としており、 C は (2.35) によって与えられる。

(2.44) と (2.45) を (2.43) に代入して、量子補正したラプス関数 $f(r)_{\text{QRN}}$ は、中心近傍で以下のように振る舞う事が分かる。

$$f(r)_{\text{QRN}} \simeq 1 - 2MA(\tilde{\alpha})r^3 + A(\tilde{\alpha})B(\tilde{\alpha})r^{4\tilde{\alpha}+2}. \quad (2.47)$$

$\tilde{\alpha} > 0$ であるから、ラプス関数 $f(r)_{\text{QRN}}$ が正則で在るだけでなく、曲率スカラーも中心で消えるため、時空自身が正則となる。正則性に関する考察は更に後で議論する。

十分遠方 $r \rightarrow \infty$ では、(2.34) の形式を見れば、

$$e^2 \simeq \frac{e_*^2}{\tilde{\alpha} \log(1/Dk^2)}, \quad (2.48)$$

となる。よって、(2.26) と (2.42) から、十分遠方における $f(r)_{\text{QRN}}$ の振る舞いは以下のとおりである。

$$f(r)_{\text{QRN}} \simeq 1 - \frac{2MG_0}{r} + \frac{G_0 e_*^2}{r^2} \cdot \frac{1}{\tilde{\alpha} \log(\pi\tilde{\alpha}r^3/\sqrt{3}\chi^2 G_0^2 M)}. \quad (2.49)$$

十分遠方ではシュバルツシルト時空の場合と同様な意味で漸近平坦となる事が分かる。しかしながら、十分遠方では (2.49) の第三項目の分母に対数が現れるために、クーロンポテン

シャルに相当する個所が古典的な場合より急激に減少する。その結果、十分遠方で古典的なライスナー・ノルドストローム時空に近づくとは言えない事が分かる。

量子補正したライスナー・ノルドストロームブラックホールはパラメータの値によって、二つの地平面 (事象の地平面とコーシー地平面) を持つ場合、エクストリーマルな場合、地平面がない場合を表すことができる。これはグラフ 3 を見る事で分かる。更に表面重力について考察してみれば、コーシー地平面上における表面重力の大きさは事象の地平面上よりも大きくなる事がグラフ 4 から分かる。そのため、文献 [35,36] より、量子補正したライスナー・ノルドストロームブラックホールではマスインフレーションが起き、コーシー地平面が不安定となる事が示唆される。

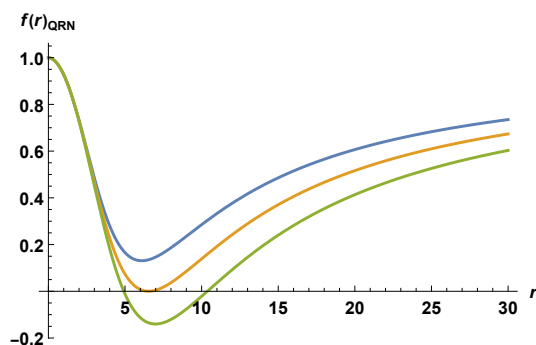


図 3: プランク単位で $G_0 = 1$ と $\chi = 1$ としたラプス関数 $f(r)_{QRN}$ のグラフ。各パラメータは $\tilde{\alpha} = 1/52$, $e_*^2 = 24\pi^2/533$, $e_0^2 = 0.164$ ($C = 0.1$) としており、上から下の線にかけて質量 M が増加する。

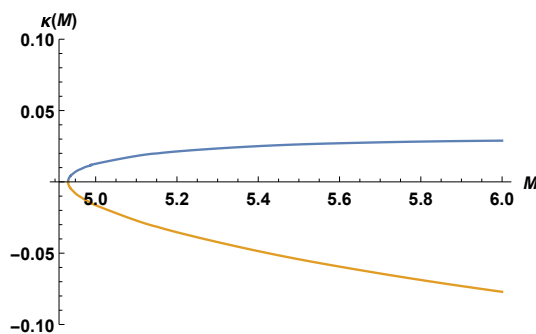


図 4: 量子補正したライスナー・ノルドストロームブラックホールの表面重力。横軸は質量 M で書かれていて、質量はグラフ 3 によって与えられた。各パラメータは $G_0 = 1$, $\chi = 1$, $\tilde{\alpha} = 1/52$, $e_*^2 = 24\pi^2/533$, $e_0^2 = 0.164$ ($C = 0.1$) としており、青線は事象の地平面上における表面重力を表し、褐色 (オレンジ) の線はコーシー地平面上における表面重力を表す。

2.3.6 $\tilde{\alpha} = 1$ の場合

ここから $\tilde{\alpha} = 1$ の場合について考える。十分短い距離では (2.26) と (2.38) を用いて、 $G(k) \simeq 4\pi/k^2$ と $e^2(k) \simeq 4\pi/C_0 G_0 k^2$ だから、(2.42) のスケール同一視を使えば以下の形式を得る。

$$G(r) \simeq \frac{2\pi}{\sqrt{14}\chi^2 G_0 e_0^2} r^4, \quad e^2(r) \simeq \frac{2\pi}{\sqrt{14}\chi^2 G_0^2 C_0 e_0^2} r^4. \quad (2.50)$$

ゆえに中心近傍ではラプス関数は次の通りに振る舞う。

$$f(r)_{\text{QRN}} = 1 - \frac{4\pi M}{\sqrt{14}\chi^2 G_0 e_0^2} r^3 + \frac{2\pi^2}{7\chi^4 G_0^3 C_0 e_0^4} r^6. \quad (2.51)$$

この場合も、量子補正したこの時空は中心 $r = 0$ で正則である。

十分遠方では、ラプス関数 $f(r)_{\text{QRN}}$ は $\tilde{\alpha} \neq 1$ とした関数 (2.49) と同様な振る舞いが考えられるために、この場合も量子補正した時空は漸近平坦である。しかし、 $\tilde{\alpha} \neq 1$ の場合と同様に古典的なライスナー・ノルドストローム時空に近づくわけではない。

パラメータ $\chi = 1$, $e_*^2 = 24\pi^2/533$, $e_0^2 = 0.00491$ としてラプス関数を描くと図 5 を得る。質量が減少するにつれて量子補正した計量において、その地平面の数は 2 から 1 そして地平面が無い状況へと変ずる。ラプス関数の振る舞いは $\tilde{\alpha} \neq 1$ の場合とよく似た形式となる。

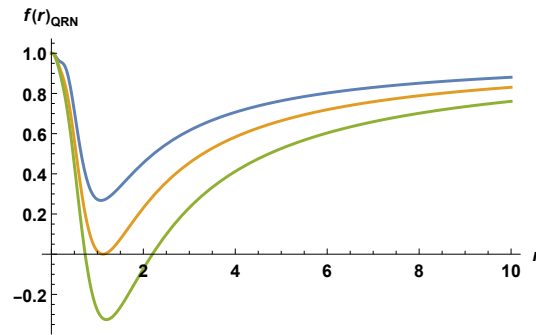


図 5: プランク単位で $G_0 = 1$ と $\chi = 1$, $e_*^2 = 24\pi^2/533$, $e_0^2 = 0.00491$ のパラメータで描いたラプス関数 $f(r)_{\text{QRN}}$ のグラフ。上の線から下の線にかけて、 $M = 0.6$ (青色: 地平面無し)、 $M = 0.85$ (褐色: エクストリーマル)、 $M = 1.2$ (緑色: 二つの地平面) へと変化している。

2.3.7 一般化されたスケール同一視と紫外極限

ここまでのところ、古典的な計量から導かれるクレッチマンスカラー量 (2.40) を用いたスケール同一視 (2.39) による量子補正を考えた。そして、(2.40) から量子補正した時空を決め、その大域構造を調べた。本節では、スケール同一視の一般化を試みて、量子補正したブラックホール時空の正則性について議論したい。

まずは、静的球対称時空に対してラプス関数の一般形を考えて、

$$f(r) = 1 - \lambda r^\nu, \quad (2.52)$$

とする。ここで λ と $\nu (\neq 0)$ は定数である。ここから直ちにスカラー曲率やクレッチマンスカラー量が計算できて、

$$R = \lambda(\nu + 1)(\nu + 2)r^{\nu-2}, \quad K = \lambda^2(\nu^4 - 2\nu^3 + 5\nu^2 + 4)r^{2\nu-4}, \quad (2.53)$$

が得られる。したがって、もし $\nu > 2$ であれば R や K だけでなく、曲率テンソルから構成される全ての曲率スカラー量は中心で消える。これは標準的な正規直交基底 $\{e^{(\alpha)}\} = \{-f(r)^{1/2}dt, f(r)^{-1/2}dr, rd\theta, r \sin\theta d\phi\}$ を用いて、曲率テンソルの成分を計算すると次のように、

$$R_{(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)} = cr^{\nu-2}, \quad (2.54)$$

となることから直ちにわかる。ここで c は定数である。つまり曲率成分は $\nu > 2$ では中心で消えて、これは「ミンコフスキー核」となる事が分かる。一方で、 $\nu = 2$ とした場合は、中心核は、 $\Lambda > 0$ では「ド・ジッター核」となり、 $\lambda < 0$ の場合は「反ド・ジッター核」である。 $0 < \nu < 2$ の場合を考えると、ラプス関数 (2.52) は中心 $r = 0$ で正則だが時空自身は中心で特異点となる。ただし、 $0 < \nu < 2$ の場合は $\nu < 0$ となる古典的なシュバルツシルト計量やライスナー・ノルドストローム計量よりは発散の仕方が穏やかなので「弱い特異点」と言える。

ここから、紫外領域におけるスケール同一視の一般形として、次のようなべき的振る舞いを仮定する。

$$k \sim \frac{\xi}{r^p}. \quad (2.55)$$

ここで p は正の定数とする。古典的なライスナー・ノルドストローム時空のクレッチマンスカラーによるスケール同一視 (2.41) は $p = 2$ の時に対応する。より一般の $p > 0$ の場合では、(2.55) に更なる次元を持ったパラメータを導入して議論すべきかもしれないが、簡単のためにこの様な雑さを除くことにした。

古典的な背景時空の持つパラメータ (G_0, e_0) に加えて、パラメータ $(p, \tilde{\alpha})$ が量子補正のありようを特徴づけると見なすことができる。スケール同一視 (2.55) を用いると、紫外領域における走る結合定数は (2.26) から $G(r) \sim r^{2p}$ 、(2.32) から $e^2 \sim r^{2p\tilde{\alpha}}$ を得る。よって、紫外領域における量子補正したラプス関数は、

$$f(r) \sim 1 - \lambda_+ r^{2p-1} + \lambda_- r^{2(p\tilde{\alpha}+p-1)}, \quad (2.56)$$

のように振る舞う。ここで λ_\pm は定数である。簡単に述べておくと、 $\lambda_+ > 0$ は重力の量子効果 (相互作用) の強さを表し、 $\lambda_- > 0$ は電磁場の量子効果 (相互作用) の強さに対応

する。例えば、クレッチマンスカラー量を用いた量子補正の議論では ((2.47) に在るように) $\lambda_+ = 2MA(\tilde{\alpha})$, $\lambda_- = A(\tilde{\alpha})B(\tilde{\alpha})$ となる。

(2.56)、(2.52)、(2.53)、(2.54) より、 $2p - 1 \geq 2$, $2(p\tilde{\alpha} + p - 1) \geq 2$ の場合に中心が正則となる事が分かる。より詳細に考察してみると、中心核の構造は次のように分類され得る (図: 6 を参照されたい)。

- $p > \frac{3}{2}$, $\tilde{\alpha} > \frac{2}{p} - 1$: ミンコフスキー核
- $p = \frac{3}{2}$, $\tilde{\alpha} > \frac{1}{3}$: ド・ジッター核
- $p > \frac{3}{2}$, $\tilde{\alpha} = \frac{2}{p} - 1$: 反ド・ジッター核
- $p = \frac{3}{2}$, $\tilde{\alpha} = \frac{1}{3}$: ミンコフスキー、(反)ド・ジッター核のどちらか一方
- $0 < p < \frac{3}{2}$, $\tilde{\alpha} > 0$: 弱い特異点

$p = 3/2$, $\tilde{\alpha} = 1/3$ に対応する点では時空は、 $\lambda_+ > \lambda_-$ のときにド・ジッター核、 $\lambda_+ < \lambda_-$ のときに反ド・ジッター核、 $\lambda_+ = \lambda_-$ のミンコフスキー核となる。 $p = 3/2$ の線上ではド・ジッター核は動径距離を用いたスケール同一視もしくはクレッチマンスケール同一視によって構成される量子補正したシュバルツシルト計量が相当する (表 1 参照)。また、反ド・ジッター核は $3/2 < p < 2$ の範囲において現れる。反ド・ジッター核の出現は走る $U(1)$ 結合を含めた場合の特徴である。 $0 < p < 3/2$ の時は弱い特異点となる。ここで言う「弱い特異点」とは、量子補正した計量のクレッチマンスカラー量が中心近傍で、古典的な場合よりも穏やかな発散である事を意味している。

2.4 量子補正した静的球対称荷電ブラックホールのまとめ

本章では、基本論文 [I] に基づいて、漸近安全量子重力における量子補正した静的球対称荷電ブラックホールの解析を行った。まず、宇宙項がない状況を考えて、厳密線り込み群方程式から導出される走るニュートン定数と走る $U(1)$ 結合定数を導いた。そして、背景時空の曲率を基にするクレッチマンスカラー量を用いたスケール同一視を行う事で位置に依存した結合定数を得た。これらの結合定数で計量に含まれる古典的結合定数を置き換える事で、量子補正したライスナー・ノルドストロームブラックホールを与えた。このブラックホール時空は走るニュートン結合と走る $U(1)$ 結合定数を取り入れ、その量子効果によって与えられるパラメータ $\tilde{\alpha}$ や固定点 e_*^2 を含む。量子補正したライスナー・ノルドストロームブラックホールの構造は古典的な場合と変わらない振る舞いを見せるが、紫外極限では量子効果により中心の特異点は解消されて、ド・ジッター核、反ド・ジッター核、ミンコフスキー核、あ

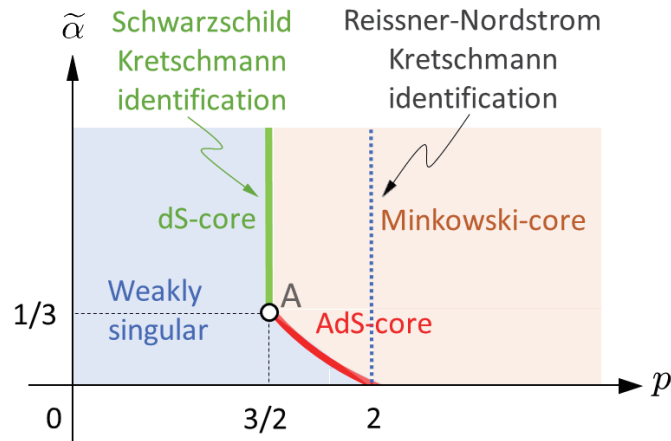


図 6: 褐色で表される領域は $(p, \tilde{\alpha})$ 上において $p > 3/2$, $\tilde{\alpha} > 2/p - 1$ によって表される。そして量子補正したブラックホールはこの領域ではミンコフスキー核を持つと考えられる。太い赤色で表される境界線は $\tilde{\alpha} = 2/p - 1$ に沿ったもので、(反)ド・ジッター核を持つことが期待される。一方で、点 A から出ている緑の線 $p = 3/2$ の沿った場合はド・ジッター核が期待される。 $(3/2, 1/3)$ を通る境界線と褐色側にかけて中心は (反)ド・ジッター核かミンコフスキー核となるはずだ。また水色の領域は弱い特異点を表す。

るいは弱い特異点となる。地平面に注目すると、二つの地平面 (コーシー地平面と事象の地平面) を持つ場合と、一つの地平面 (エクストリーマル地平面) を持つ場合と、質量パラメータを小さくすることで地平面は無くなる場合がある事が分かった。また、量子補正したライスナー・ノルドストロームブラックホールのクーロンポテンシャルは古典的な場合より早く赤外領域で消えるため、赤外領域ではこの時空は漸近平坦であるが古典的なライスナー・ノルドストロームブラックホールの十分遠方と一致するとは言えない。

ここでは、宇宙項がゼロとなる設定を基に量子補正を考えた。宇宙項の繰り込みの量子効果は短い距離で重要ではないと考えるかもしれないが、そうとは限らない。文献 [14] で扱われるようにシュバルツシルト・(反)ド・ジッター時空の量子補正では、宇宙項の量子効果が考察されているが、その結果特異点が完全には除かれないことが分かった。この結果は特異点が解消される文献 [10] とは対象的な結果であるので、宇宙項の量子効果を含んだ時空の場合、その特異点解消の議論は更に注意深く調べる課題である。この問題点は一旦置いておいて、本解析においては Λ はゼロの場合で解析を行った。そのおかげで、走る $U(1)$ 結合を超幾何関数で表すことが出来た。

ここでの量子補正したライスナー・ノルドストロームブラックホールの結果は、紫外極限

においてド・ジッター核を与えるクレッチマンスケール同一視、もしくは固有距離を用いたスケール同一視によって与えられる量子補正したシュバルツシルト時空と比べられる。相互作用の種類や状況に依存して、中心の核もその種類を変える可能性が示唆されるので、今後の発展として、 $SU(N)$ ヤン・ミルズ理論の一般的な結合定数を考えて、その量子補正されたブラックホールの帰結と中心核を考察する事も興味深い。

ここでは、普遍的な物理的特徴を持つスケール同一視として、クレッチマンスケール同一視を用いた。この種のスケール同一視が特異点解消にどのように依存するかを考える事は自然な問いである。以下ではこのスケール同一視に関する妥当性をもう少し詳しく述べる。2.2に遡ると、様々なスケール同一視の方法が在ると述べた。例えば、(i) 中心に向かう時間的(もしくは光的測地線に沿った)観測者の固有距離を用いてスケール同一視する方法や、(ii) 普遍的な曲率スカラー量を用いたスケール同一視が在る。(i) に関しては、特異点に向かっていく観測者の経路を基にしてスケール依存性を決める方法である。後者の(ii)に関しては、普遍的な曲率スカラー量を用いてスケール依存性を決めるのであるが、採用する曲率スカラー量の選択肢は多岐に渡る。例えば、以下のようなスカラー量が考えられる。

$$\{R, R^\alpha_\beta R^\beta_\alpha, R^\alpha_\beta R^\beta_\gamma R^\gamma_\alpha, R^\alpha_\beta R^\beta_\gamma R^\gamma_\delta R^\delta_\alpha, R^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} R^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}, R^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} R^{\gamma\delta}_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma}_{\alpha\beta}, \dots\}.$$

文献 [37] の付録 A を参考にして、普遍的な曲率スカラー量の詳細を見る事にすると、クレッチマンスカラー量 $K = R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}$ は最も簡易な(ii)の選択で物理的なものと考えられる。また、真空の背景時空として $R_{\alpha\beta} = 0$ となるシュバルツシルト計量を考えると、その特異点はクレッチマンスケール同一視に依って解消され、文献 [10] と同じく中心でド・ジッター核を持つ。より複雑な普遍的な曲率スカラー量でスケール同一視を考える事もできるであろう。

スケール同一視の紫外での一般的振る舞いを見るために、 $k \sim 1/r^p$ の量子補正を考えた。そして、二つのパラメータ $(p, \tilde{\alpha})$ の空間上で、ド・ジッター核、反ド・ジッター核が、ミンコフスキー核と弱い特異点の領域の間に現れることが分かった。ド・ジッター核は、 $p = 3/2, 1/3 < \tilde{\alpha}$ の場合に現れる事が分かる。これは丁度シュバルツシルト時空でクレッチマン同一視した場合と一致している。また、反ド・ジッター核は $3/2 < p < 2$ と $\tilde{\alpha} < 1/3$ の状況で現れる。ただし反ド・ジッター核が現れるためには $U(1)$ ゲージ結合定数が含まなければならない。

スケール同一視と物理的な帰結についてももう少し詳しく考察する。ラプス関数(2.56)で表される計量を $\nu < 0$ の時に考えると、 $f(r) \sim r^{-|\nu|}$ であり、古典的なシュバルツシルトの場合には $\nu = -1$ で、古典的なライスナー・ノルドストロームの場合は $\nu = -2$ になる。中心近傍における固有距離は(表 1 から) $\sim r^{(|\nu|+2)/2}$ となり、光的な経路では $\sim r$ となる。一方、 n 個の曲率テンソルにより構成される曲率スカラー $K_n = R^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} \dots R^{\rho\sigma}_{\alpha\beta}$ は典型的には $r^{-n(|\nu|+2)}$ と振る舞う。ゆえに、同じ古典的な時空から始めても、スケール同一視のために異なった経路や異なった曲率スカラー K_n を用いると、量子補正した時空は異なったものとなる。例えば、量子補正したライスナー・ノルドストローム時空は $p = 2$ で正則な核を持つ。しかしながら光的な経路 $p = 1$ でスケール同一視を試みると、その量子補正した中心は弱い特異点である。さらに、曲率スカラー量 K_n を適切に選ぶと(適当な次元を持つパラメータが与えら

れたとして) 必ず特異点を解消する事ができるように思われる。しかしながら、特異点解消については次の点に留意する必要がある。もし、全ての特異点が解消される量子重力理論が在ったとすると、そのような理論は病理的な側面も持ちうる。例えば、負の質量を持つシュバルツシルト解の特異点が解消されるとすると、そのような重力理論は正則な時空でかつ、全エネルギーが負であるような解を持つことになる。したがって、そのような理論は安定な基底状態を持ちえない事になる [38]。

反ド・ジッター核が現れた事は、非常に興味深い。特に文献 [39] が提案したように、漸近安全性は超弦理論の紫外領域と結びついているとすると、反ド・ジッター領域はより自然に理論に現れると予想されるからである。この方面について、更に研究する事が望まれる。

3 回転ブラックホールの量子補正とスケール同一視

本章では、基本論文 [II] に基づき、回転ブラックホールなど、球対称以外のブラックホールの量子補正におけるスケール同一視の方法について考察する。特に、ブラックホール熱力学の第一法則こそが物理的に適切なスケール同一視の指導原理であることを提案する。この目的のために、走るニュートン結合定数は動径座標の関数と、もし古典解が角運動量を持つ場合は、角運動量パラメータの関数だと仮定して、スケール同一視が熱力学第一法則と整合するためにはどのような条件が必要かを議論する。結論は、走るニュートン結合定数は事象の地平面の面積の関数となればよいという事が示される。本節では、高次元ブラックホール等様々なブラックホールを考え、我々の提案が普遍的であり、ここで検討した全ての例に対して成り立つことを示す。面積は幾何学量であり、角度に依存する場合の問題点を解決する。しかも、エントロピー公式は次のような普遍的な形式で表されることが分かる。

$$S = \int \frac{dx_+}{4G(x_+)}.$$

ここで x_+ は事象の地平面の表面積を表す。これは、カー時空だけでなく、我々が調べた全ての量子補正したブラックホールにおける普遍的なエントロピー公式を与える。これは、走るニュートン結合定数が定数の場合に、ベッケンシュタイン・ホーキング温度 [43,44] を再現する。このことは、我々の提案が正しい事を示す強力な証拠であると見なすことができる。ただし、このスケール同一視の方法は地平面近傍で成り立つと見なすべきものであり、厳密にいうと特異点へ向けての紫外極限が取れない。

本章の構成は以下のとおりである。3.1 節では、走るニュートン結合定数をまとめ、量子補正の準備を行う。3.2 節では、量子補正したカー・(反)ド・ジッター時空の場合を最も一般的な例に挙げて、熱力学第一法則の可積分条件を満たすためには、スケール同一視は事象の地平面の面積関数で書かれなければならない事を示す。また、角運動量がゼロの極限において、量子補正したシュバルツシルト時空では、エントロピーは動径距離のみで表される。このような球対称の場合にはライスナー・ノルドストロームの場合も含めて、我々の提案は常に成り立つと考えられる。3.3 節では、文献 [40] から、二つの角運動量を持つ5次元のマイヤース・ペリーブラックホールの場合を考えて、熱力学第一法則における可積分条件からスケール同一視は面積関数で表されることを確認する。3.4 節では、カルツァ・クラインブラックストリング解 [41,42] の場合を検討する。3.5 節では本章の内容をまとめる。

3.1 走る結合定数の概説

まずは重力の作用から考える事にする。 $c = \hbar = 1$ の単位を用いてアインシュタインの作用を以下のように書き下す。

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda). \quad (3.1)$$

ここで、 $G = G_0$ はニュートン定数で $\Lambda = \Lambda_0$ は宇宙項を表している。

量子効果により走るニュートン結合定数 $G(k)$ と宇宙項 $\Lambda(k)$ がエネルギースケール k に依存する様になる [1, 4, 5, 14]。簡易のために、宇宙項は固定点であるか、もしくは十分小さい状況を考えている。走るニュートン結合定数を求めるための厳密繰り込み群方程式は、無次元の重力結合 $\tilde{G}(k) = k^2 G(k)$ において、以下のようになる。

$$k\partial_k \tilde{G}(k) = 2\tilde{G}(k) + \frac{B_1 \tilde{G}^2(k)}{1 + B_2 \tilde{G}(k)} = 2\tilde{G}(k) \frac{1 + \omega' \tilde{G}(k)}{1 + (\omega + \omega') \tilde{G}(k)}, \quad \omega' = \frac{1}{2} B_1 + B_2, \quad \omega = -\frac{1}{2} B_1. \quad (3.2)$$

ここで、定数 B_1 と B_2 は、重力の繰り込みを行う際に厳密繰り込み群の近似計算及び、熱核展開の方法によって導かれる係数である。ここでは、 $B_1 = -\frac{8}{\pi}(1 - \frac{\pi^2}{144})$ と $B_2 = \frac{2}{3\pi}$ を用いる。すると、無次元のニュートン結合定数 $\tilde{G}(k)$ は以下のように与えられる。

$$\tilde{G}(k) [1 + \omega' \tilde{G}(k)]^{\omega/\omega'} = \tilde{G}(k_0) [1 + \omega' \tilde{G}(k_0)]^{\omega/\omega'} (k/k_0)^2. \quad (3.3)$$

ここで k_0 は特定の切断エネルギーを表す。以下では、解析的な結果を得るために、 $\omega' \approx -\omega$ となる $B_2 \approx 0$ の近似を行うと、

$$\tilde{G}(k) = \frac{\tilde{G}(k_0)(k/k_0)^2}{1 - \omega \tilde{G}(k_0) + \omega \tilde{G}(k_0)(k/k_0)^2} \Rightarrow G(k) = \frac{G(k_0)}{1 - \omega G(k_0)k_0^2 + \omega G(k_0)k^2}, \quad (3.4)$$

となる。この無次元の走るニュートン結合定数は、厳密繰り込み群の局所熱核展開の近似手法を用いて導かれるベータ関数の結果と同様である。ここで、赤外極限で $k_0 = 0$ 及び $G_0 = G(k_0)$ と置くと、

$$G(k) = \frac{G_0}{1 + \omega G_0 k^2}, \quad (3.5)$$

が得られる。以下ではニュートン定数 $G = G_0$ 、宇宙項 $\Lambda = \Lambda_0$ とする。また、走る結合定数は $G(k), \Lambda(k)$ と表記して、幾つかの量子補正したブラックホール解の熱力学第一法則の議論を行う。

3.2 カー・(反)ド・ジッターブラックホール

まず始めに、カー・(反)ド・ジッター解を考えて、Boyer-Linquist 座標を用いてその線素を書き下すと、

$$ds^2 = -\frac{\Delta_r}{\Sigma} \left(dt - \frac{a \sin^2 \theta}{\Xi} d\varphi \right)^2 + \frac{\Sigma}{\Delta_r} dr^2 + \frac{\Sigma}{\Delta_\theta} d\theta^2 + \frac{\Delta_\theta}{\Sigma} \sin^2 \theta \left(a dt - \frac{r^2 + a^2}{\Xi} d\varphi \right)^2, \quad (3.6)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \Delta_r &= (r^2 + a^2) \left(1 - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) - 2GMr, & \Delta_\theta &= 1 + \frac{\Lambda}{3} a^2 \cos^2 \theta, \\ \Sigma &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, & \Xi &= 1 + \frac{\Lambda}{3} a^2, \end{aligned} \quad (3.7)$$

と書かれる。パラメータ a はカーパラメータで角運動量に比例する量である。古典的な場合としてニュートン定数 G は切断運動量に依存しない場合を考えて、ホーキング温度とエントロピーを計算すれば、

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{r_+}{4\pi(r_+^2 + a^2)} \left(1 - \frac{a^2}{r_+^2} - \frac{\Lambda a^2}{3} - \Lambda r_+^2 \right), \quad S = \frac{\mathcal{A}}{4G} = \frac{\pi(r_+^2 + a^2)}{G\Xi}. \quad (3.8)$$

が得られる。ここで、 κ は以下のように定義される地平面の表面重力を表している。カー・(反)ド・ジッターブラックホールは定常軸対称解であり、定常性のキリングベクトルを ∂_t 、軸対称性のキリングベクトルを ∂_φ とすると、その線形結合 $\chi = \partial_t + \Omega_H \partial_\varphi$ が地平面上で光的で地平面と接するとき、 Ω_H は地平面上の角速度を意味する。また、地平面上に置いて、キリングベクトル χ は光的となるので $\chi_\mu \chi^\mu = 0$ である。このとき地平面上の表面重力を書き下す:

$$\kappa = \sqrt{-\frac{(\nabla_\mu \chi_\nu)(\nabla^\mu \chi^\nu)}{2}}. \quad (3.9)$$

地平面は $\Delta_r(r_+) = 0$ となる $r = r_+$ で決まる。表面重力 κ は r_+ で評価する。(3.8) はベッケンシュタイン・ホーキングエントロピーを表す [43, 44]。これらの熱力学的な量は熱力学第一法則を満足し、

$$dE = TdS + \Omega dJ, \quad (3.10)$$

である。ここで、

$$E = \frac{M}{\Xi^2}, \quad J = \frac{Ma}{\Xi^2}, \quad \Omega = \frac{a(1 - \Lambda r_+^2/3)}{r_+^2 + a^2}. \quad (3.11)$$

である。また、カー・(反)ド・ジッター時空に対するクレッチマンスカラー量 $K = R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}$ を計算すると、

$$K = \frac{8}{3}\Lambda^2 + \frac{48M^2G^2(r^6 - 15a^2 \cos^2 \theta r^4 + 15a^4 \cos^4 \theta r^2 - a^6 \cos^6 \theta)}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^6}, \quad (3.12)$$

であり、明らかに角度座標 θ に依存する事に注意されたい。

量子補正したブラックホールを考える際に、走るニュートン結合定数を、適切なスケール同一視を用いて、長さのスケールに依存した形式に書き換え、その結合定数を古典的な計量に含まれるニュートン定数と置き換える事で量子補正した時空が与えられる。球対称の時は、文献 [1, 14] で行ったように、クレッチマンスカラーは角度座標に依らず、妥当なスケール同一視を与える。しかし、ここで扱うように回転ブラックホールの場合は、クレッチマンスカラー (3.12) は角度座標に依存しており、スケール同一視に用いるのに適切ではない。先行研究 [10] と [14] では、回転ブラックホールの場合には角度座標を適当に固定して、クレッチマンスカラーをスケール同一視に用いているが、そのままでは熱力学第一法則が満たされない。そのため、温度やエントロピーの定義を変更しなければならない。しかしながら、そのような変更はホーキング温度の幾何学的な解釈を無くしてしまい不自然である。ここでは、

量子補正したブラックホールにおいても温度の公式 $T = \kappa/2\pi$ が正しいと仮定し、走る結合定数は質量パラメータ M に依存すると仮定する。より見通しの良い方法として、質量 M の代わりに、事象の地平面の半径 r_+ を用いる事にする。なぜなら、地平面を決める方程式 $\Delta_r(r_+) = 0$ を用いて、 $M(r_+, a)$ を次のように決める事ができるからである。

$$M(r_+, a) = \frac{r_+^2 + a^2}{2Gr_+} \left(1 - \frac{\Lambda}{3} r_+^2 \right). \quad (3.13)$$

熱力学第一法則より、熱力学関数としてのエントロピー S が存在するとすれば、その変分は次式から得られるはずである。

$$dS = \partial_+ S dr_+ + \partial_a S da. \quad (3.14)$$

ここで ∂_+ は事象の地平面の動径距離 r_+ の偏微分である。ここで、 dM と dJ についての同様の式から、

$$\partial_+ S = \frac{\partial_+ M - \Omega \partial_+ J}{T}, \quad \partial_a S = \frac{\partial_a M - \Omega \partial_a J}{T}. \quad (3.15)$$

よって、熱力学第一法則が成り立つためには、次のような可積分条件が満たされなければならない。

$$\partial_a (\partial_+ S) = \partial_+ (\partial_a S). \quad (3.16)$$

切断エネルギースケール k と時空の座標の関係は、量子補正した解を与えるために必要不可欠であるが、その関係を我々は上記の熱力学第一法則が満たされるように与えられるべきであり、エントロピーの可積分条件が満たされるようなスケール同一視が物理的に妥当であると考えられる。

3.2.1 カー・ブラックホール

まず、最も簡単な $\Lambda = 0$ のカーブラックホールを考えて、走る結合定数 G は動径距離 r と角度座標 θ に依存すると仮定しよう。すると、計量 (3.7) に対して $G = G(r, \theta)$ が含まれており、リッチスカラーは次のように導かれる。

$$R = \frac{2M}{\Sigma} \left[r \partial_r^2 G(r, \theta) + 2 \partial_r G(r, \theta) - \frac{Mr^2}{\Delta_r^2} \left(\partial_\theta G(r, \theta) \right)^2 \right]. \quad (3.17)$$

この第三項を見ると分かるように、事象の地平面上 $\Delta_r(r_+) = 0$ において曲率特異点が存在することが分かる。ここで、この曲率特異点を除くために、 $G(r, \theta)$ は次のような形で表されなければならない：

$$G(r, \theta) = G_1(r) + \Delta_r^2(r, \theta) G_2(r, \theta). \quad (3.18)$$

$\partial_\theta G(r, \theta)$ は地平面上でゼロとなるので、スカラー曲率が有界になる事が分かる。(3.18) の右辺第二項の Δ_r^2 は $G(r, \theta)$ を含んでいる。したがって、必要であれば、(3.18) を $G(r, \theta)$ について解けばよいが、我々は $\Delta_r = 0$ となる地平面上で考えるため、 $G(r, \theta)$ を解く必要は無い。

ブラックホール熱力学は事象の地平面上に置ける量を用いて記述されるので、熱力学を議論する上では式 (3.18) より、 G は r_+ のみの関数と考えてよい。ここでは、走るニュートン結合定数がカーパラメータ a に依存しないと仮定しよう。すると、ベッケンシュタイン・ホーキング温度を得るためには、表面重力 (3.9) を動径距離 r に依存する G の場合で計算する。すると、温度は以下の結果となる。

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{(r_+^2 - a^2)G(r_+) - r_+(r_+^2 + a^2)\partial_+G(r_+)}{4\pi r_+(r_+^2 + a^2)G(r_+)}. \quad (3.19)$$

ここで、結合定数 G が定数の場合には、古典的なカー計量から導かれるホーキング温度に一致する事に注意されたい。すると、可積分条件 (3.16) は、

$$r_+(r_+^2 - a^2)\partial_+^2G(r_+) - 2a^2\partial_+G(r_+) = 0, \quad (3.20)$$

となり、この二階微分方程式を積分すると、

$$G(r_+) = c_1 \frac{r_+^2 + a^2}{r_+} + c_2, \quad (3.21)$$

となる。 $\partial_a G(r_+) = 0$ と仮定しているので、 c_1 はゼロとなるはずである。すると、熱力学第一法則が成り立つためには、結合定数は走らない。これは古典的なカーブラックホールの熱力学と同じである。この問題については、文献 [13] で指摘されており、ホーキング温度 $T = \kappa/2\pi$ の公式が修正されるべきだと考えられている。しかし、そうすると、ブラックホールの温度が幾何学的な意味を持たなくなる。

この理由から、我々は結合定数は r_+ だけでなく、カーパラメータも取り入れて $G = G(r_+, a)$ となるように拡張して考える事とする。パラメータ a は、座標系の選び方に依存すると言える。なぜなら、質量が $M = 0$ の極限で、カー計量はパラメータ a で特徴付けられる楕円形の層をミンコフスキー時空で成すことに対応するからである。その場合 (3.15) から次の式を得る。

$$\partial_+ S = \frac{2\pi r_+}{G(r_+, a)}, \quad \partial_a S = \frac{2\pi [r_+^2(r_+^2 + a^2)\partial_a G(r_+, a) - a(r_+^2 - a^2)G(r_+, a)]}{G(r_+, a) [r_+(r_+^2 + a^2)\partial_+ G(r_+, a) - (r_+^2 - a^2)G(r_+, a)]}. \quad (3.22)$$

可積分条件 (3.16) を評価すれば良いので、

$$\partial_+ \frac{r_+^2(r_+\partial_a G - a\partial_+ G)}{r_+(r_+^2 + a^2)\partial_+ G - (r_+^2 - a^2)G} = 0, \quad (3.23)$$

が得られ、 r_+ に対して不定積分を実行すると、

$$\frac{r_+^2(r_+\partial_a G - a\partial_+ G)}{r_+(r_+^2 + a^2)\partial_+ G - (r_+^2 - a^2)G} = f(a), \quad (3.24)$$

となる。ここで任意の不定性を表す関数 $f(a)$ は a の依存性を持つ。

ここで、最も簡単な場合として $f(a) = 0$ を考えると、この条件によってエントロピーは妥当な結果を与える。走るニュートン結合定数がカーブラックホールの表面積 $x_+ = 4\pi(r_+^2 + a^2)$ で $G(r_+, a) = G(4\pi(r_+^2 + a^2)) = G(x_+)$ となるとすると、

$$\partial_+ G(x_+) = 8\pi r_+ G'(x_+), \quad \partial_a G(x_+) = 8\pi a G'(x_+). \quad (3.25)$$

が得られる。再び述べるように、 x_+ は地平面上の表面積である。(3.22) 式に上式を代入すれば、

$$\partial_+ S = \frac{2\pi r_+}{G(x_+)}, \quad \partial_a S = \frac{2\pi a}{G(x_+)}, \quad (3.26)$$

となる。この段階で可積分条件が満足されたので、エントロピーの表式は dx_+ の連鎖律を用いて、次のような結果が得られる。

$$S = \int \frac{dx_+}{4G(x_+)}, \quad x_+ \equiv 4\pi(r_+^2 + a^2). \quad (3.27)$$

もし、走るニュートン結合定数が古典的な定数と同じならば、ベッケンシュタイン・ホーキング公式が成り立つ [43, 44]。この様な理由から、 $G(r_+, a)$ の設定が妥当であり、定常回転する時空のスケール同一視はブラックホール面積 x_+ を用いて書かれるものであれば良い。ゆえに、簡易なスケール同一視、

$$k_+ = \frac{\xi}{\sqrt{x_+}} = \frac{\tilde{\xi}}{\sqrt{r_+^2 + a^2}}, \quad (3.28)$$

を考えて、任意定数を $\xi (= \sqrt{4\pi\tilde{\xi}})$ と調整する。よって、走るニュートン結合定数は、

$$G(r_+, a) = \frac{G_0(r_+^2 + a^2)}{r_+^2 + a^2 + \tilde{\omega}G_0}, \quad (3.29)$$

と書かれる。ここで、

$$\tilde{\omega} = \omega\tilde{\xi}^2, \quad (3.30)$$

とした。以上の結果を用いて、量子補正したエントロピーの例を計算すれば、以下の通りである。

$$S = \frac{\pi(r_+^2 + a^2)}{G_0} + \pi\tilde{\omega} \ln(r_+^2 + a^2). \quad (3.31)$$

ここで、不定積分に置ける不定性を与える幾つかの積分定数は、ここでは書かない事にした。第一項は古典的表面積を $4G_0$ で割った古典的なエントロピーの場合における結果であり、第二項に現れる対数項は量子補正から現れる部分を表す。同様の結果は、文献 [45] にも挙がっている。この結果は量子ブラックホールの場合に妥当と思われる。よく似た結果は文献 [46] のループ量子重力理論においても現れる様である。量子補正したエントロピーの結果は (3.10) で表される熱力学第一法則を満たし、そのために、表面重力で定義されるベッケンシュタイン・ホーキング温度を修正する必要は無かったことを強調しておく。

以上の考察は地平面上の話である。しかし、地平面の面積の幾何学的意味を考えると、上記のような面積とスケール同一視の関係を地平面から離れてその近傍へ拡張するのは自然であるだろう。そこで、以下のように x_+ を地平面近傍の x へ拡張してみよう。

$$\begin{aligned} x &= 2\pi \int_0^\pi \sqrt{(r^2 + a^2)^2 - r_+ r_- (r - r_+)(r - r_-)} \sin^2 \theta \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi(r^2 + a^2) \\ &\quad - \pi \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2(r - r_+)(r - r_-)}{a\sqrt{(r - r_+)(r - r_-)}} \ln \frac{r^2 + a^2 - a\sqrt{(r - r_+)(r - r_-)}}{r^2 + a^2 + a\sqrt{(r - r_+)(r - r_-)}}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

ここで (3.13) と $r_- = a^2/r_+$ (内部地平面の半径) を用いた。この結果から理解できる特徴は以下の通りである:

- (i) x は半径 r の表面積を表す。そして、 $r \rightarrow r_+$ の極限で、カー時空の地平面の面積 x_+ に帰着する。
- (ii) $r_- < r < r_+$ では、平方根内の第二項の符号は反転するが、いずれにしても任意の $r > 0$ に対して積分 x は実数となる。
- (iii) 十分大きい動径半径 r では $x \rightarrow r^2$ となるので、これは古典的な静的球対称の場合と漸近的に一致する。
- (iv) $r \rightarrow 0$ で面積 x を計算すると、それはリング特異点上の量に対応すると考えられるが、それは a^2 が残るために、面積 x は $r > 0$ においてゼロとならない。

以上の点を踏まえながら、スケール同一視を考えてみる。大きな動径距離 r に対して、ニュートン結合定数は期待通り定数となり、古典的な振る舞いを再現する。しかし、スケール同一視の地平面以外の点への拡張には注意が必要である。(3.19) 式において、先ず $G(r)$ に r_+ を代入して、その後で r_+ についての ∂_+ を取っている。しかし、(3.32) 式による拡張を考える時には、より自然な方法はまず最初に表面重力を計算して、その後で r_+ へ置き換える。この方法は (3.19) とは一般に異なる温度を与える。なぜなら、

$$\lim_{r \rightarrow r_+} \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial G(x)}{\partial x} \neq \frac{\partial x_+}{\partial r_+} \frac{\partial G(x_+)}{\partial x_+}, \quad (3.33)$$

だからである。したがって、より自然でより単純な方法は r_+ を r に置き換えた表面積、

$$x = 4\pi(r^2 + a^2), \quad (3.34)$$

を用いる事である。結局、この様な地平面を離れた拡張は、Boyer-Linquist 座標の選択に依存する。もし、異なる座標系を用いると、「固定した動径距離 r 」はあまり意味を成さなくなる。一方、カーブラックホールの表面積として (3.34) を与えておくと、これを用いたスケール同一視では、問題は生じない。3.5 節で更に詳しく述べる予定である。

一方、クレッチマンスカラー量 (3.12) から分かるように、 $\theta = \pi/2$ と $r = 0$ においてリング特異点が存在する事が分かる。もし、単純にスケール同一視 (3.28) (x_+ を x で置き換えたもの) を用いると、量子補正した結合定数は特異点では 0 とならず、従って特異点は解消されない。また、 x はゼロにはならないので、(3.28) によるスケール同一視では、 $k \rightarrow \infty$ の高エネルギー極限を取る事ができない。しかし、厳密線り込み群の観点からは、高エネルギー極限は存在すべきである。従って、我々は (3.34) を用いたスケール同一視の拡張は、ブラックホール熱力学的観点から、必要であるが、あくまで地平面近傍における拡張であって、特異点近傍では (3.34) を用いた同一視は大きく変更されるべきであると考える。

3.2.2 カー・(反)ド・ジッターブラックホール

カー・(反)ド・ジッターブラックホールの場合 (宇宙項 Λ が定数の場合) を考えよう。 $G = G(r_+, a)$ を仮定して、式 (3.9) で与えられる表面重力 κ から温度を計算すると次の結果を得る。

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{(r_+^2 - a^2 - r_+^4 \Lambda - a^2 r_+^2 \Lambda/3) G(r_+, a) - r_+(r_+^2 + a^2) (1 - r_+^2 \Lambda/3) \partial_+ G(r_+, a)}{4\pi r_+(r_+^2 + a^2) G(r_+, a)}. \quad (3.35)$$

熱力学第一法則と式 (3.15) より、エントロピーの微分が導かれ、

$$\begin{aligned} \partial_+ S &= \frac{2\pi r_+}{\Xi G(r_+, a)}, \\ \partial_a S &= \frac{N}{D}, \quad \text{ここで、分子 } N \text{ と分母 } D \text{ はそれぞれ次式：} \\ N &:= 2\pi (1 - r_+^2 \Lambda/3) [a (r_+^2 - a^2 - r_+^4 \Lambda - a^2 r_+^2 \Lambda/3) G(r_+, a) - \Xi r_+^2 (r_+^2 + a^2) \partial_a G(r_+, a)] \\ D &:= \Xi^2 G(r_+, a) \left[(r_+^2 - a^2 - r_+^4 \Lambda - a^2 r_+^2 \Lambda/3) G(r_+, a) \right. \\ &\quad \left. - r_+(r_+^2 + a^2) (1 - r_+^2 \Lambda/3) \partial_+ G(r_+, a) \right], \end{aligned} \quad (3.36)$$

である。可積分条件は (3.16) は以下のように書き直すことができ、

$$\partial_+ \frac{r_+^2 [\Xi r_+ \partial_a G(r_+, a) - a (1 - r_+^2 \Lambda/3) \partial_{r_+} G(r_+, a)]}{(r_+^2 - a^2 - r_+^4 \Lambda - a^2 r_+^2 \Lambda/3) G(r_+, a) - r_+(r_+^2 + a^2) (1 - r_+^2 \Lambda/3) \partial_{r_+} G(r_+, a)} = 0, \quad (3.37)$$

となる。再び積分を行うと、以下の結果を得る。

$$\frac{r_+^2 [\Xi r_+ \partial_a G(r_+, a) - a (1 - r_+^2 \Lambda/3) \partial_{r_+} G(r_+, a)]}{(r_+^2 - a^2 - r_+^4 \Lambda - a^2 r_+^2 \Lambda/3) G(r_+, a) - r_+(r_+^2 + a^2) (1 - r_+^2 \Lambda/3) \partial_{r_+} G(r_+, a)} = f(a). \quad (3.38)$$

前節と同じく最も簡単な $f(a) = 0$ とすることで、 $G(r_+, a) = G\left(4\pi \frac{r_+^2 + a^2}{\Xi}\right)$ がとなるから、(3.36) における $\partial_a S$ の表式は、

$$\partial_a S = \frac{2\pi a (1 - r_+^2 \Lambda/3)}{\Xi^2 G(r_+, a)}, \quad (3.39)$$

となる。従って、エントロピーは以下ようになる。

$$S = \int \frac{dx_+}{4G(x_+)}, \quad x_+ \equiv 4\pi \frac{r_+^2 + a^2}{\Xi}. \quad (3.40)$$

ここで x_+ は、カー・(反)ド・ジッター時空の地平面の表面積である。単純なスケール同一視 $k(x_+)$ として (3.28) と同じように、

$$k_+ = \frac{\xi}{\sqrt{x_+}} = \frac{\tilde{\xi}\sqrt{\Xi}}{\sqrt{r_+^2 + a^2}}, \quad (3.41)$$

を考えよう。任意定数は $\xi (= \sqrt{4\pi\tilde{\xi}})$ とした。すると、

$$G(r_+, a) = \frac{G_0(r_+^2 + a^2)}{r_+^2 + a^2 + \tilde{\omega}\Xi G_0}, \quad (3.42)$$

となる。ここで $\tilde{\omega} \equiv \omega\tilde{\xi}^2$ である。これを用いて、エントロピーは以下のように、求める事ができる:

$$S = \frac{\pi(r_+^2 + a^2)}{G_0\Xi} + \pi\tilde{\omega} \ln \frac{r_+^2 + a^2}{\Xi}. \quad (3.43)$$

ここで、第一項は古典的なベッケンシュタイン・ホーキングエントロピーであり、第二項目は量子補正項である。

ちなみに、 $a \rightarrow 0$ の極限を考えると、この結果は直接シュバルツシルト・(反)ド・ジッターブラックホールの結果に帰着する。そのような球対称な場合では、走るニュートン結合に動径距離以外に物理的に独立なパラメータが含まれないので、走るニュートン結合定数に含まれるパラメータは面積半径のみであり、ブラックホール熱力学第一法則を満たすエントロピーは自明に求まる。

3.3 五次元のマイヤース・ペリー解

非自明な例として、更に、五次元のブラックホール解の場合を考えてみたい。二つのパラメータ a_1, a_2 を持ち、二つの方位角を持つブラックホールである5次元のマイヤース・ペリー解を考える。この計量の基本性質を以下にまとめる [40]。計量は、

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{Gmr^2}{\Pi F} (dt - a_1 \sin^2 \theta' d\phi_1 - a_2 \cos^2 \theta' d\phi_2)^2 + \frac{\Pi F}{\Pi - Gmr^2} dr^2 \\ + (r^2 + a_1^2)(\cos^2 \theta' d\theta'^2 + \sin^2 \theta' d\phi_1^2) + (r^2 + a_2^2)(\sin^2 \theta' d\theta'^2 + \cos^2 \theta' d\phi_2^2), \quad (3.44)$$

である。ここで与えられている関数は、

$$\Pi = (r^2 + a_1^2)(r^2 + a_2^2), \quad F = 1 - \frac{a_1^2 \sin^2 \theta'}{r^2 + a_1^2} - \frac{a_2^2 \cos^2 \theta'}{r^2 + a_2^2}, \quad (3.45)$$

である。クレッチマンスカラー量は以下の通りである。

$$K = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{24G^2m^2(3r^2 - a_1^2\cos^2\theta - a_2^2\sin^2\theta)(r^2 - 3a_1^2\cos^2\theta - 3a_2^2\sin^2\theta)}{(r^2 + a_1^2\cos^2\theta + a_2^2\sin^2\theta)^6}. \quad (3.46)$$

事象の地平面は次のように、

$$\Pi(r_+) - Gmr_+^2 = 0, \quad (3.47)$$

から求まる。このブラックホールの質量、角運動量、角速度は以下のとおりである。

$$M = \frac{3\pi}{8}m, \quad J_i = \frac{2}{3}Ma_i = \frac{\pi}{4}ma_i, \quad \Omega_i = \frac{a_i}{r_+^2 + a_i^2}. \quad (3.48)$$

温度とエントロピーは、

$$T = \frac{r_+^4 - a_1^2a_2^2}{2\pi r_+(r_+^2 + a_1^2)(r_+^2 + a_2^2)}, \quad S = \frac{\pi^2(r_+^2 + a_1^2)(r_+^2 + a_2^2)}{2Gr_+}, \quad (3.49)$$

となる。Smarr 公式及び、熱力学第一法則は、次のようになる。

$$\frac{2}{3}M = TS + \Omega_1J_1 + \Omega_2J_2, \quad \delta M = T\delta S + \Omega_1\delta J_1 + \Omega_2\delta J_2. \quad (3.50)$$

3.3.1 量子補正したブラックホールと二つの異なる角運動量

マイヤース・ペリーブラックホールの量子補正では、走るニュートン結合定数は地平面の動径座標 r_+ に加えて、二つの角運動量を含んだ $G(r_+, a_1, a_2)$ と仮定する。温度は (3.9) で与えられる表面重力 κ に比例するので次の通りである。

$$T = \frac{2(r_+^4 - a_1^2a_2^2)G(r_+, a_1, a_2) - r_+(r_+^2 + a_1^2)(r_+^2 + a_2^2)\partial_+G(r_+, a_1, a_2)}{4\pi r_+(r_+^2 + a_1^2)(r_+^2 + a_2^2)G(r_+, a_1, a_2)}. \quad (3.51)$$

熱力学第一法則から、(3.15) への計算過程を繰り返して、以下の結果が得られる。

$$\partial_+S = \frac{\pi^2(3r_+^4 + a_1^2r_+^2 + a_2^2r_+^2 - a_1^2a_2^2)}{2r_+^2G(r_+, a)}, \quad (3.52)$$

$$\partial_{a_1}S = \frac{\pi^2(r_+^2 + a_2^2) [4a_1(r_+^4 - a_1^2a_2^2)G(r_+, a_1, a_2) - (r_+^2 + a_1^2)(3r_+^4 + a_1^2r_+^2 + a_2^2r_+^2 - a_1^2a_2^2)\partial_{a_1}G(r_+, a_1, a_2)]}{2r_+G(r_+, a_1, a_2) [2(r_+^4 - a_1^2a_2^2)G(r_+, a_1, a_2) - r_+(r_+^2 + a_1^2)(r_+^2 + a_2^2)\partial_+G(r_+, a_1, a_2)]}, \quad (3.53)$$

$$\partial_{a_2}S = \frac{\pi^2(r_+^2 + a_1^2) [4a_2(r_+^4 - a_1^2a_2^2)G(r_+, a_1, a_2) - (r_+^2 + a_2^2)(3r_+^4 + a_1^2r_+^2 + a_2^2r_+^2 - a_1^2a_2^2)\partial_{a_2}G(r_+, a_1, a_2)]}{2r_+G(r_+, a_1, a_2) [2(r_+^4 - a_1^2a_2^2)G(r_+, a_1, a_2) - r_+(r_+^2 + a_1^2)(r_+^2 + a_2^2)\partial_+G(r_+, a_1, a_2)]}. \quad (3.54)$$

パラメータの組 (r_+, a_1, a_2) に対して、三つの可積分条件存在する。それらを全微分の形に表すことは難しい。しかし、計量に対する a_1 と a_2 の対称性を思い出して、以下のような拘束条件、

$$(3r_+^4 + a_1^2 r_+^2 + a_2^2 r_+^2 - a_1^2 a_2^2) \partial_{a_1} G(r_+, a_1, a_2) = 2a_1 r_+ (r_+^2 + a_2^2) \partial_+ G(r_+, a_1, a_2), \quad (3.55)$$

$$(3r_+^4 + a_1^2 r_+^2 + a_2^2 r_+^2 - a_1^2 a_2^2) \partial_{a_2} G(r_+, a_1, a_2) = 2a_2 r_+ (r_+^2 + a_1^2) \partial_+ G(r_+, a_1, a_2), \quad (3.56)$$

を置く事にすると、 $\partial_{a_1} S$ と $\partial_{a_2} S$ は簡単な形式、

$$\partial_{a_1} S = \frac{\pi^2 a_1 (r_+^2 + a_2^2)}{r_+ G(r_+, a_1, a_2)}, \quad \partial_{a_2} S = \frac{\pi^2 a_2 (r_+^2 + a_1^2)}{r_+ G(r_+, a_1, a_2)}, \quad (3.57)$$

となる。そして、可積分条件は直ちに確認できる。ここで、上で仮定した拘束条件は

$$G(r_+, a_1, a_2) = G \left(2\pi^2 \frac{(r_+^2 + a_1^2)(r_+^2 + a_2^2)}{r_+} \right)$$

となり、エントロピーは次のとおりである。

$$S = \int \frac{dx_+}{4G(x_+)}, \quad x_+ \equiv 2\pi^2 \frac{(r_+^2 + a_1^2)(r_+^2 + a_2^2)}{r_+}. \quad (3.58)$$

ここで、 x_+ は五次元における事象の地平面の表面積である。以上で5次元の量子補正したマイヤース・ペリー解でも普遍的なエントロピー公式が成り立つことが分かった。

ここでも、 x_+ は固定した動径距離 r における面積 x へ一般化する事ができる。 $a_1 a_2 = r_+ r_-$ を用いて、

$$x = \frac{4\pi^2}{3} \frac{\sqrt{(r^2 + a_1^2)^3 [r^4 + (a_1^2 + a_2^2)r^2 + 2a_1^2 a_2^2 + a_2^4 + a_2^2(r_+^2 + r_-^2)]^3 - \sqrt{(a_1 \rightarrow a_2)}}}{(a_1^2 - a_2^2)(r^2 - r_+^2)(r^2 - r_-^2)}, \quad (3.59)$$

となる。 $r \rightarrow r_+$ の極限を (3.59) に実行すると、事象の地平面の面積 x_+ に帰着するので、スケール同一視は地平面の外部では以下のように取るのが自然である。

$$k^3 = \frac{\xi^3}{x}. \quad (3.60)$$

ここでも、カーブラックホールの場合と同じ注意点がある。初めに r_+ における $G(r)$ を設定して、その後で、偏微分 ∂_+ を計算して表面重力を与え、ホーキング温度を導出した。しかし、代替的に面積における r_+ を r に置き換える方法もある。この代替案では、面積が $r^2 < 0$ の範囲に置いては、虚数になる問題が起こる。これは、四次元のカーブラックホールでは起こり得ない問題であった。いずれにしても、特異点の近傍では、スケール同一視は大きく修正される可能性が在る。

3.3.2 等角運動量の量子補正したブラックホール

二つの角運動量パラメータが $a_1 = a_2 = a$ の特別な場合では、マイヤース・ペリーブラックホールは簡単になる。関数は $\Pi = (r^2 + a^2)^2$, $F = r^2/(r^2 + a^2)$ となり、その計量は以下の通りである。

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \frac{r^2 + a^2}{4} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + \frac{Gm}{r^2 + a^2} \left(dt - \frac{a}{2} \sigma_3 \right)^2, \\ \Delta = (r^2 + a^2)^2 - Gmr^2, \quad \Sigma = r^2(r^2 + a^2). \quad (3.61)$$

ここで、座標変換 $\theta = 2\theta'$, $\phi = \phi_2 - \phi_1$, $\psi = \phi_2 + \phi_1$ をした。また、角度座標の範囲は $0 < \theta < \pi$, $0 < \phi < 2\pi$, $0 < \psi < 4\pi$ である。更に、次のような定義を行った。

$$\sigma_1 = -\sin \psi d\theta + \cos \psi \sin \theta d\phi, \quad \sigma_2 = \cos \psi d\theta + \sin \psi \sin \theta d\phi, \\ \sigma_3 = d\psi + \cos \theta d\phi, \quad d\sigma_i = \frac{1}{2} \epsilon_i^{jk} \sigma_j \wedge \sigma_k. \quad (3.62)$$

クレッチマンスカラー量は、

$$K = R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{24G^2 m^2 (3r^2 - a^2)(r^2 - 3a^2)}{(r^2 + a^2)^6}. \quad (3.63)$$

である。この計量は $r^2 = -a^2 < 0$ で特異であるが、クレッチマンスカラーは角度座標に依らないで r のみの関数である。これはカー時空や二つの異なる角運動量パラメータを持つマイヤース・ペリー解との大きな違いである。

ここから、走るニュートン結合定数 $G = G(r, a)$ とし、量子補正した計量の温度 T は表面重力に比例した熱力学的量であり、

$$T = \frac{2(r_+^2 - a^2)G(r_+, a) - r_+(r_+^2 + a^2)\partial_+ G(r_+, a)}{4\pi r_+(r_+^2 + a^2)G(r_+, a)}, \quad (3.64)$$

となる。そしてエントロピーの偏微分は以下の通りとなる。

$$\partial_+ S = \frac{\pi^2 (r_+^2 + a^2)(3r_+^2 - a^2)}{2r_+^2 G(r_+, a)}, \quad (3.65)$$

$$\partial_a S = \frac{\pi^2 (r_+^2 + a^2) [8a(r_+^2 - a^2)G(r_+, a) - (r_+^2 + a^2)(3r_+^2 - a^2)\partial_a G(r_+, a)]}{2r_+ G(r_+, a) [2(r_+^2 - a^2)G(r_+, a) - r_+(r_+^2 + a^2)\partial_+ G(r_+, a)]}. \quad (3.66)$$

可積分条件は次のように表されて、

$$\partial_+ \frac{r_+(3r_+^2 - a^2)\partial_a G(r_+, a) - 4ar_+^2 \partial_+ G(r_+, a)}{2(r_+^2 - a^2)G(r_+, a) - r_+(r_+^2 + a^2)\partial_+ G(r_+, a)} = 0, \quad (3.67)$$

であるから、不定積分を行うと、

$$\frac{r_+(3r_+^2 - a^2)\partial_a G(r_+, a) - 4ar_+^2 \partial_+ G(r_+, a)}{2(r_+^2 - a^2)G(r_+, a) - r_+(r_+^2 + a^2)\partial_+ G(r_+, a)} = f(a), \quad (3.68)$$

となる。よって、 $\partial_a S$ は簡単に、

$$\partial_a S = \frac{\pi^2(r_+^2 + a^2) [4ar_+ - (r_+^2 + a^2)f(a)]}{2r_+^2 G(r_+, a)}, \quad (3.69)$$

が得られる。ここでも再び $f(a) = 0$ としておけば十分なので、可積分条件は

$$G(r_+, a) = G\left(2\pi^2 \frac{(r_+^2 + a^2)^2}{r_+}\right),$$

で満足され、そしてエントロピーは:

$$S = \int \frac{dx_+}{4G(x_+)}, \quad x_+ \equiv 2\pi^2 \frac{(r_+^2 + a^2)^2}{r_+}. \quad (3.70)$$

x_+ は地平面上における表面積を表すので、走るニュートン結合定数は地平面の表面積で書かれた関数であると考えべきである。簡単なスケール同一視 $k_+ = k(x_+)$ 、

$$k_+^3 = \frac{\xi^3}{x_+} = \frac{\xi^3 r_+}{2\pi^2 (r_+^2 + a^2)^2}, \quad (3.71)$$

を用いると、

$$G(r_+, a) = \frac{G_0}{1 + \omega G_0 k_+^3} = \frac{G_0 x_+}{x_+ + \tilde{\omega} G_0} = \frac{G_0 (r_+^2 + a^2)^2}{(r_+^2 + a^2)^2 + \tilde{\omega} G_0 r_+}, \quad (3.72)$$

である。ここで定数は $\tilde{\omega} = \xi^3 \omega / (2\pi^2)$ とした。また、5次元のニュートン定数 $G_0 = G_5$ の次元は長さの3乗である。以下では G_0 と書いているが G_5 を表す。ゆえに、エントロピーは次のようになる。

$$S = \frac{\pi^2 (r_+^2 + a^2)^2}{2G_0 r_+} + \frac{\pi^2 \tilde{\omega}}{2} \ln \frac{(r_+^2 + a^2)^2}{r_+}. \quad (3.73)$$

等角運動量を持つマイヤース・ペリー解の熱力学第一法則を導き、事象の地平面上の表面積 x_+ を用いてスケール同一視を設定して、エントロピーを書き下せた。

今、 x_+ を一般化して x を考えると、

$$x = 2\pi^2 \frac{\sqrt{(r^2 + a^2) [(r^2 + a^2)^2 r_+^2 + (r_+^2 + a^2)^2 a^2]}}{r_+}, \quad (3.74)$$

である。この表面積を用いてエネルギースケール $k = k(x)$ の同一視を考える。簡単なスケール同一視は以下のようなになる。

$$k^3 = \frac{\xi^3}{x} = \frac{\xi^3 r_+}{2\pi^2 \sqrt{(r^2 + a^2) [(r^2 + a^2)^2 r_+^2 + (r_+^2 + a^2)^2 a^2]}}. \quad (3.75)$$

ゆえに、次の表式を得る。

$$G(r, a) = \frac{G_0}{1 + \omega G_0 k^3} = \frac{G_0 x}{x + \omega \xi^3 G_0}. \quad (3.76)$$

4次元のカーブブラックホールと比較すると、量子補正した等角運動量マイヤース・ペリーブラックホールでは $r^2 \rightarrow -a^2$ で、エネルギースケールが $k^3 \rightarrow (r^2 + a^2)^{-1/2}$ となり発散する。しかし、 $k^3 \rightarrow (r^2 + a^2)^{-4}$ に比べて発散が穏やかであるため、特異点は解消されない。

ここから、一旦熱力学的な観点は脇において、特異点解消のみに焦点を当てる。 $\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \rightarrow 0$ での特異点を解消するスケール同一視は、以下のようなものが考えられる。

$$k^3 = \frac{\xi^3}{x} \left(1 + \frac{G_0}{x}\right)^7 \rightarrow \frac{\xi^3 r_+^8 G_0^7}{(2\pi^2)^8 (r_+^2 + a^2)^8 a^8} \rho^{-8} \quad \text{as } \rho^2 \rightarrow 0. \quad (3.77)$$

すると、

$$G(r, a) = \frac{G_0}{1 + \omega G_0 k^3} \rightarrow \frac{(r_+^2 + a^2)^8 a^8}{\tilde{\omega} r_+^8 G_0^8} \rho^8, \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega \xi^3}{(2\pi^2)^8}, \quad (3.78)$$

となる。よって、 $G(r, a) m$ は $\rho \rightarrow 0$ でゼロに早く収束する。

$$\begin{aligned} G(r, a) m &= \frac{8GM}{3\pi} \rightarrow \frac{8M(r_+^2 + a^2)^8 a^8}{3\pi \tilde{\omega} G_0^8 r_+^8} \rho^8, & \Delta &\rightarrow \rho^4 (1 + O(\rho^4)), \\ \Sigma &= -a^2 \rho^2 \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right), & dr^2 &= \frac{\rho^2}{r^2} d\rho^2 \rightarrow -\frac{\rho^2}{a^2} d\rho^2 \left(1 + \frac{\rho^2}{a^2} + O(\rho^4)\right). \end{aligned} \quad (3.79)$$

この $\rho^2 \rightarrow 0$ の近傍において、この時空は以下の通り、

$$ds^2 \rightarrow -dt^2 + d\rho^2 + \frac{\rho^2}{4} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + O(\rho^4), \quad (3.80)$$

になる。ここで $O(\rho^2)$ の $\Sigma dr^2 / \Delta$ の内部にある項は互いに打ち消し合って消えた。この計量は平坦であり、明らかに特異点は解消されている。

3.4 カルツァ・クライン 黒弦

最後の例として、カルツァ・クライン黒弦解を考える。黒弦（ブラックストリング）解の内、最も簡単なものは、静的球対称時空に更に次元加わった解である。すなわち次元は $d = n + 1$ であり、その計量は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} ds^2 &= -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{n-2}^2 + dz^2, \\ f(r) &= 1 - \frac{G\mu}{r^{n-3}}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

ここで、 μ は定数である。この黒弦解は $(n + 1)$ 次元で在るだけでなく、古典的なシュバルツシルト解に一つの余次元が入るだけなので、リッチ平坦な解である。余次元部分は、一般のリッチ平坦な空間に置き換えてもアインシュタイン方程式の真空解となるが、ここでは簡単

のため、余次元が、物理的な長さ L に S^1 コンパクト化されている状況を考える。文献 [41,42] から、この古典的な黒弦解の質量と張力は、

$$M = \frac{\Omega_{n-2}L}{16\pi}(n-2)\mu, \quad \mathcal{T} = \frac{\Omega_{n-2}}{16\pi}\mu, \quad (3.82)$$

となる。 Ω_{n-2} は、単位 S^{n-2} 球面の表面積である。温度とエントロピーは、

$$T = \frac{1}{4\pi} \left. \frac{df(r)}{dr} \right|_{r=r_+} = \frac{n-3}{4\pi r_+}, \quad S = \frac{\Omega_{n-2}Lr_+^{n-2}}{4G}, \quad (3.83)$$

であり、以下の熱力学第一法則を満足する。

$$dM = TdS + \mathcal{T}dL, \quad M = TS + \mathcal{T}L. \quad (3.84)$$

量子補正した黒弦解は、位置依存した走るニュートン結合定数 $G = G(r, L)$ に置き換えれば良いので、温度は実直に計算すれば、

$$T = \frac{(n-3)G(r_+, L) - r_+\partial_+G(r_+, L)}{4\pi r_+G(r_+, L)}, \quad (3.85)$$

となる。そして、エントロピーの微分は次の通りである。

$$\partial_+S = \frac{(n-2)\Omega_{n-2}Lr_+^{n-3}}{4G(r_+, L)}, \quad \partial_L S = \frac{\Omega_{n-2}r_+^{n-2} [(n-3)G(r_+, L) - (n-2)L\partial_L G(r_+, L)]}{4G(r_+, L) [(n-3)G(r_+, L) - r_+\partial_+G(r_+, L)]}. \quad (3.86)$$

可積分条件より次式、

$$r_+\partial_+G(r_+, L) = (n-2)L\partial_L G(r_+, L), \quad (3.87)$$

が成り立てば良い。 $S^{n-2} \times S^1$ の幾何学的解釈を用いて、表面積 $x_+ \simeq \Omega_{n-2}Lr_+^{n-2}$ を考えると、

$$G(r_+, L) = G(x_+), \quad x_+ \equiv \Omega_{n-2}Lr_+^{n-2}, \quad (3.88)$$

で可積分条件は満足される。よって、エントロピーは表面積の関数である走るニュートン結合を用いて、ここでも普遍的な次の公式を得る。

$$S = \int \frac{dx_+}{4G(x_+)}. \quad (3.89)$$

自然で簡単なスケール同一視を設定して、

$$k^{n-1} = \frac{\xi^{n-1}}{x}, \quad x \equiv \Omega_{n-2}Lr^{n-2}, \quad (3.90)$$

とする。ここで面積 x は x_+ を任意の動径距離 r としたものである。回転するブラックホールでは角運動量に比例するパラメータ $a_j (j = 1, 2, 3, \dots)$ が表面積に現れるように、黒弦では長さパラメータ L が面積に含まれる。しかし L は S^1 の円を特徴付けるパラメータなので、こ

れは固定できて、実質高次元の静的球対称時空を考える事とさほど変わらない。走るニュートン結合定数 (3.5) は高次元ニュートン重力の厳密線り込み群方程式を解く際に現れるベータ関数から、

$$G(k) = \frac{G_0}{1 + \omega G_0 k^{n-1}}, \quad (3.91)$$

である。ここでは、 $G_0 = G_{n+1}$ と解釈する事に注意されたい。よって、位置依存性は、

$$G(r) = \frac{G_0 L r^{n-2}}{L r^{n-2} + \tilde{\omega} G_0}, \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega \xi^{n-1}}{\Omega_{n-2}}, \quad (3.92)$$

となって、エントロピーを書き下すと次の通りである。

$$S = \frac{\Omega_{n-2} L r_+^{n-2}}{4G_0} + \frac{\tilde{\omega} \Omega_{n-2}}{4} \ln(L r_+^{n-2}). \quad (3.93)$$

第一項はベッケンシュタイン・ホーキングエントロピーを表し、第二項は量子補正した効果を表す。

S^2 の単位球面では $\Omega_2 = \text{vol}(S^2) = 4\pi$ であり、 S^1 の単位円は 2π となるので、幾何学的に $S^2 \times S^1$ の動径距離を除いた体積は $2\pi \text{vol}(S^2)L$ となるので、高次元の $S^{n-2} \times S^1$ の体積は $2\pi \Omega_{n-2}L$ となるはずである。この場合 $x_+^{r=1} = (\text{const.}) \times \Omega_{n-2}L$ の地平面の体積を定義すると考えれば良い。

最後に、厳密線り込み群方程式から与えられる量子効果を用いてブラックホールの特異点を除く議論は興味深いので、ここで具体例を考察する。 $n = 4$ で $x = (\text{const.}) \times Lr^2$ として、以下のスケール同一視を試す。

$$k^3 = \frac{\xi^3}{x} \left(\frac{G_0}{x} \right)^{1/2} = \frac{\tilde{\xi}^3 G_0^{1/2}}{L^{3/2} r^3}. \quad (3.94)$$

新たな $\tilde{\xi}$ は任意定数である。量子補正された黒弦のラプス関数は計量から与えられて：

$$f_q(r) = 1 - \frac{\mu G_0 L^{3/2} r^2}{L^{3/2} r^3 + \tilde{\omega} G_0^{3/2}}, \quad \tilde{\omega} = \omega \tilde{\xi}^3. \quad (3.95)$$

この量子補正された $S^2 \times S^1$ の黒弦解の余次元部分を除いた四次元時空は Hayward ブラックホールと呼ばれる正則ブラックホール時空と一致している。ただし、古典的な Hayward 解 [47] と異なり、このラプス関数の分母には質量に比例するパラメータは含まれない。Hayward ブラックホールは正則ブラックホールの例として、人工的に考えられた計量であるが、それが厳密線り込み群と熱力学第一法則を基にした量子補正により導出できた事は興味深い。

3.5 回転ブラックホールの量子補正と新しいスケール同一視についてまとめと考察

本章では、基本論文 [II] を基に、ブラックホール熱力学第一法則が成り立つことを指導原理として、適切なスケール同一視を導入する方法を提案した。エントロピーの可積分条件か

ら結合定数の位置依存性を決める切断エネルギーは事象の地平面上の面積を用いて書かれるべきだという事が分かった。そして、このとき、量子補正したブラックホールに対してエントロピーの普遍的公式が成り立つことを幾つかの具体例で確認した。温度や、この普遍的なエントロピーは、走るニュートン結合が古典的なニュートン定数の場合は、ベッケンシュタイン・ホーキング公式に帰着する。この様な結果は4次元の解だけでなく、高次元の解でも成り立つ事が分かり、恐らく、全ての量子補正したブラックホール解に対して適応できると考えられる。ここで提案した熱力学法則に基礎を置くスケール同一視は、事象の地平面近傍の事であるが、地平面外部の大きな r の領域へは、量子効果が小さくなると期待されるので、自然に拡張できると考えられる。

事象の地平面の内部への拡張について述べる。まず、球対称の場合には地平面から中心特異点まで、我々の提案は自然に拡張できる。また、静的なカルツァ・クラインブラックホールの場合も同様である。実際、これらの場合には中心特異点を解消する事もできる。例えば、カルツァ・クラインの場合には、正則な Hayward ブラックホールを導くことが出来た。さらに、静的でなく、回転している場合でも、等角運動量マイヤース・ペリーブラックホールの場合には、我々の提案するスケール同一視は熱力学第一法則と整合するだけでなく、特異点を解消する事を見た。一方、4次元カーブラックホールの場合には、我々のスケール同一視では、紫外極限が取れないので、走るニュートン定数もゼロには向かわず、従って、特異点も解消されないと考えられる。従って、特異点近傍でのスケール同一視には何か別の指導原理が必要と思われる。

我々の提案における量子補正されたブラックホールの温度は、量子補正されたブラックホール計量の地平面上での表面重力に比例する。量子補正したブラックホールのホーキング輻射を考える際に、量子補正した時空の計量は古典的な背景時空と見なして、その上でホーキングの元々の導出方法 [44] と同じ幾何光学近似を用いれば、その温度は地平面の表面重力で決まるのは自然である。表面重力は地平面上で光的曲面に沿ったキリングベクトル χ^μ を用いて $\kappa^2 = -\lim_{r \rightarrow r_+} (\nabla_\mu \chi_\nu)(\nabla^\mu \chi^\nu)/2$ の関係式から導出される。このとき、カー解を考えると、微妙な問題が発生する。式 (3.32) で与えられる一般的な表面積を考えた場合では、表面重力 κ は $\partial_+ G(r_+)$ を含み、これを評価する時、まず $G(r)$ に r_+ を代入してから、 ∂_+ を取らなければならない、その逆ではない。この微分と代入の順番は我々の定義する温度が熱力学第一法則と矛盾しないためには必要と考えられる。特に、回転している場合には面積関数 x_+ を一般の x に拡張する際に、この様な注意が必要である。この意味で、我々の温度は古典的なホーキング温度の修正版といえよう。

ここで、次の事を強調しておく。温度の変更やエントロピーの変更に関して [13] で議論されているが、そこでは、温度の角度座標依存性を人為的に取り除いており、その方法は物理的には正当化できない。一方、我々の議論ではホーキング温度は事象の地平面上で時空の幾何学量として自然に算出される量であり、熱力学第一法則を物理的な指導原理とした結果である。

スケール同一視の地平面からの拡張に関しては、地平面上の動径距離 r_+ をそのまま r に置き換える方法が、熱力学第一法則との整合性を保つ最も簡単なスケール同一視の方法である。ただし、地平面を大きく離れて、ブラックホール内部へ深く向かう場合のスケール同一視については更に考察が必要である。

最後に、地平面内部における特異点の解消についてまとめる。この問題については文献 [1, 10, 14, 21, 26] で述べられているように、様々な方法が考案されている。本研究を通して、我々は古典解 (計量) に現れるニュートン結合定数 G を量子補正した走るニュートン定数 $G(r)$ に置き換える方法を用いた。しかし、運動方程式や作用積分の段階で、走るニュートン定数に置き換える方法もある。特異点近傍のスケール同一視については、これら後者の方法も含めて更に検討する必要がある。

4 本論文の総括と展望

本論文では、漸近安全な量子重力理論のブラックホール時空への応用として、電磁相互作用を含めた量子補正ブラックホールの構成と、その構造を調べた。また、漸近安全性の応用で大事なスケール同一視の方法において、ブラックホール熱力学第一法則を指導原理とする物理的に妥当な方法を提案した。

第二章では、基本論文 [I] に基づいて、漸近安全量子重力理論における、重力と電磁相互作用に対する走る結合定数を求め、量子補正した静的球対称荷電ブラックホールの大域構造について解析した。用いたスケール同一視は古典的背景時空を基にしたクレッチマン・スカラによるスケール同一視を考えた。それによりニュートン結合定数と電荷を位置依存する結合定数に置き換えることで、量子補正したライスナー・ノルドストロームブラックホールを与えた。この量子補正したブラックホールは電荷の紫外固定点や物質場の数によって量子補正を決めるパラメータが決まり、その大域構造は中心近傍以外では古典的なライスナー・ノルドストロームブラックホールと変わらないが、中心の時間的特異点が解消されて、ミンコフスキー核となる。また、量子補正したライスナー・ノルドストローム時空の中心は、紫外領域におけるより一般のスケール同一視の方法によって、ド・ジッター核、反ド・ジッター核、ミンコフスキー核、もしくは弱い特異点となり得ることを示した。地平面に注目すると、量子補正したライスナー・ノルドストローム時空解は事象の地平面とコーシー地平面が現れる。これらの地平面は質量パラメータの値によっては、縮退したエクストリームブラックホールとなり得る。また、クーロンポテンシャルに相当する部分は十分遠方で漸近平坦性を保持するが、古典的なライスナー・ノルドストローム時空とは一致する訳でなく、漸近領域において電場はより早く減少する傾向にある。本解析では、宇宙項をゼロと仮定することで、走るニュートン結合定数と走る電荷の解析的な表式を得ることができた。宇宙項の量子効果を含んだ量子補正ブラックホールについては更なる考察が必要である。

第三章では、基本論文 [II] に基づき、ブラックホール熱力学第一法則を指導原理として、適切なスケール同一視の方法を提案した。エントロピーの可積分条件からスケール同一視は事象の地平面の表面積によって書かれなければならないという提案である。それにより、量子補正した様々なブラックホールに対して、エントロピーの普遍的公式が得られる事を確認した。特に、カー・ブラックホール、(反)ド・ジッター・カー・ブラックホール、高次元の回転ブラックホールを表すマイヤース・ペリー・ブラックホール、カルツァ・クライン・ブラックホール等の場合に具体的に計算で確かめた。球対称ブラックホールや5次元の静的な解であるカルツァ・クライン解を量子補正した結果、特異点が解消された。一方、(反)ド・ジッター・カー・ブラックホールの場合では、ニュートン結合定数のみに依存して宇宙項が定数の場合で、中心付近のリング特異点は一般に解消されるとは限らない事も分かった。ゆえに、量子補正したブラックホールの熱力学第一法則が成り立ち、尚且つ中心の特異点が解消される様なスケール同一視を見つける事は重要な課題である。

本博士論文における新規の結果を次のリストにまとめる。

1. 電荷を持つブラックホールに関して、重力と電磁相互作用の両方を含めた漸近安全理論を考え、特異点解消と、その中心構造の詳細を示した。
2. 定常軸回転ブラックホールについて、量子補正したブラックホールの熱力学法則が成り立つためのスケール同一視を考案した。
3. 上記のスケール同一視により、量子補正した定常軸回転ブラックホールを構成した。そして、定常軸回転する量子ブラックホールにおいて、熱力学第1法則と整合するエントロピー公式を導出した。

本論文では、漸近安全な量子重力のブラックホール時空への応用のみに焦点を当てたが、初期宇宙のビッグバンも特異点である。また、膨張宇宙にも宇宙論的な事象の地平面が存在する。従って、本論文でブラックホールに対して用いた方法を宇宙論に応用する事は興味深い研究課題と考えられる。更には、本論文では一般相対論においてニュートン定数を走らせる漸近安全理論を考えたが、高階微分項を含めるなど重力理論そのものをより一般化した漸近安全量子重力の応用も興味深い。

謝辞

本博士論文を執筆するにあたって、指導教官である石橋明浩教授には執筆開始から、本論文のまとめ方まで詳細に指示を頂け、ゼミで行った知識の補間等についても大変上手くまとめる事ができたと思われる。ゆえに、石橋明浩教授に感謝の意を表す。また、本博士論文では、二本の主要論文 [1,2] を詳しくまとめた。主要論文 [1] では、博士前期課程の指導教官であり、近畿大学に在籍されていた太田信義教授にも大変有益なご指導を頂いた。また、二本目の主要論文 [2] の研究に関しては、台湾国立中央大の C. M. Chen さんと Yi Chen さんも加わって頂き、意見交換や当研究に関する会話等を行って頂きとても参考となった。積極的な姿勢や意見は大変有益であり、お三方にも感謝の意を表す。博士論文非公式公聴会では、近畿大学の先生方である大村先生、三角先生のお二方に審査を行っていただき、ここにお礼の意を記す。

博士後期課程入学後、ブラックホールの特異点を量子効果を用いて解消するという曖昧な目標から始めたが、先行研究では成し遂げられていなかった熱力学第一法則を導くことができ、エントロピーの公式が得られただけでなく、量子ブラックホールの熱力学は量子効果を取り入れる指導原理であることが分かり、とても嬉しく思う。そして、その指導原理はブラックホールの表面積を用いて量子効果を決める事を意味しており、これは量子ブラックホールの内部構造を決める際の鍵であった。その結果、量子ブラックホールの内部構造は熱力学第一法則が成り立つ状況で、正則な中心核、又は妥当な中心構造を持つスケール同一視が適切であると考えられる。この様な有益であろう研究結果が得られたのは指導教官である石橋明浩先生、前指導教官である太田信義先生、C. M. Chen さんと Yi Chen さん、皆様のご協力及びご指導があってこそ成された事だと思う。ここにお礼の意を記す。

研究だけでなく、私的生活面においても、近畿大学の皆様には快適な環境で充実した学生生活を送れるように整った環境を頂けた事、また、様々な関連を持つ人たちには、滞りなく博士課程が送れるように工夫や意見を頂き、皆様に対しても感謝の意を表す。また、自家は自営業を営んでいる事もあり、多くの様々な皆様と関りが在る事で、多数の参考になる意見や、若い私への適切なお指導も頂けたことはとても充実した社会生活の環境で在ったと思う。皆様と楽しく充実した日々をおくれた事は私にとって大変大切な時間であっただけでなく、関わる多くの人々と居る事で私自身も充実した社会生活を送れるその大切さを知った時間であった。

A 古典的ブラックホールの基本と熱力学第一法則

古典的なブラックホールの基本性質と熱力学第一法則に関して説明を行う。E. Poisson による教科書 [57] “A Relativist’s Toolkit The Mathematics of Black-Hole Mechanics,” Cambridge (2004) を参考に、静的球対称ブラックホール解の内部構造を理解し、定常軸回転するカーブラックホール解を例に挙げて、その熱力学を考察し、熱力学第一法則を導く。

一般相対論において、球対称時空の場合に真空のアインシュタイン方程式を解いて得られるシュバルツシルト解が、ブラックホール時空を表すことを説明する。この最も簡単なブラックホールであるシュバルツシルト解を例に上げて、事象の地平面や特異点などのブラックホールの特徴的構造を解説する。本章の後半では、定常軸回転ブラックホールを表すカー解を紹介する。カー解は質量と角運動量パラメータで特徴付けられる解で、角運動量パラメータをゼロとすると、シュバルツシルト解に一致するものである。そして、このカー解の力学的側面を説明して、ブラックホール熱力学を説明する。特にカー・ブラックホールの熱力学第一法則を導く。

特殊相対論において平坦な時空を表すミンコフスキー計量は、直線直交座標 (t, x, y, z) で $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ と表わされるが、それを極座標 (t, r, θ, ϕ) に座標変換を行うと、球対称性を反映する表式 $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ が得られる。この表式の tt 成分と rr 成分を一般の関数に置き換えることで、一般相対論における球対称時空を表す最も一般的な計量、

$$ds^2 = -e^{2\psi(t,r)} f(t,r) dt^2 + f^{-1}(t,r) dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (\text{A.1})$$

が与えられる。ここで

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2,$$

は2次元単位球面の計量である。

実際の球対称時空解を決めるためには、(A.1) に含まれる関数 $\psi(r, r)$ と $f(t, r)$ をアインシュタイン方程式を通して決めなければならない。線素 (A.1) に対するアインシュタインテンソルの成分を計算すると、

$$\begin{aligned} G_{tt} &= -\frac{e^{2\psi}}{r^2} f(-1 + f + rf'), \\ G_{rr} &= \frac{1}{r^2 f} (-1 + rf' + f(1 + 2r\psi')), \\ G_{tr} &= -\frac{\dot{f}}{rf}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

となる。ここで、関数 $f(t, r)$ を以下のように、

$$f(t, r) = 1 - \frac{2M(t, r)}{r}, \quad (\text{A.3})$$

と仮定する。アインシュタイン方程式、

$$G^{\mu}_{\nu} = 8\pi G_0 \left(T^{\mu}_{\nu} - \frac{\delta^{\mu}_{\nu}}{8\pi G_0} \Lambda_0 \right) = 8\pi G_0 \tau^{\mu}_{\nu}, \quad (\text{A.4})$$

は、(A.3)を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{\partial M(t, r)}{\partial r} &= 4\pi G_0 r^2 (-\tau^t_t), \\ \frac{\partial M(t, r)}{\partial t} &= -4\pi G_0 r^2 (-\tau^r_t), \\ \frac{\partial \psi(t, r)}{\partial r} &= 4\pi G_0 r f^{-1} (-\tau^t_t + \tau^r_r), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

となる。最も簡単な場合として、真空 $T_{\mu\nu} = 0$ 、宇宙項 $\Lambda_0 = 0$ の場合には、(A.5) は簡単に解けて、

$$\psi(t, r) = \psi(t), \quad M(t, r) = M = (\text{const.}), \quad (\text{A.6})$$

となるので、 $dte^{-\psi(t)} \rightarrow dt$ と時間を変更すると、古典的シュバルツシルト解、

$$ds^2 = -f_{sch}(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f_{sch}(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad f_{sch}(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \quad (\text{A.7})$$

を得る。シュバルツシルト解の f_{sch} は時間に依存しないので、真空静的球対称解と言われる。このシュバルツシルト時空解は、 r が大きい漸近遠方領域では、ニュートン力学における質点の作る重力を再現するものである。

A.1 クルスカル座標

(A.7) によって与えられるシュバルツシルト時空は $r = 2M$ で特異な状況を表す。この $r = 2M$ の特異性は座標特異点の問題として良く知られる。解決方法としては座標変換を行って、この特異点を除く事が考えられてきた。 $r = 2M$ を解決する一つ的手段として、独立した貢献であるが、1960年におけるクルスカルとスゼッケルの研究がある。この方法について考えよう。

(θ, ϕ に依らない) ラジアルな経路でシュバルツシルト時空上を動く無質量粒子を考える。この粒子の運動を考えるために、以下のように光的座標 (v, u) を定義しよう。

$$u = t - r^*, \quad v = t + r^*. \quad (\text{A.8})$$

ここで、

$$r^* = \int \frac{dr}{f_{Sch}} = \int \frac{dr}{1 - 2M/r} = r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|, \quad (\text{A.9})$$

である。 v (先進時間)と u (遅延時間)の座標 (u, v) は、 (t, r^*) 座標に対して45度角回転させた位置に在る座標である。上述のような動径方向に運動する無質量粒子は、 $v = \text{const.}$ に沿って内部へ入って行くか、 $u = \text{const.}$ で外部へ出ていくものとなる。この光的座標系を用いると、線素(A.7)は次の通りに書き換えられる。

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dudv + r^2d\Omega^2. \quad (\text{A.10})$$

動径距離 r はもはや座標ではなく、次の関係式を通して u, v を用いて表わされる関数である：

$$r^*(r) = \frac{1}{2}(v - u). \quad (\text{A.11})$$

$v - u = -\infty$ において、 $r = 2M$ に該当するが、この座標系でも特異であることに変わらない。

特異点を除くために、 $r = 2M$ 面の近傍に着目すると、 $r^* \simeq 2M \ln |r/2M - 1|$ となるので、

$$\frac{r}{2M} \simeq 1 \pm e^{(v-u)/4M}, \quad f \simeq \pm e^{(v-u)/4M}, \quad (\text{A.12})$$

となる。よって $r = 2M$ の近傍で線素は、

$$ds^2 \simeq \mp(e^{-u/4M}du)(e^{v/4M}dv) + r^2d\Omega^2, \quad (\text{A.13})$$

となる。以上の考察から、 U, V を次のように定義しよう。

$$U = \mp e^{-u/4M}, \quad V = e^{v/4M}. \quad (\text{A.14})$$

(A.8)を用いると、

$$\mp UV = e^{r^*/2M} = e^{(v-u)/4M}. \quad (\text{A.15})$$

動径距離を用いると、

$$e^{r/2M} \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) = -UV, \quad (\text{A.16})$$

である。ゆえに、 U, V を用いて、シュバルツシルト計量を書き下せば、

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r}e^{-r/2M}dUdV + r^2d\Omega^2, \quad (\text{A.17})$$

である。この表現では、 $r = 2M$ は正則となっており目的は果たされた。新しい座標系 (U, V) は見つけた人の名前からクルスカル座標と言われる。座標 (U, V) 上で描かれる図をクルスカル図という。 $U = \text{const.}$ に沿って動く光は外に向かう光子で、 $V = \text{const.}$ に沿って動く光は内に向かう光子である。 $r = 2M$ は $UV = 0$ で表され、 $r = 0$ は $UV = 1$ で表わされる。また $r = 2M$ では、 $U = 0$ もしくは $V = 0$ であるから、それは (U, V) 座標の各座標軸を表す。クルスカル座標では、元々 (t, r) 座標で与えられているシュバルツシルト解を $r = 2M$ の近傍

を含めて表す事ができる。 $(U < 0, V > 0)$ の領域をIとする。そして、 $(U > 0, V > 0)$ の領域はII、 $(U > 0, V < 0)$ の領域をIII、 $(U < 0, V < 0)$ の領域をIVとラベルを付ける。IからIIにかけて $r = 2M$ の軸を通るが、クルスカール座標では正則な面となるので自然に領域が繋がっている。領域IIIから領域IVにかけても同様の主張が成り立つ。重力崩壊によるシュバルツシルト・ブラックホールの形成を考える場合には、崩壊する球対称天体の中心の世界線を表す時間的な境界を領域IからIIまで描き、この境界より左側にある領域IIIとIV側は取り除いた時空を考える。

A.2 ペンローズ・カーター図

クルスカール図を導入した事でシュバルツシルト時空の $r = 2M$ の特異性は無くなり、その大域構造はとても明確に理解できるようになった。これはとても有益な事である。ここで更なる (U, V) 座標の変更を行う事で、シュバルツシルト時空の大域構造を理解する事を考えてみよう。クルスカール座標では $-\infty < U < \infty, -\infty < V < \infty$ の範囲を考える事になる。この様な座標の範囲が有限な値となるように、次の座標変換を行う。

$$\tilde{U} = \arctan U, \quad \tilde{V} = \arctan V. \quad (\text{A.18})$$

この変更は U, V のスケールを変更しただけなので、直接光線に影響が及ぶ変更ではない。ゆえに、 U の方向は \tilde{U} の方向で、 V の方向も \tilde{V} の方向である。変更を受けるのは U, V のスケールで、

$$-\infty < U < \infty \rightarrow -\frac{\pi}{2} < \tilde{U} < \frac{\pi}{2}, \quad (\text{A.19})$$

$$-\infty < V < \infty \rightarrow -\frac{\pi}{2} < \tilde{V} < \frac{\pi}{2}, \quad (\text{A.20})$$

となる。ゆえに、クルスカール図は (\tilde{U}, \tilde{V}) 上に書かれ、これらの範囲は有限な値になる。 $r = 2M$ 面は $U = 0$ または $V = 0$ の軸を表していたので、 $\tilde{U}-\tilde{V}$ 座標上でも特異ではない。そして、クルスカール図は(A.19)と(A.20)で表される正方形の内部のコンパクトな領域に描かれる。

以下では (\tilde{U}, \tilde{V}) 座標上におけるシュバルツシルト時空の性質を述べる。 $r = 2M$ 面は $\tilde{U} = 0$ もしくは $\tilde{V} = 0$ 上を表す。また、中心の特異点 $r = 0$ はクルスカール図でも除くことができないが、この点は $UV = 1$ で表されていたので、 $\tilde{U} + \tilde{V} = \pm \frac{\pi}{2}$ の直線として表される。 (\tilde{U}, \tilde{V}) は(A.19)と(A.20)で与えられた範囲を持つので、臨界値 $\tilde{U} = \pi/2, -\pi/2$ または $\tilde{V} = \pi/2, -\pi/2$ はクルスカール図で言うところの無限遠を表している。無限遠に対してラベルを付けよう。 $\tilde{U} = \pi/2, -\pi/2 < \tilde{V} < 0$ もしくは $\tilde{V} = \pi/2, -\pi/2 < \tilde{U} < 0$ の面は、 I^+ と書いて未来の光的無限遠と名づける。光線が未来の十分遠方に出ていく事を考えると I^+ はその終点である。一方、 $\tilde{U} = -\pi/2, 0 < \tilde{V} < \pi/2$ もしくは $\tilde{V} = -\pi/2, 0 < \tilde{U} < \pi/2$ は I^- と表して過去の光的無限遠と呼ぶ。この面は光的無限過去からブラックホールに入ってくる光線の始点である。そして I^+ と I^- の面が交差する臨界点は空間的無限遠 i^0 と表す。直線 $\tilde{U} + \tilde{V} = \pi/2$ で表される特

異点と \mathcal{I}^+ が十分近づく場所は未来の時間的無限遠 i^+ と言おう。また、 $\tilde{U} + \tilde{V} = \pi/2 = -\pi/2$ と \mathcal{I}^- が十分近づく場所は過去の時間的無限遠 i^- と呼ぶ。無限遠のラベルに関して、その分類を簡易に示したものは表5である。シュバルツシルト時空の大域構造については図7を参照されたい。クルスカール図で表される時空の大域構造は、ブラックホールでは中心の特異点と事象の地平面、および無限遠からなり、この構造を (\tilde{U}, \tilde{V}) 座標でコンパクトに表した図はペンローズ・カーター図と言われる。

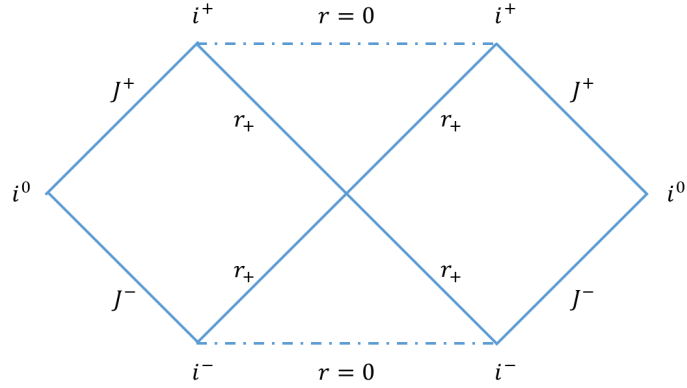


図7: シュバルツシルト時空のペンローズ・カーター図: $r_+ = 2M$ 、点線は中心の特異点を表している。中心特異点 $\tilde{U} + \tilde{V} = \pm\frac{\pi}{2}$ は波線で書かれる事が多い。

表5: 無限遠の区別とラベル

\mathcal{I}^+	未来の光的無限遠	$v = \infty, u = (finite.)$
\mathcal{I}^-	過去の光的無限遠	$u = -\infty, v = (finite.)$
i^0	空間的無限遠	$r = \infty, t = (finite.)$
i^+	未来の時間的無限遠	$t = \infty, r = (finite.)$
i^-	過去の時間的無限遠	$t = -\infty, r = (finite.)$

A.3 事象の地平面

$U = const.$ もしくは $V = const.$ の沿った方向に動径方向に進む光線が在る。各点に対する光円錐は、これらの光線を基にして描かれる。ブラックホール内部へ向かう時間的な測地線は、その始点を P とすると、この点を未来向き光円錐の頂点として、未来向き光円錐の内部の方向に進む。また、この時間的観測者の測地線は点 P から少し進んだ点においても未来向き光円錐の内側を進む。したがって、 $U < 0, V > 0$ に点 P が在るとすると、ブラック

ホール内部へ向かう時間的な測地線は $r = 2M$ 面を跨ぎ $r = 0$ の中心特異点へ向かって行く。この時間的な測地線に沿った観測者は $r = 2M$ 面を通過した後の任意の時空点 Q でシグナルを送っても、それは点 Q を頂点とする未来向き光円錐上かその内部にあり全て $r = 0$ の特異点へ向かう。つまり、 $r = 2M$ の外部へはシグナルを送れない。この様な理由から、 $r = 2M$ 面の外部からは $r = 2M$ 内部に落下した観測者を見る事は出来ない。図8を参照されたい。この $r = 2M$ 面はブラックホールの事象の地平面と言われる。シュバルツシルトブラックホールでは、事象の地平面は (t, r) 座標で特異な面であったので、ラプス関数 $f_{sch}(r) = 0$ の面に対応する。つまり、その位置は次のように見つける事ができる。

$$f_{sch}(r) = 0 = \frac{r - 2M}{r}, \quad r_+ = 2M. \quad (\text{A.21})$$

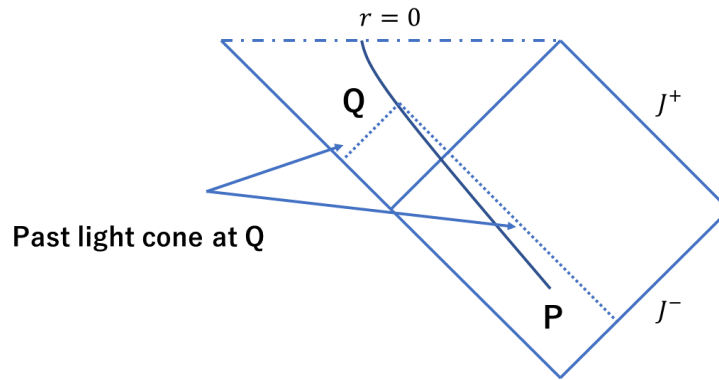


図8: 始点 P から出発し、シュバルツシルトブラックホール内部へ入っていく時間的な観測者。点 Q から描かれる過去向きの光円錐内を見るので、観測者は点 Q において事象の地平面を見ることができる。

事象の地平面 $r = 2M$ は U または V 軸であるが、領域 $U < 0, V > 0$ のブラックホール外部から事象の地平面を跨ぎ $U > 0, V > 0$ の領域へ行く場合と、領域 $U < 0, V < 0$ から $U < 0, V > 0$ へ行く時に跨ぐ場合では、ペンローズ図上で区別されるべきである。前者は未来の事象の地平面と言われ、後者は過去の事象の地平面と呼ばれる。そして、領域 $U < 0, V < 0$ はシュバルツシルト時空のホワイトホールと言われて、観測者や粒子が過去の事象の地平面を跨ぎ外部へ出る。しかし、この観測者は $U < 0, V < 0$ から $U < 0, V > 0$ に行く時に過去の事象の地平面が在る事を知らない。

領域 I 内部で時間的なキリングベクトル $t^\alpha = dx^\alpha/dt$ を考える。すると、内積を計算すれば、

$$g_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta \propto f_{sch}(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \quad (\text{A.22})$$

となり、これはラプス関数である。(A.22)より $r = 2M$ で $t_\alpha t^\alpha = 0$ となる。したがって、キリングベクトル t^α は事象の地平面上で光的であることが分かる。このように、キリングベクトルが事象の地平面上の光的方向に沿っているとき、そのような事象の地平面はキリング地平面と言われる。シュバルツシルト解だけでなく、一般に定常なブラックホール時空では事象の地平面はキリング地平面となる。

A.4 クルスカル座標と地平面

クルスカル座標上の点 $(U, V) = (0, 0)$ は、未来の事象の地平面と過去の事象の地平面の分岐点である。そして、事象の地平面上ではキリングベクトル $t^\alpha = dx^\alpha/dt$ は光的になる。そこで、地平面の分岐点とキリングベクトルについて更なる考察を行うために、クルスカル座標を用いて、キリングベクトルを考えよう。クルスカル座標 (A.14) の定義から、次の関係が得られる。

$$\exp\left(\frac{t}{2M}\right) = -\frac{V}{U}. \quad (\text{A.23})$$

また (A.16) の関係も成り立つので、

$$U^2 = e^{(r-t)/2M} \left(\frac{r}{2M} - 1\right), \quad V^2 = e^{(r+t)/2M} \left(\frac{r}{2M} - 1\right), \quad (\text{A.24})$$

となる。今、キリングベクトルは $t_{(t)}^\alpha$ と与えるので、偏微分を計算すると、

$$t^U = -\frac{U}{4M}, \quad t^V = \frac{V}{4M}, \quad (\text{A.25})$$

である。以上の結果から、分岐点 $(U, V) = (0, 0)$ においてキリングベクトル $t_{(t)}^\alpha$ は消える。そして事象の地平面上で、キリングベクトルは光的である。キリングベクトルの成分 t^V は $U = 0$ において未来の事象の地平面に沿っている。ゆえに、クルスカル座標を用いても、事象の地平面はキリング地平面である。

A.5 物質の存在する球対称時空の解

シュバルツシルト解は真空中で球対称な解であるが、物質や流体および電磁場などの場がアインシュタイン方程式に寄与するならば、我々が得る時空はシュバルツシルト解とは異なる球対称解である。一般相対論のブラックホールの議論では、宇宙項が物質として寄与する場合の解である (反)ドジッター・シュバルツシルト解と、電磁場が物質として寄与する場合の解であるライスナー・ノルドストローム解の二つが有名な球対称解である。本節では、アインシュタイン方程式 (A.5) を実際に解くことで、これら二つの解を与えよう。

A.5.1 (反)ドジッター・シュバルツシルト解

(A.5) に対して、宇宙項のみを物質的な寄与と考えて、時空の解を見つける。初めに、エネルギーテンソルを書き下すと、

$$\tau^\mu{}_\nu = -\frac{\delta^\mu{}_\nu}{8\pi G_0} \Lambda_0, \quad (\text{A.26})$$

である。(A.26) を (A.5) に代入すれば、

$$M(r) = M + \frac{\Lambda_0}{6} r^3, \quad \psi(t, r) = \psi(t), \quad (\text{A.27})$$

と結果を得る。(A.3) から、宇宙項を物質に持つ解は、

$$ds^2 = -f_{ds}(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f_{ds}(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad f_{ds}(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda_0}{3}r^2, \quad (\text{A.28})$$

となり、(A.28) は (反)ドジッター・シュバルツシルト解と言われる。(A.28) のラプス関数 $f_{ds}(r)$ の第3項目が (反)ドジッターと言われる部分である。(反)ドジッター時空のポテンシャルを計算すると、

$$V_{ds} = -\frac{M}{r} - \frac{\Lambda_0}{6}r^2, \quad (\text{A.29})$$

となる。このポテンシャルは $r \rightarrow \infty$ の十分遠方で第二項のみが有効となって、 $\Lambda_0 > 0$ は斥力に対応してドジッター時空と言われる。一方で $\Lambda_0 < 0$ では引力であり、反ドジッター時空と言われる。(A.28) に関して、 $M = 0$ を取ってみれば、(反)ドジッター時空が得られて、

$$ds^2 = -f_{(A)dS}(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f_{(A)dS}(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad f_{(A)dS} = 1 - \frac{\Lambda_0}{3}r^2, \quad (\text{A.30})$$

となる。ラプス関数 $f_{(A)dS}(r) = 0$ より、宇宙論的地平面が r_{cos} の位置に存在することが分かる。ここで

$$r_{cos} = \sqrt{\frac{3}{\Lambda_0}} = l_{(A)dS}, \quad (\text{A.31})$$

であり、 $l_{(A)dS}$ は曲率半径、またはド・ジッター半径と言われる。これは、ドジッター宇宙の有効な動径距離を表す。

(反)ド・ジッター計量 (A.30) を導出したので、更なる考察を行うために、S. Carroll の教科書 [58] “SPACETIME AND GEOMETRY An Introduction to General Relativity” を参考に、ド・ジッター空間と反ド・ジッター空間について簡単にまとめて、それらの共形図を描いてみよう。

ド・ジッター空間とは、正曲率の最大対称空間である。五次元のミンコフスキー空間 $ds_5^2 = -du^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2$ に対して、双曲面 $-u^2 + x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = \alpha^2$ を埋め込むことで与えられ、その計量は、

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha^2 \cosh^2(t/\alpha)[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)], \quad (\text{A.32})$$

で与えられる。(A.30)の計量は上記の計量を座標変更して得られる一つの結果である。(A.32)で表されるド・ジッター計量の共形図を簡単に描くために、次の座標変換を行う。

$$\cosh(t/\alpha) = \frac{1}{\cos(t')}. \quad (\text{A.33})$$

すると、 $ds^2 = (\alpha^2/\cos^2(t'))d\bar{s}^2$ となる。ここで

$$d\bar{s}^2 = -(dt')^2 + d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega^2 \quad (\text{A.34})$$

である。これは静的アインシュタイン宇宙の計量とよばれる。つまり、ド・ジッター時空は静的アインシュタイン宇宙に埋め込むことができる。ゆえに、 $-\pi/2 < t' < \pi/2, 0 < \chi < \pi$ の閉じた範囲を考えて共形図を描けば良い。

一方で、反ド・ジッター空間は、負曲率の最大対称空間である。これは $ds^2 = -du^2 - dv^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ の計量に、次の $-u^2 - v^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -\alpha^2$ を埋め込むことで得られ、計量は、

$$ds^2 = \alpha^2(-\cosh^2(\rho)dt'^2 + d\rho^2 + \sinh^2(\rho)d\Omega^2), \quad (\text{A.35})$$

である。ここで、次の座標変換、

$$\cosh(\rho) = \frac{1}{\cos\chi}, \quad (\text{A.36})$$

を行うと、計量は、

$$ds^2 = \frac{\alpha^2}{\cos^2\chi}d\bar{s}^2, \quad (\text{A.37})$$

となる。つまり、静的アインシュタイン宇宙(A.34)に埋め込むことができる。反ド・ジッターの計量を得るための座標変換では、時間 t' は $t' + 2\pi$ で周期的である。そして、 $\cos\chi$ を考えると $0 < \chi < \pi/2$ の閉じた領域で共形図を描けば良い。

A.5.2 ライスナー・ノルドストローム解

宇宙項が $\Lambda_0 = 0$ であり、電磁場が物質としてアインシュタイン方程式に寄与する場合を考えて、ライスナー・ノルドストローム解を導出する。最初の目的は、エネルギー運動量テンソルを導くことなので、電磁場の作用、

$$S_{em} = -\frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}, \quad F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu, \quad (\text{A.38})$$

から始める。ここで $F_{\mu\nu}$ は電磁場の強さと言われるものであり、 A_μ は電磁場のポテンシャルである。被積分関数であるラグランジアン、

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{16\pi} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.39})$$

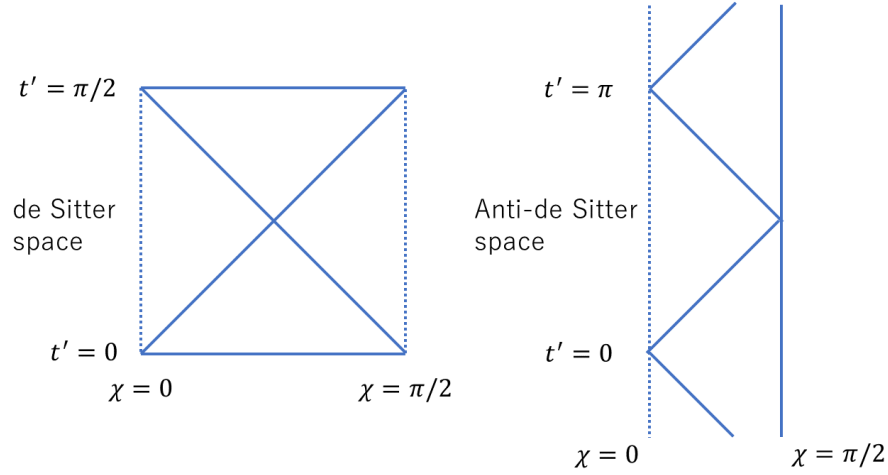


図 9: 左側が (t', χ) で書かれたド・ジッター空間の共形図。右側は (t', χ) で描かれた反ド・ジッター空間の共形図。共形図は様々な座標系で描かれ、ペンローズ図も共形図の一つである。

を計量で微分して、

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{em}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{8\pi} g^{\alpha\beta} F_{\mu\beta} F_{\nu\alpha}, \quad (\text{A.40})$$

を得るので、作用から導かれる電磁場のエネルギー運動量テンソルは、

$$T_{em}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(g^{\alpha\beta} F^\mu{}_\alpha F^\nu{}_\beta - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right), \quad (\text{A.41})$$

となる。ここで、電磁場の作用はマクスウェル方程式を満足するので、真空のマクスウェル方程式を考えると、

$$0 = \nabla_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}), \quad (\text{A.42})$$

となり、(A.1) を用いて具体的に $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ より、

$$\frac{d}{dr} (e^{\psi(t,r)} r^2 F^{tr}) = 0, \rightarrow F^{tr} = e^{-\psi} \frac{q}{r^2}, \quad (\text{A.43})$$

となって、保存量 q が決まる。(A.1) の時空計量で (A.43) を (A.41) に代入して展開すると、

$$(T_{em}{}^\mu{}_\nu) = \frac{q^2}{8\pi r^4} \text{diag}(-1, -1, 1, 1), \quad (\text{A.44})$$

と書ける。よって、(A.5) が解けて、

$$M(r) = M - \frac{G_0 q^2}{2r}, \quad \psi(t, r) = \psi(t), \quad (\text{A.45})$$

である。\$G_0\$ を明確にして、(A.3) を書き下せば、

$$ds^2 = -f_{RN}(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f_{RN}(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad f_{RN}(r) = 1 - \frac{2G_0m}{r} + \frac{G_0q^2}{r^2}, \quad (\text{A.46})$$

となって、これはライスナー・ノルドストローム時空と言われる。次元を明確にするために \$Q^2 = G_0q^2\$ と書いて \$[Q] = L\$ を明確にすることがある。

ここで、電荷 \$q\$ をガウスの法則を用いて計算する方法を示しておく。まずは、空間的な超局面 \$\Sigma\$ を考えて、超局面上で電磁場は正則な分布であると仮定しよう。すると、

$$q = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} d\Sigma_{\mu} \nabla_{\nu} F^{\mu\nu}, \quad (\text{A.47})$$

となる。すると、ストークスの定理を用いて書き換えれば、二次元超局面 \$dS_{\alpha\beta}\$ を用いて、

$$q = \frac{1}{8\pi} \int_S F^{\alpha\beta} dS_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.48})$$

となる。このようにしてガウスの法則が得られる。もし \$F^{tr} = (\text{const.})/r^2\$ とならず複雑に動径距離に依存しても、(A.48) を実直に計算する事で、超局面 \$\Sigma\$ における電荷が求められる。そして、\$F^{tr} = (\text{const.})/r^2\$ となる簡単な場合では、\$F^{\alpha\beta} dS_{\alpha\beta} = 2F^{tr} \sqrt{-g} d\theta d\phi\$ となるので、球面の積分から、\$q = (\text{const.})\$ が確かめられる。

A.6 ライスナー・ノルドストローム解のクルスカル拡張

(A.46) で与えられるライスナー・ノルドストローム計量をクルスカル座標で表すことを本節の目的とする。始めに、ライスナー・ノルドストローム時空のラプス関数は、

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}, \quad (\text{A.49})$$

である。ゆえに地平面は \$f(r) = 0\$ から、

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}, \quad (\text{A.50})$$

である。\$r_+\$ は外部地平面、\$r_-\$ は内部地平面と言われる。ただし、これらが存在するための条件は \$|Q| < M\$ である。\$|Q| = M\$ では \$r_- = r_+\$ となり、二つの地平面が一致する特殊な状況で、エクストリームブラックホールと呼ばれる。もし、\$|Q| > M\$ ならば、地平面は存在しない。また、ライスナー・ノルドストロームブラックホールは \$r = 0\$ において中心特異点がある。

座標 \$(t, r)\$ において、外部地平面 \$r = r_+\$ は特異なので、この問題を解決するために、\$r_+\$ を自然に跨げる座標変換を導入したい。これは、クルスカル座標によって上手く表せるはずである。しかし、内部地平面 \$r = r_-\$ の特異性が自然に除けるとは限らない。ゆえに、\$r_-\$ 面の

内側では座標系の再拡張が必要と考えられる。そして、 r_- 面の内側と外側が上手くつながるもので無ければならない。また、言い換えると、特異な r_+ 面が正則となるクルスカール拡張を行ったとしても、これはライスナー・ノルドストローム時空の全領域を覆うとは限らない。まずは、 r_+ 面の特異性を解消し、外部地平面は事象の地平面であることを確認しよう。(A.46) を r_+ 近傍で考えると、ラプス関数は次のように近似的に表される。

$$f(r) \simeq 2\kappa_+(r - r_+). \quad (\text{A.51})$$

ここで、 $\kappa_+ = f'(r_+)/2$ である。そして、亀座標 r^* を計算すると、

$$r^* = \int \frac{dr}{f} \simeq \frac{1}{2\kappa_+} \ln |\kappa_+(r - r_+)|, \quad (\text{A.52})$$

である。 r^* を用いて光的座標 $u = t - r^*, v = t + r^*$ を導入すると、外部地平面 $r = r_+$ 近傍において、 $v - u = -\infty$ となる。よって、クルスカール座標は指数的に、

$$U_+ = \mp e^{-\kappa_+ u}, \quad V_+ = e^{\kappa_+ v}, \quad (\text{A.53})$$

となる。ゆえに、 $f \simeq -2U_+V_+$ が $r = r_+$ 近傍で成り立つ。そして計量は、

$$ds^2 \simeq -\frac{2}{\kappa_+^2} dU_+ dV_+ + r_+^2 d\Omega^2, \quad (\text{A.54})$$

である。このクルスカール座標 (U_+, V_+) は外部地平面近傍で、計量を正則にする。したがって、外部地平面 $r = r_+$ は事象の地平面である。しかし、 (U_+, V_+) の座標は十分遠方では拡張可能であるが、内部地平面近傍では特異である。よって、 $r_- < r_1 < r_+$ であるようなある半径 r_1 を導入し、 $r_1 < r < \infty$ の領域において (U_+, V_+) が自然に拡張できるとするべきである。

r_- 面の特異性が除かれるためには、この面の内側で新たな座標系を導入するべきである。そして、その座標系は $r_- < r < r_+$ において、上手く接続される様なもので在るべきである。しかし、 $r > r_+$ の範囲とは区別されるものである。 $r_- < r < r_+$ において、ラプス関数 f は負となる。そして、 $g_{tt} > 0$ であり $g_{rr} < 0$ となる。 (t, r) 座標系では $r = r_-$ 面を超えて $0 < r < r_-$ の領域へ行くことができないので、クルスカール座標 U_-, V_- を内部地平面近傍で決めなければならない。内部地平面近傍でラプス関数は、

$$f(r) \simeq -2\kappa_-(r - r_-), \quad (\text{A.55})$$

となる。ここで $\kappa_- = |f'(r_-)|/2$ である。 r^* は次のように、

$$r^* \simeq -\frac{1}{2\kappa_-} \ln |\kappa_-(r - r_-)|, \quad (\text{A.56})$$

である。光的座標は $u = t - r^*, v = t + r^*$ とする。すると、 $r = r_-$ 面において、 $v - u = +\infty$ となる。指数関数を用いてクルスカール座標を次のように定義する。

$$U_- = \mp e^{\kappa_- u}, \quad V_- = -e^{-\kappa_- v}. \quad (\text{A.57})$$

よって、内部地平面近傍で $f \simeq -2U_-V_-$ が成り立つので、計量は、

$$ds^2 \simeq -\frac{2}{\kappa_-^2} dU_- dV_- + r_-^2 d\Omega^2, \quad (\text{A.58})$$

となる。この計量は $r = r_-$ で正則となるが、 r_+ では正則ではない。

先に、内部地平面内側での構造について述べておこう。中心 $r = 0$ の特異点は、その近傍において時間的となっている。これは古典的なシュバルツシルトブラックホールの空間的特異点とは異なる特徴である。なぜなら、 $r = \text{const} < r_-$ は時間的な超局面になるからで、それは特異点近傍でも同様である。

ブラックホールに入っていく観測者を少し詳しく考えよう。この観測者は、外部地平面から内部地平面へ向かう領域で、動径距離 r は減少する。そして、内部地平面 $r = r_-$ の内部に入ると、動径距離が減少するか、方向転換し増加する方向にシフトする可能性が在る。すなわち、内部地平面内部へ入った観測者は、そのまま中心特異点へ落ちる代わりに、方向転換し動径距離が増加する方向へ運動する事ができる。その場合、観測者は再び $r = r_-$ を通過する。この $r = r_-$ は元の内部地平面の複製であり、もう一つの宇宙の地平面である。その後、観測者は外部地平面へ向かい、その面を通過する。外部地平面も元の複製である。観測者は結局、複製されたもう一つの宇宙において動径距離 r が増加し、外部地平面を通過する。

内部地平面の内側で折り返し、もう一つの宇宙へ向かう観測者は、内部地平面、外部地平面を通過し漸近平坦な宇宙へ向かう。それで終わりではなく、この経路は繰り返す事が可能である。よって、ライスナー・ノルドストロームブラックホールのペンローズ図は、単一のペンローズ図の範囲で描かれるブラックホール領域がブラックホールトンネルによって無限に繋がった図となる。

A.7 表面重力

前節で導入した量 $\kappa_+ = f'(r_+)/2$ はライスナー・ノルドストローム時空における外部地平面 (事象の地平面) で与えられるもので、そして、クルスカール座標を定義するために取り入れた量である。我々は、この量を表面重力と言い簡易に κ と書く。この表面重力はブラックホールの力学的側面で重量な量である。ライスナー・ノルドストロームブラックホールの表面重力を計算すると、

$$\kappa = \frac{r_+ - r_-}{2r_+^2} = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{r_+^2}, \quad (\text{A.59})$$

である。このことから、エクストリーマル $M = Q$ の場合では、 $\kappa = 0$ である。一方で、電荷がない $Q = 0$ のシュバルツシルトブラックホールの表面重力は、

$$\kappa = \frac{1}{4M}, \quad (\text{A.60})$$

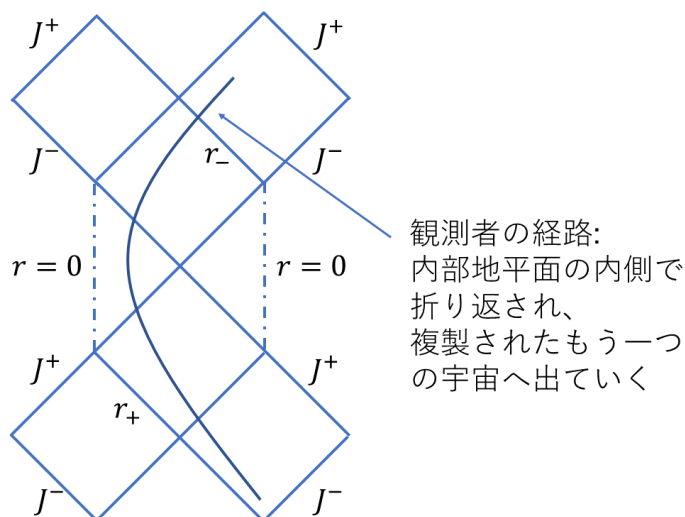


図 10: ライスナー・ノルドストローム時空のペンローズ・カーター図: 内部地平面の内側で経路を変えて、もう一つの宇宙へ出ていく彼(彼女)の経路を描いている。一般的に、このペンローズ・カーター図は鎖状に繰り返し描かれる。

となる。

表面重力と言う名はとても妥当な名前である。一般的な静的球対称時空を考えてみよう。

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (\text{A.61})$$

ここで、ラプス関数は、

$$f(r) = 1 - \frac{2M(r)}{r}, \quad (\text{A.62})$$

を考えよう。 $M(r) = M - Q^2/(2r)$ はライスナー・ノルドストロームブラックホールを表す。単位質量の定常的な粒子を考える。定常的な粒子の4元速度は、 t^α を用いて、 $u^\alpha = f^{-1/2}t^\alpha$ である。そして、加速度は $a^\alpha = u^\beta \nabla_\beta u^\alpha$ である。消えない成分は $a^r = f'/2$ であるので、加速度の内積から、次の関係式を与える。

$$a(r) = \sqrt{g_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta} = \frac{1}{2} f^{-1/2} f'(r). \quad (\text{A.63})$$

もし、粒子の加速度が与えられると、粒子が受ける力が分かる。粒子が受ける力は事象の地平面上 r_+ において発散する。しかし、十分遠方における観測者がこの粒子に紐をつけてぶら下げているとする。そのときにこの観測者の測る力が $a(r)$ であるかは自明ではない。観測者の受け取る量は $a_\infty(r)$ と異なる可能性が在る。

この問題点について考えるために、定性的な考察を行おう。今、観測者は十分遠方にて、紐でつないだ粒子を十分小さな固有距離を δ_S だけ引っ張ることを考える。その仕事は $\delta W_\infty = a_\infty \delta_S$ と考えられる。一方、 δ_S は粒子の位置でも同じであるから、粒子の位置での

仕事は、 $\delta W = a\delta_S$ である。さて、仮に仕事 δW が放射エネルギーに置き換えられて放射され、それを無限遠方の観測者が回収することを考えよう。この放射は $f^{1/2}$ の因子による赤方偏移の効果を受けてるはずだ。すなわち、十分遠方にいる観測者が受け取るであろう放射のエネルギーは、

$$\delta E_\infty = f^{1/2}a\delta_S, \quad (\text{A.64})$$

である。エネルギー保存則の観点から、 $\delta E_\infty = \delta W_\infty$ が成り立つべきである。すなわち、

$$a_\infty(r) = f^{1/2}a(r) = \frac{1}{2}f'(r), \quad (\text{A.65})$$

である。これは十分遠方における観測者が動径距離 r の位置にある粒子に与える力である。この量は $r \rightarrow r_+$ に於いても正則である。この、

$$\kappa = a_\infty(r_+) = \frac{1}{2}f'(r_+), \quad (\text{A.66})$$

は、無限遠にいる観測者が粒子を $r = r_+$ の位置に保つよう支える力であり、表面重力と呼ぶにふさわしい。

表面重力は、キリングベクトル t^α から定量的に導くことができる。すでに見たように、静的球対称ブラックホールの事象の地平面はキリング地平面であり、そして t^α は光的接ベクトルで在る事を確認した。そして、内積は事象の地平面上で $\Phi := -t^\alpha t_\alpha = 0$ である。よって、法線ベクトルの方向は $\partial_\alpha \Phi$ に比例するはずだ。ここで、適当なスカラー κ として、

$$\nabla_\alpha(-t^\mu t_\mu) = 2\kappa t_\alpha, \quad (\text{A.67})$$

とする。以下の順を追って計算すると、最終的に κ は表面重力で在る事が示される。まず始めに (v, r) 座標を用いて計算してみよう。まず、事象の地平面上でキリングベクトルは次を満足する。

$$t^\alpha \partial_\alpha = \partial_v, \quad t_\alpha dx^\alpha = dr. \quad (\text{A.68})$$

すると、内積と法線方向に関しては、

$$\Phi = -g_{vv} = f, \quad \partial_\alpha \Phi = f' \partial_\alpha r, \quad (\text{A.69})$$

となる。ゆえに、表面重力 $\kappa = \frac{1}{2}f'(r_+)$ を得る。また、この計算から v は地平面の光的生成子のパラメーターになっていることも分かる。

キリングベクトル t^α は事象の地平面上において、光的接ベクトルである。ゆえに、キリングベクトルは事象の地平面 $r = r_+$ 上で

$$t^\beta \nabla_\beta t^\alpha = \kappa t^\alpha, \quad (\text{A.70})$$

を満たす。ここで、キリングベクトルのパラメータ v はアフィンパラメータ λ とは異なるが、パラメータには $d\lambda/dv = e^{\kappa v}$ の関係がある。そして、 $\lambda = V/\kappa$ として $V = e^{\kappa v}$ とおく。すると、光的ベクトルは $k^\alpha = V^{-1}t^\alpha$ である。

ここから、表面重力の一般化公式を導いておく。キリング地平面上では、それを生成する光的キリングベクトル場は地平面に垂直でなければならない。したがって次のフロベニウスの定理が満足される。

$$t_{[\alpha}\nabla_{\beta}t_{\gamma]} = 0. \quad (\text{A.71})$$

(A.71) は次式のように表わされる。

$$t_\alpha\nabla_\beta t_\gamma + t_\gamma\nabla_\alpha t_\beta + t_\beta\nabla_\gamma t_\alpha = 0, \quad (\text{A.72})$$

次に、 $\nabla^\beta t^\alpha$ との縮約を取る。

$$\begin{aligned} \nabla^\beta t^\alpha \nabla_\beta t_{\alpha\gamma} &= -\nabla_\alpha t_\gamma \nabla^\beta t^\alpha t^\beta + \nabla_\gamma t_\beta \nabla_\alpha t^\beta t^\alpha \\ &= -\kappa \nabla_\alpha t_\gamma t^\alpha + \kappa \nabla_\gamma t_\beta t^\beta \\ &= -2\kappa^2 t_\gamma. \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

ゆえに、キリングベクトルを用いた表面重力の公式は、

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}\nabla^\beta t^\alpha \nabla_\beta t_\alpha, \quad (\text{A.74})$$

となる。この公式から、表面重力を書き下す時に注意すべきは $r = r_+$ の事象の地平面上で成り立つ事である。以上で表面重力に関して、定性的な立場からと、定量的な立場から説明を行った。

A.8 カーブラックホール

アインシュタイン方程式の解で、回転するブラックホール時空解は1963年にロイ・カーによって与えられた。また、アインシュタイン・マクスウェル方程式から導き出される定常軸回転する荷電ブラックホール解も在る。ここから、定常軸回転するカーブラックホールについて幾つかの力学的な側面を考えよう。カー解について、その線素の表示は幾つか代表的な表示が在るが、次のように書き下す。

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right)dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi \\ &+ \frac{\Sigma}{\rho^2} \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \\ &= -\frac{\rho^2 \Delta}{\Sigma} dt^2 + \frac{\Sigma}{\rho^2} \sin^2 \theta (d\phi - \omega dt)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2. \end{aligned} \quad (\text{A.75})$$

これは Boyer-Lindquist (ボーヤー・リンクイスト) 座標と言う。ここで、関数は以下のように与えられる。

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad (\text{A.76})$$

$$\Sigma = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta, \quad \omega = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} = \frac{2Mar}{\Sigma}. \quad (\text{A.77})$$

カー時空は定常軸回転するブラックホール解であり、キリングベクトルは時間 t と角度座標 ϕ に対して、

$$t^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t}, \quad \phi^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \phi}, \quad (\text{A.78})$$

で与えられる。また、カー時空は十分遠方 $\rho \rightarrow \infty$ で漸近平坦な時空である。

計量成分の逆行列はクラメルの公式を考えると直ちに、

$$g^{tt} = -\frac{\Sigma}{\rho^2 \Delta}, \quad g^{t\phi} = -\frac{2Mar}{\rho^2 \Delta}, \quad g^{\phi\phi} = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \Delta \sin^2 \theta}$$

$$g^{rr} = \frac{\Delta}{\rho^2}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{\rho^2}, \quad (\text{A.79})$$

が得られる。ここで $d\psi = d\phi - \omega dt$ と書き直した座標系で考える事も可能である。しかし、 (t, r, θ, ϕ) 座標の方が馴れている。計量が発散する状況は、関数 $\Delta = 0$ と $\rho^2 = 0$ が在るが、座標の特異点が必ず曲率特異点とは限らない。ゆえに、特異点を区別するために、カー時空のクレッチマンスカラー量を計算すると、

$$K_{Kerr} = (R_{\mu\nu\alpha\beta})^2 = \frac{48M^2}{\rho^{12}} (r^2 - a^2 \cos^2 \theta)(\rho^4 - 16a^2 r^2 \cos^2 \theta), \quad (\text{A.80})$$

である。ゆえに、座標特異点は $\Delta = 0$ で与えられ、 $\rho^2 = 0$ は真の特異点である。カーブラックホールに対する力学的な量や、その説明は以降の節で考えよう。そして、角速度に関しては、ゼロ角速度観測者、静的観測者、定常的観測者の三つの状態で表され、これらは互いに角運動量の引きずりを表す要因である。

A.9 慣性系の引きずり: ZAMOs

角速度がゼロの観測者は ZAMOs と言われ、角運動量もゼロである $\tilde{L} = u_\alpha \phi^\alpha = 0$ 。ここで u^α は四元速度であり、アフィンパラメータを λ としよう。すると、

$$\tilde{L} = 0, \quad \rightarrow \quad g_{\phi t} \dot{t} + g_{\phi\phi} \dot{\phi} = 0, \quad (\text{A.81})$$

である。よって、この観測者からすると、系の持つ角速度は、

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \omega = \frac{2Mar}{\Sigma}, \quad (\text{A.82})$$

となる。これは $\omega = -g_{t\phi}/g_{\phi\phi}$ である。この角速度はブラックホールに近づく程大きくなる。また、ZAMOs はブラックホールの回転方向と同じ方向に動いている観測者を表す。

最後に、十分遠方における角速度を導こう。関数 Σ は十分遠方において $\Sigma \propto r^4$ である。よって、十分遠方では角速度は、

$$\omega(r \rightarrow \infty) \simeq \frac{2J}{r^3} \rightarrow 0, \quad J = Ma, \quad (\text{A.83})$$

となる。つまり、十分遠方では ZAMO の角運動量はゼロとなるので、引きずりも無い。

A.10 静的観測者と静的極限

カー時空における静的観測者は、その四元速度が、遠方での定常性を表すキリングベクトル t^α に比例した形式で、

$$u^\alpha = \gamma t^\alpha, \quad (\text{A.84})$$

と表わされる。ここで、 γ は、規格化条件 $u_\alpha u^\alpha = -1$ より、

$$\gamma = (-g_{\mu\nu} t^\mu t^\nu)^{-1/2}, \quad (\text{A.85})$$

である。

静的な観測者はカー時空の何処でも存在する訳ではない。なぜなら、キリングベクトル t^α はどこで時間的とはならないからである。実際、 t^α が光的になる場合が考えられる。このとき、 $\gamma^{-2} = -g_{tt} = 0$ であるから、(A.84) は上手く成り立たない。 $g_{tt} = 0$ となる位置を静的極限と言う。(A.75) と (A.77) を用いると、

$$r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2 \theta = 0, \quad (\text{A.86})$$

から、静的極限は $r = r_{sl}(\theta)$ 、

$$r_{sl}(\theta) = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}, \quad (\text{A.87})$$

で与えられる。静的極限より内側の領域 $r \leq r_{sl}(\theta)$ では、たとえいかなる力が働こうとも静的観測者は存在できない。言い換えると、慣性の引きずり効果によって、観測者はブラックホールの回転と共動している。静的極限はブラックホールの事象の地平面とは一致しない。事象の地平面と静的極限の間の領域は、カー時空のエルゴ領域と言われる。

A.11 事象の地平面: 定常的観測者

角度座標 ϕ の方向に対して一様な角速度 $\Omega = d\phi/dt$ で運動する観測者を、定常的観測者という。その4元速度は、キリングベクトル t^α, ϕ^α を用いて、

$$u^\alpha = \gamma(t^\alpha + \Omega\phi^\alpha), \quad (\text{A.88})$$

と表わされる。規格化因子 γ は次のように決められる。

$$\begin{aligned}\gamma^{-2} &= -g_{\mu\nu}(t^\mu + \Omega\phi^\mu)(t^\nu + \Omega\phi^\nu) \\ &= -g_{tt} - 2\Omega g_{t\phi} - \Omega^2 g_{\phi\phi} \\ &= -g_{\phi\phi}(\Omega^2 - 2\omega\Omega + g_{tt}/g_{\phi\phi}).\end{aligned}\tag{A.89}$$

ここで、 $\omega = -g_{t\phi}/g_{tt}$ を表す。

定常的な観測者はカー時空上の如何なる場所でも存在する訳ではない。定常観測者の4元速度が時間的でなければならないが、そのためには $t^\alpha + \Omega\phi^\alpha$ が時間的でなければならないので、 $\gamma^{-2}g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = g_{\mu\nu}(t^\mu + \Omega\phi^\mu)(t^\nu + \Omega\phi^\nu) < 0$ より、 $\gamma^{-2} > 0$ であることが、定常観測者の存在条件である。これより、

$$\Omega_{\pm} = \omega \pm \sqrt{\omega^2 - g_{tt}/g_{\phi\phi}},\tag{A.90}$$

となり、定常観測者の角速度の許される範囲は、

$$\Omega_- < \Omega < \Omega_+,\tag{A.91}$$

である。線素 (A.75) と関数 (A.77) を用いると、 Ω_{\pm} は以下のように書き下せる。

$$\Omega_{\pm} = \omega \pm \frac{\Delta^{1/2}\rho^2}{\Sigma \sin\theta}.\tag{A.92}$$

ここで $\Omega = 0$ の場合は、考えるキリングベクトルは t^α となるので、静的観測者に一致する。静的極限 $r = r_{sl}(\theta)$ は、静的観測者の存在できる領域の境界面であることを述べた。今、動径距離 r が $r_{sl}(\theta)$ より遥かに小さくなると、 Ω_- は大きくなっていき、 Ω_+ は徐々に減る。最終的に、 $\Omega_- = \Omega_+$ となり、角速度は $\Omega = \omega$ である。このときは ZAMOs と同じ状況を実現する場合で、観測者はブラックホールの回転と共に共動している状況で、角速度は ω である。

角速度が ω となる状況は、 $\Delta = 0$ から $r^2 - 2Mr + a^2 = 0$ を解いた動径距離の場合である。この2次方程式の解の大きな方は、

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2},\tag{A.93}$$

である。このような動径距離が存在するためには、 $a \leq M$ または $J \leq M^2$ でなければならない。すなわちブラックホールの角運動量 $J = aM$ には上限が存在し、 $a = M$ となる場合はエクストリーマル・ブラックホールである。そして、 $a > M$ の場合には、裸の特異点が存在する。

キリングベクトル $t^\alpha + \Omega\phi^\alpha$ は $r = r_+$ において光的となる。これより内側では $u_\alpha u^\alpha < 0$ が破れてしまうので、定常的な観測者が存在できる臨界面である。定常観測者の角速度は、 r_+ の直ぐ外側で、

$$\Omega_H = \omega(r_+) = \frac{a}{r_+^2 + a^2},\tag{A.94}$$

である。すなわち、無限遠から見て定常的な観測者は、ブラックホールの直ぐ外側ではブラックホールと共に回転している状態にある。

$r = r_+$ が事象の地平面であることを示すために、定常時空の事象の地平面は見かけの地平面と一致する事実を用いる。つまり、定常ブラックホールの事象の地平面は、その面に垂直な外向きの光的測地線束の膨張率がゼロであるような光的かつ定常な超曲面である。そのような超曲面の垂直ベクトルは、 $\partial_{\alpha}r$ に比例しなければならない。また、その面が光的であることから、そのような定常で光的超曲面上では条件 $g^{\alpha\beta}(\partial_{\alpha}r)(\partial_{\beta}r) = g^{rr} = 0$ が成り立たなければならない。すると、(A.77) から、

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 = 0, \quad (\text{A.95})$$

となり、これを解くと、

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}, \quad (\text{A.96})$$

が得られる。光的定常面を与える動径距離は r_{\pm} であり、 r_- は内部地平面で、 r_+ は事象の地平面と解釈できる。すなわち、カーブラックホールの内部構造は、地平面の観点ではライスマー・ノルドストロームブラックホールによく似た構造である。

カー解の2つのキリングベクトルの線形結合、

$$\xi^{\mu} = t^{\mu} + \Omega_H \phi^{\mu}, \quad (\text{A.97})$$

を定義する。この設定から分かるように、事象の地平面上で角速度 Ω_H で周回するキリングベクトル ξ^{α} は、事象の地平面の光的生成子に接する。ゆえに、カーブラックホールの事象の地平面はキリング地平面でもある。静的球対称な場合と異なる点は、定常軸回転するブラックホールに用いられる t^{α} は事象の地平面上で光的ではなく、静的極限で光的となるのに対し、 ξ^{α} は事象の地平面上で光的である事だ。

A.12 曲率特異点

カーブラックホールにおいて、事象の地平面 r_+ と内部地平面 r_- だけではなく、曲率特異点 $\rho^2 = 0$ が在る:

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0. \quad (\text{A.98})$$

これは $r = 0$ かつ $\theta = \pi/2$ である位置に特異点が在る事を意味する。ここで、 $x^2 + y^2 = (r^2 + a^2) \sin^2 \theta$ で $z = r \cos \theta$ と置くと、 $r = 0$ は、 (x, y) 座標では、 $x^2 + y^2 \leq a^2$ の円盤領域を表す。なぜなら、 $\sin^2 \theta \leq 1$ であるからだ。ゆえに、その境界である円周は、

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad (\text{A.99})$$

となる。この円周（リング）上がカー計量の特異点である。このため、カーブラックホールの特異点は、リング特異点と言われる。

A.13 カー時空の最大拡張

ここでは、カー時空の最大拡張を行い、事象の地平面と内部地平面を跨ぐ時空座標を与え、地平面の拡張を行おう。カー計量は動径座標 θ に依存するので、簡単のために $\theta = 0$ を考えて、地平面の拡張を行う。平易に言うと、カー計量は回転する座標系を表すので、球対称座標ではなく、座標の拡張が難しい。

まずは計量、(A.75) に対して $\theta = 0$ を考えよう。カー計量は二次元的に、

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2 + a^2} \left(dt - \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr \right) \left(dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr \right), \quad (\text{A.100})$$

である。この二次元計量は $g_{ab}(x^a)$ と $x^a, a = 1, 2$ によって書き直すことができる。そこで、二つの光的座標 $u = t - r^*, v = t + r^*$ を置くと、この座標系では、

$$ds^2 = -f(u, v) du dv, \quad (\text{A.101})$$

である。そこで、関数 $f(r)$ を書き下すと、

$$f = \frac{\Delta}{r^2 + a^2} = \frac{(r - r_+)(r - r_-)}{r^2 + a^2}, \quad (\text{A.102})$$

である。地平面は $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ となり、 r_+ は事象の地平面で、 r_- は内部地平面である。線素 (A.101) を見ると、とても簡単な形式である。ゆえに、座標系の最大拡張として、クルスカール拡張を考えよう。 $\theta = 0$ のカー計量の内部構造はライスナー・ノルドストロームブラックホールの構造と変わらない。ゆえに、事象の地平面を正則に与えるクルスカール拡張と、内部地平面が正則になるための領域 $r_- \leq r < r_1 (< r_E)$ のクルスカール拡張を考えるべきである。まずは事象の地平面を正則に表すクルスカール座標を検討する。事象の地平面 $r = r_+$ 近傍では、関数 $f(r)$ は次のように、

$$f \simeq 2\kappa_+(r - r_+), \quad (\text{A.103})$$

となり、新たな関数は $\kappa_+ = f'(r_+)/2$ とした。また、 r^* は次のとおりである。

$$r^* = \int \frac{dr}{f} \simeq \frac{1}{2\kappa_+} \ln |\kappa_+(r - r_-)|. \quad (\text{A.104})$$

そして、 $f \simeq \pm 2e^{2\kappa_+ r^*} = \pm 2e^{\kappa_+(v-u)}$ であり、+ 符号は $r > r_+$ 、 $r_1 < r < r_+$ は - 符号を表している。次のクルスカール座標を導入する。

$$U_{\pm} = \mp e^{-\kappa_+ u}, \quad V_{\pm} = e^{\kappa_+ v}. \quad (\text{A.105})$$

ゆえに $r = r_+$ 十分近傍では、カー計量は正則となり $ds^2 \simeq -2\kappa_+^{-2} dU_{\pm} dV_{\pm}$ である。

U_+, V_+ の座標は内部地平面近傍では正則とはならない。この理由から、内部地平面が正則で、 $r_- < r < r_1$ まで拡張され $r = r_1$ で上手く接続される U_-, V_- のクルスカル拡張を行う。 $r = r_-$ 近傍を考える。このとき、関数 $f(r)$ は負となり、

$$f \simeq -2\kappa_-(r - r_-), \quad (\text{A.106})$$

である。ここで $\kappa_- = |f'(r_-)|/2$ とした。なので、 $f \simeq \mp 2e^{-2\kappa_- r^*} = \mp 2e^{\kappa_-(u-v)}$ である。そして最適なクルスカル座標は、

$$U_- = \mp e^{\kappa_- u}, \quad V_+ = -e^{-\kappa_- v}, \quad (\text{A.107})$$

と定義する。このとき、 $ds^2 \simeq -2\kappa_-^2 dU_- dV_-$ となる。このとき、内部地平面は正則な地平面として表される。

この話は、ライスナー・ノルドストロームブラックホールのクルスカル拡張とまったく同様である。なので、ライスナー・ノルドストロームブラックホールのクルスカル図はカーブブラックホールのクルスカル図に酷似する。残った問題点は、中心近傍で、 (U_-, V_-) の座標系において $r = 0$ は $U_- V_- = -1$ となる。なので、これは時間的な超曲面を表し、少なくとも回転対称軸で特異点は存在せず、 $r < 0$ へ拡張される事が分かる。負の動径距離の領域では、カー時空とライスナー・ノルドストローム時空の類似性は成り立たない。この領域では、地平面も無く $r \rightarrow -\infty$ において平坦な時空となる。しかし、 $\rho = 0$ となるところ、すなわち $r = 0$ かつ $\theta = \pi/2$ に曲率特異点が在る。

以上の理由から、カーブラックホールは負の動径距離まで拡張されるだけでなく、中心近傍を離れるとライスナー・ノルドストローム時空と変わらず、また、中心近傍でリング特異点を持つペンローズ・カーター図が描かれる。図 10 はカーブラックホールでも同様であるが、 $\rho = 0$ となる曲率特異点が中心近傍に在るために、 $r = 0$ 近傍ではリング特異点が在る。

A.14 カーブラックホールの表面重力

ここでは、キリングベクトル ξ^α を用いて、カーブラックホールの表面重力を説明する。キリングベクトル (A.97) は事象の地平面上で光的生成子の方向に沿うために、これは光的である。以前、静的球対称ブラックホールの表面重力を計算した経験は、キリングベクトル ξ^α から導かれたので、この方法に従って、定常軸回転するカーブラックホールの場合でも、表面重力は次の、

$$\nabla_\alpha(-\xi_\beta \xi^\beta) = 2\kappa \xi_\alpha, \quad (\text{A.108})$$

から導かれるはずだ。または、キリング方程式を用いて、

$$\xi^\beta \nabla_\beta \xi^\alpha = \kappa \xi^\alpha, \quad (\text{A.109})$$

である。結果として、 κ は次のように書かれる。

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}\nabla_\beta\xi^\alpha\nabla^\beta\xi_\alpha. \quad (\text{A.110})$$

この定数 κ^2 は ϕ^α を一旦除いておくと、静的球対称時空で導いた表面重力に一致する。

ここから κ が表面重力であることを具体的に計算し確かめよう。カー時空の計量を用いて、

$$\xi^\alpha\xi_\alpha = \frac{\Sigma\sin^2\theta}{\rho^2}(\Omega_H - \omega)^2 - \frac{\rho^2\Delta}{\Sigma}, \quad (\text{A.111})$$

が得られる。そして、共変微分を計算すると、

$$\nabla_\alpha(-\xi_\beta\xi^\beta) = \frac{\rho^2}{\Sigma}\nabla_\alpha\Delta, \quad (\text{A.112})$$

を得る。ただし、これは事象の地平面上 $\Delta = 0$ で得られる結果である。条件は $\Omega_H = \omega$ である。しかし、 $\nabla_\alpha\Delta(r_+)$ は共変微分を行った後で r_+ を代入するので自明ではない。これは、 $\nabla_\alpha\Delta(r_+) = 2(r_+ - M)\partial_\alpha r$ である。事象の地平面上で、キリングベクトル ξ_α は $\partial_\alpha r$ に比例するので、公式 (A.108) を計算すると、表面重力を得る。

$$\kappa = \frac{r_+ - M}{r_+^2 + a^2} = \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{r_+^2 + a^2}. \quad (\text{A.113})$$

ここで、上式は $r_+ - r_-$ に比例するので、 $r_+ = r_-$ は $M = a$ となり、 $\kappa = 0$ はエクストリーマルカーブラックホールを表す。また、表面重力は角度座標 θ に依存しない物理量である。

A.15 Smarr(スマー) 公式

カーブラックホールでは質量 M は角運動量パラメータ $J = Ma$ を与える要素である。そして、面積は二次元の計量 σ_{AB} の行列式を積分して与えられ、

$$A = \int_{\mathcal{H}} \sqrt{\sigma} d^2\theta, \quad (\text{A.114})$$

である。 \mathcal{H} は二次元の積分領域を表す。事象の地平面がブラックホールの境界面で在るから $r = r_+$ の場合において面積を計算しよう。二次元計量を以下のように書き下す。

$$\sigma_{AB}d\theta^A d\theta^B = \rho^2 d\theta^2 + \frac{\Sigma}{\rho^2} \sin^2\theta d\psi^2. \quad (\text{A.115})$$

ここで、 $d\psi = d\phi - \omega dt$ である。ここで、ブラックホールのエネルギー変化が起こらないために、ある時刻 t_0 で固定する。このとき、 $d\psi = d\phi$ が成り立つ。この場合で、尚且つ、 $\Delta(r_+) = 0$ を考えると、

$$\sqrt{\sigma} d^2\theta = \sqrt{\Sigma} \sin\theta d\theta d\phi = (r_+^2 + a^2) \sin\theta d\theta d\phi, \quad (\text{A.116})$$

を得る。積分範囲 $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi < 2\pi$ で積分を実行すると、

$$A = 4\pi(r_+^2 + a^2), \quad (\text{A.117})$$

が得られる。角運動量 Ω_H と表面重力 (A.113) と上記のカーブラックホール面積は、事象の地平面上で r_+ により具体的に書き下される。質量、角運動量、面積は事象の地平面上において、次の関係式を持つ。

$$M - 2\Omega_H J = \frac{\kappa A}{4\pi}. \quad (\text{A.118})$$

この公式は Smarr 公式と言われ、1973年に Larry Smarr(ラリー・スマー)によって表された公式である。上記の公式は、事象の地平面上において、ブラックホールが自然に満たすべき公式である。

A.16 変分とブラックホールの法則

明確な事として、ブラックホールの面積 A は事象の地平面上で質量 M と角運動量 J に依存する: $A(M, J)$ 。すなわち、定常軸回転するブラックホールであるカー解は、質量 M と角運動量 J の二つの物理量で表される。我々は質量の変分 δM を他の物理量 J, A を用いて表したい。事象の地平面上で、質量は r_+ を用いて表すことができ、

$$r_+^2 - 2Mr_+ + a^2 = 0, \rightarrow M(r_+) = \frac{r_+^2 + a^2}{2r_+}, \quad (\text{A.119})$$

である。角運動量は $J = aM$ である。地平面は $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ だから、 $r_+ + r_- = 2M, r_+ r_- = a^2$, となる。また、 $r_+^2 + a^2 = A/4\pi, a(r_+ + r_-) = 2J$ である。ここで、 r_{\pm} を削除すれば、 $M^2 = A/(16\pi) + (4\pi J^2)/A$, の関係が得られる。面積の変分を計算すると、事象の地平面上で、

$$\frac{\delta A}{8\pi} = r_+ \delta r_+ + a \delta a, \quad (\text{A.120})$$

である。動径距離 r_+ は質量 M とカーパラメータ a に依存する。また、 $\Delta(r_+) = 0$ なので、質量の変分は、

$$(r_+ - M)\delta r_+ = r_+ \delta M - a \delta a, \quad (\text{A.121})$$

となる。最後のステップとしては、カーパラメータ a と角運動量 J に関してである。 $a = J/M$ なので、

$$M \delta a = \delta J - a \delta M, \quad (\text{A.122})$$

が得られる。以上の関係式や、変分の結果から、質量の変分を計算すると、

$$\delta M - \Omega_H \delta J = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A, \quad (\text{A.123})$$

である。ここで、各量 $\kappa/(8\pi), \Omega_H$ は次の通りである。

$$\frac{\kappa(r_+)}{8\pi} = \frac{r_+ - r_-}{16\pi(r_+^2 + a^2)}, \quad \Omega_H = \frac{a}{r_+^2 + a^2}. \quad (\text{A.124})$$

と与えられる。(A.123) はカーブラックホールの熱力学第一法則と考えられ、事象の地平面上で満たすべき自然な法則である。

A.17 キリングベクトル、定常軸回転ブラックホール

1972年にホーキングによって提唱された事として、定常回転するブラックホール解は回転軸対称な解であり、極点において静的な解である。このことから、定常軸回転するブラックホールは回転軸を持ち、二つのキリングベクトル t^α, ϕ^α が存在する事を示唆する。ホーキングによって与えられた一般的なキリングベクトルは t^α, ϕ^α の線形結合で表されるもので、 $\xi^\alpha = t^\alpha + \Omega_H \phi^\alpha$ であり、これは今までの解析において用いた。このキリングベクトルは、事象の地平面上で光的である。また事象の地平面上における角速度 Ω_H は回転しないブラックホールの場合ではゼロとなる。これらの事実が意味することは、事象の地平面はキリング地平面であり、 ξ^α は、この地平面上の光的生成子の方向に接であることである。このキリングベクトルのパラメータを v とすると、 $\xi^\alpha = dx^\alpha/dv$ となる。そして、この様な接ベクトルは次の方程式を満足する。

$$\xi^\beta \nabla_\beta \xi^\alpha = \kappa \xi^\alpha. \quad (\text{A.125})$$

上式は地平面上で在っても成り立つ。(A.125) から、 v はアフィンパラメータではない。このとき、アフィンパラメータ λ と先進時間 v の関係は、次のように決まる。

$$\frac{d\lambda}{dv} = e^{\kappa v}. \quad (\text{A.126})$$

すなわち、 $\kappa \lambda = e^{\kappa v} = V$ としており、このことから、アフィン・パラメーターをもつ光的測地線の接ベクトルと、光的キリングベクトルの関係は、

$$k^\alpha = V^{-1} \xi^\alpha, \quad (\text{A.127})$$

となる。(A.127) を $k^\beta \nabla_\beta k^\alpha$ に代入すると、測地線方程式 $k^\beta \nabla_\beta k^\alpha = 0$ を得る。今回は v を先進時間で同一視したが、任意の v であっても (A.127) は示される。この方法は (A.125) と $k^\beta \nabla_\beta k^\alpha = 0$ から初めて、 $k^\alpha = N(dv/d\lambda) \xi^\alpha$ として置き、実直に計算すると、 N は定数の調整に入れただけなので、(A.126) が得られる。定数 $\kappa \neq 0$ では k^α に対して測地線方程式が成

り立つ。また、角度座標を固定して、簡単な場合を考え、クルスカール座標 (U, V) を考えてみると、 $\xi^\alpha(t^\alpha)(\alpha = U_+, V_+) = 0$ が事象の地平面上で分かり、二つの光的面が交差する分岐が在る事を示している。定常軸回転するブラックホールのキリングベクトルは、以前の節等でも頻繁に用いてきた。

定常回転ブラックホールは軸対称で無ければならぬ事を疑問に思う人もいるかもしれない。なぜなら、定常回転ブラックホールの外部に、適当な物質を定常且つ非軸対称な形状に分布させれば、回転ブラックホールの定常性を保ったまま、軸対称性だけを破る事が出来そうに思われるからである。しかし、それは不可能で在る事が、ハートルとホーキング (1972) により示されている。そのような非軸対称な物質配置は、ブラックホールに力のモーメントを与えて回転を抑え、やがて静的な状態にする効果がある。その変化の過程は動的であるから、結局、ブラックホールの外部に非軸対称な物質分布を置くと、もはや回転ブラックホールは定常ではいられなくなる。つまり、定常且つ軸対称である性質を保てなくなる。

そして、定常軸回転するブラックホールに対して、もう一つ重要な事は Raychaudhuri (レイチャウドゥーリ) 方程式で、これは時間的な測地線束から導かれる場合と、光的測地線束から導かれる場合とで異なる。ここでは、光的速度ベクトルを考えているので、議論で用いる Raychaudhuri 方程式は、

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} - R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu, \quad (\text{A.128})$$

である。ここで、 θ は膨張 (収縮) パラメータで、測地線束の膨張 (収縮) の度合いを表す。また、 $\sigma_{\alpha\beta}$ は歪みを表し、 $R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu$ は物質のエネルギー条件を与える。光的生成子の測地線束を考えると、それ光的超曲面に垂直であるはずなので、回転を表す $\omega_{\alpha\beta}$ は $\omega_{\alpha\beta} = 0$ となる。パラメータ $\theta = 0$ であり、測地線束も定常的に $d\theta/d\lambda = 0$ ならば、 $(\sigma_{\alpha\beta})^2 + R_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta = 0$ が満足されるべきである。すると $g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0$ から、アインシュタイン方程式 $R_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}R/2 = 8\pi G_0 T_{\alpha\beta}$ を考えると、上記の Raychaudhuri 方程式の第三項は光的エネルギー条件すなわち、 $T_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta \geq 0$ が満たされるべきだから、

$$\sigma_{\alpha\beta} = 0, \quad T_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta = 0, \quad (\text{A.129})$$

として、Raychaudhuri 方程式、

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2, \quad (\text{A.130})$$

を考えよう。膨張パラメータ θ に着目して積分を行うと、

$$\theta^{-1}(\lambda) = \theta_0^{-1} + \frac{\lambda}{2}, \quad (\text{A.131})$$

となる。ここで、 $\theta_0 = \theta(0)$ とした。したがって初期条件 $\theta_0 < 0$ の時、 $\theta(\lambda)^{-1} = -|\theta_0|^{-1} + \lambda/2$ となる。なので、この結果が意味するのは、測地線束は収束して焦点を結び、そこで θ の符号が変更される。この様にひとたび収束し始めると測地線束は必ず焦点を持つ。これは

Raychaudhuri 方程式から言える一般的性質の一つである。事象の地平面の光的生成子は、焦点をもつことはできないことが言えるので、結局、定常ブラックホールの事象の地平面については $\theta = 0$ でなければならない。

A.18 真空定常軸回転ブラックホールの熱力学

真空中で静的な漸近平坦時空で、事象の地平面が存在すると、それはシュバルツシルト時空解となる。そのようなブラックホール時空に対する一意性は、Werner Israel 1967 で最初に与えられている。一方、定常軸対称であるが回転を許す真空のブラックホールの場合における、Israel と同様な一意性定理は Brandon-Carter (1971) と D.C.Robinson (1975) によって与えられており、この場合の軸対称なブラックホールはカー・ブラックホールである。こうした一意性定理は、電荷を含むブラックホールの状況にも一般化される。実際に、電荷を持つ静的球対称時空解はライスナー・ノルドストロームブラックホール解に限られる (Israel 1968)。また、電荷をもつ回転軸対称ブラックホールはカー・ニューマンブラックホール解に限られることが Mazur らにより証明されている。

一意性定理から、孤立した定常ブラックホールは、質量、角運動量、電荷の三つのパラメータのみで決定される。John Wheeler の提唱「ブラックホールには毛が無い」が有名な一説である。これについて詳しい議論は文献 [58] を参照されたい。

ブラックホールの熱力学は、事象の地平面上で定式化される。事象の地平面上では、質量、角運動量、表面重力などは r_+ で書き表す事が出来て、既にみたように、(A.123) を満たし、各量は (A.124) で与えられる。(A.123) がブラックホール熱力学第一法則を表すならば、ブラックホールの温度を適切に定義しなければならない。ブラックホールの温度はホーキング温度と言われ、それは事象の地平面上で次のように定義される。

$$T = \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (\text{A.132})$$

ゆえに、ブラックホール熱力学第一法則は、

$$\delta M - \Omega_H \delta J = T \delta S, \quad (\text{A.133})$$

と書き直され、エントロピーの変分 $\delta S = \delta A/4$ が得られる。ブラックホールエントロピーは、

$$S = \frac{A}{4\hbar}, \quad (\text{A.134})$$

となる。ここで、プランク定数 \hbar を復活させた形式を書いた ($T = \hbar\kappa/(2\pi)$)。定常軸回転するブラックホール熱力学第一法則であるが、ブラックホール熱力学について詳しく述べると、第ゼロ法則、第1~3法則が在る。これらの法則を以下にまとめる。第ゼロ法則とは、定常ブラックホールの表面重力は、事象の地平面で一定の値をとることを意味する。既に、事象の地平面上における表面重力の導出を行った。第一法則とは、(A.133) を表す。熱力学第二

法則は、1971年にホーキングによって提唱された。光的エネルギー条件が満たされると、ブラックホールの表面積は正定値であるだけでなく減少する事は無い。第三法則は、弱いエネルギー条件が満たされるならば、表面重力はゼロに落ち込む事は無いという事を意味しており、1986年に Werner Israel によって提唱された。

B 厳密繰り込み群方程式と走るニュートン結合定数

場の量子論では、量子効果によって形成されるループ現象を考えると、理論は高エネルギー領域で発散してしまう問題がある。そのような発散の問題を解決しようとする試みは繰り込み理論と言われ、発散を物理的な、質量、波動関数、相互作用の結合定数等に押し当て、それら結合定数の振る舞いが有限で発散が無くなると、その理論は繰り込まれたと解釈する。高エネルギー領域での発散を繰り込むことができるかどうかは、摂動論的な枠組み内で判断することができる。ただし、摂動論的に繰り込み不可能であっても非摂動論的に繰り込み可能な理論もあり得る。そのような理論を漸近安全な理論という。本節では、漸近安全性における基本概念である厳密繰り込み群方程式と熱核展開について簡単に解説する。漸近安全性について詳しい議論は [6] を参照されたい。

元々、Wilson によって繰り込み群の考えが取り入れられ、その後、理論が発散しないために切断項を導入して導き出された方程式が厳密繰り込み群方程式であり、この方程式を熱核展開で計算し、結合定数を用いて有限のエネルギー領域で発散の無い理論を与える事が現代の興味深い手法であり、目的でもある。ここでは、繰り込み群方程式の導出と、近年の熱核展開の方法を紹介し、そして、先行研究 Phys. Rev. D **62**, 043008 (2000) の繰り込み群に関する部分をレビューし、その物理的な解釈や、重力の繰り込みの例を計算して、走るニュートン定数を得る。

B.1 厳密繰り込み群方程式:熱核展開

厳密繰り込み群方程式は別名 Wetterich 方程式と言われる。この方程式は熱核展開の手法によって量子現象である発散を評価する事ができる。また、結合定数を用いて発散エネルギーを押し当て、その漸近的振る舞いや有限性を評価する。このとき、結合定数が満たすベータ関数のフローは、自身がゼロとなる時(紫外)固定点を得られる。まず始めに、ここでは厳密繰り込み群方程式を導き、熱核展開を紹介する。

簡単のため実スカラー場 ϕ の理論を考えることにし、その裸の作用を $S(\phi)$ と書き表そう。エネルギースケール k で理論を測定する事を仮定し、その有効理論は、自然な伝播の運動量 p に対して $p > k$ を考え、この領域で満たされる運動量スケール k に対して積分を行ったものである事と考える。この目的のために、裸の作用に対して、切断作用 ΔS_k を付け加えて、扱う作用は $S + \Delta S_k$ とする。この作用から初めて、生成汎関数を定義し、厳密繰り込み群方程式を導こう。作用が与えられると、外場 J を用いて、生成汎関数を定義できる。

$$Z_k = \int (d\phi) e^{-S - \Delta S_k + \int J\phi}. \quad (\text{B.1})$$

また、連結グリーン関数の生成汎関数は、

$$e^{W_k[J]} = Z_k, \quad (\text{B.2})$$

である。よって、

$$\frac{\delta W_k}{\delta J} = \varphi, \quad (\text{B.3})$$

が得られる。ここで、 $\varphi = \langle \phi \rangle$ と書いて期待値を表す。有効作用 $\tilde{\Gamma}_k(\varphi)$ はルジャンドル変換によって以下のように与えられる。

$$\tilde{\Gamma}_k(\varphi) = -W_k + \int d^d x J \varphi. \quad (\text{B.4})$$

ここで与えられた有効作用は切断項を取り入れた裸の作用から導いたので、我々が用いる有効平均作用は、

$$\Gamma_k^{(1)} = \tilde{\Gamma}_k - \Delta S_k, \quad (\text{B.5})$$

とする。ここで、1ループの場合を考える、このループは伝播関数が一周するような量子現象であるから、

$$\Gamma = S + \frac{1}{2} \text{Tr} \log \frac{\delta^2 S}{\delta \phi \delta \phi}, \quad (\text{B.6})$$

の形式である。なので、この1ループの平均有効作用は柔軟に ΔS_k を用いると、

$$\begin{aligned} \Gamma_k^{(1)} &= S + \Delta S_k + \frac{1}{2} \text{Tr} \log \frac{\delta^2}{\delta \phi \delta \phi} (S + \Delta S_k) - \Delta S_k \\ &= S + \frac{1}{2} \text{Tr} \log \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \phi \delta \phi} + R_k \right), \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

となる。ここで切断エネルギースケール k で新たなパラメータ $t = \log k$ とすると、この微分は、

$$\partial_t \Gamma_k^{(1)} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\frac{\delta^2 S}{\delta \phi \delta \phi} + R_k \right)^{-1} \partial_t R_k, \quad (\text{B.8})$$

となる。ここから、 S の $\delta \phi$ による二階微分において、 $S \rightarrow \Gamma_k$ としていい事確かめる。連結グリーン関数の生成汎関数 W_k の t 微分は、

$$\frac{dW_k}{dt} = -\frac{d}{dt} \langle \Delta S_k \rangle = -\frac{1}{2} \text{Tr} \langle \phi \phi \rangle \frac{dR_k}{dt}, \quad (\text{B.9})$$

である。すると、平均有効作用の t 微分は、

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_k}{dt} &= \frac{d\tilde{\Gamma}_k}{dt} - \frac{d\Delta S_k}{dt} \\ &= -\frac{dW_k}{dt} - \frac{d\Delta S_k}{dt} \\ &= \frac{1}{2} \left(\langle \phi \phi \rangle - \langle \phi \rangle \langle \phi \rangle \right) \frac{dR_k}{dt} \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \frac{\delta^2 W_k}{\delta J \delta J} \frac{dR_k}{dt}, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

である。ここでルジャンドル変換が満たすべき関係式、

$$\frac{\delta^2 W_k}{\delta J \delta J} = \left(\frac{\delta^2 \tilde{\Gamma}_k}{\delta \phi \delta \phi} \right)^{-1}, \quad (\text{B.11})$$

が在るので、厳密繰り込み群方程式、

$$\frac{d\Gamma_k}{dt} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi \delta \phi} + R_k \right)^{-1} \frac{dR_k}{dt}, \quad (\text{B.12})$$

を得る。

得られたこの方程式において、以下の順を追った式展開と、熱核展開の公式を用いて、厳密繰り込み群方程式を評価する。スカラー空間におけるテンソル \mathbf{U} を入れておき、ラプラス演算子を次のように、

$$\Delta = -D^2 \mathbf{1} + \mathbf{U}, \quad (\text{B.13})$$

とする。裸の作用は、

$$S(\phi) = \frac{1}{2} \int d^4 x \phi(x) (\Delta + \omega) \phi(x), \quad (\text{B.14})$$

である。 ω は適当な正の定数としておこう。この裸の作用は発散を含んでいる。ここで、切断関数 R_k として、次のように定義しよう。

$$\Delta S_k = \frac{1}{2} \int d^4 x \phi(x) R_k(\Delta) \phi(x). \quad (\text{B.15})$$

物理的には $0 < k < \Lambda \rightarrow \infty$ の運動量領域に対して、赤外から紫外領域にかけて、特定の運動量に制約を行う事を表す。 $S + \Delta S_k$ は、

$$S(\phi) + \Delta S_k = \frac{1}{2} \int d^4 x \phi(x) (\Delta + \omega + R_k(\Delta)) \phi(x), \quad (\text{B.16})$$

となる。直ちに用いる平均有効作用は、

$$\Gamma_k = \frac{1}{2} \log \left[\det(\Delta + \omega + R_k(\Delta)) \right], \quad (\text{B.17})$$

である。ゆえに、 $\partial_t \Gamma_k$ は次のように、

$$\frac{d\Gamma_k}{dt} = \frac{1}{2} \text{Tr} \frac{\partial_t R_k(\Delta)}{\Delta + \omega + R_k(\Delta)}, \quad (\text{B.18})$$

となる。この結果は、厳密繰り込み群方程式からも直ちに計算できる。なので、この段階の式展開を厳密繰り込み群方程式と呼んでおこう。ラプラス演算子は運動量の二乗に反比例するから、伝播関数を次のように表す。

$$h_k(\Delta, \omega) = \frac{\partial_t R_k(\Delta)}{\Delta + \omega + R_k(\Delta)}. \quad (\text{B.19})$$

$\partial_t \Gamma_k$ の方程式はラプラス演算子を含むので、固有値を置いても簡単には解けない。この問題のために、熱核展開の手法を用いて展開を行う。始めに伝播関数 h_k に対してラプラス変換を用いると、

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \int_0^\infty ds \tilde{h}_{k,\omega}(s) \text{Tre}^{-s\Delta}, \quad (\text{B.20})$$

となる。ここで熱核トレースとは $\text{Tre}^{-s\Delta}$ である。熱核とは拡散方程式の一般項を特徴づける項であり、これを決める事は拡散現象がどのように振る舞うかを表すことである。ここでは、局所熱核展開公式を用いる事にする。考える重力系の表現を V とし、物質場の表現を S として置く、これらは接続によって繋がった空間を考えておく。表現をどのように取るかは量子的に扱う物質場の状況に依るが、考える理論的な空間は $S \times V$ である。そして、重力系は局所的に慣性的であるから熱核の最小オーダーは 1 となる。以下に局所熱核展開を書き下そう。各熱核係数は、

$$\mathbf{b}_0(\Delta) = \mathbf{1}, \quad (\text{B.21})$$

$$\mathbf{b}_2(\Delta) = \frac{R}{6} \mathbf{1} - \mathbf{U}, \quad (\text{B.22})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_4(\Delta) = & \frac{1}{2} \mathbf{U}^2 + \frac{1}{6} D^2 \mathbf{U} + \frac{1}{12} (\Omega_{\mu\nu})^2 \\ & - \frac{R}{6} \mathbf{U} + \mathbf{1} \left(\frac{1}{180} (R_{\alpha\beta\mu\nu})^2 - \frac{1}{180} (R_{\alpha\beta})^2 + \frac{1}{72} R^2 - \frac{1}{30} D^2 R \right), \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

であり、熱核トレースは、

$$\text{Tre}^{-s\Delta} = \frac{1}{(4\pi s)^{d/2}} \int d^4x \sqrt{g} [\text{Tr} \mathbf{b}_0 + s \text{Tr} \mathbf{b}_2 + s^2 \text{Tr} \mathbf{b}_4], \quad (\text{B.24})$$

である。この公式を用いて熱核トレースを計算すれば良いだけであり、その結果 $\partial_t \Gamma_k$ は曲率やリッチ量を持った形式に展開される。実際に、繰り込みを評価する際には \mathbf{b}_2 で方程式の発散が現れる事になるので、結合定数の漸近的な振る舞いや固定点に関しては \mathbf{b}_2 部分までで評価する。しかし、 \mathbf{b}_4 まで含めて繰り込みを行おうとすると、対数発散が現れ、このときには積分される切断運動量 k は紫外切断 Λ を取るなどの処方が必要である。

我々が必要な事は、厳密繰り込み群方程式を用いて、1ループ発散を表す量子現象の発散を評価し、結合定数にその発散を押し付け、それが固定点を持つことを見たり、漸近的に安全な量であることを導くことである。ゆえに、一つの結果として、次節の重力の繰り込みを行ってみよう。

B.2 重力の繰り込み

先行研究 [10] にある、厳密繰り込み群方程式を用いて重力の走るニュートン結合定数 $G(k)$ を決める方法をレビューする。そして、その $G(k)$ の振る舞いは紫外領域 $k \rightarrow \infty$ で $G(k \rightarrow \infty) = 0$ となる事を確認する。

量子重力理論において、重力の繰り込みを行うためには、厳密繰り込み群方程式を用いる事が一つの方法である。このために、必要となるのはウィルソン形式の有効作用 $\Gamma_k[g_{\mu\nu}]$ である。 k は切断運動量である。この有効作用 $\Gamma_k[g_{\mu\nu}]$ は枝状の相互作用を扱う際に大変重要で、重力相互作用の現象を扱う事もできる。そして、ループ現象に対する繰り込みの議論にも有用である。ループ現象は素粒子論において発散を与え理論が有限では無くなる現象だが、繰り込みを行う事で切断運動量スケール k を用いて結合定数を与える事ができて、理論は有限になる。次元 $[k]$ は長さの次元に反比例するので、 d 次元時空中における二点 (x, y) の距離 $\|x - y\|$ が $1/k$ より小さな範囲で場が定義される事を考えると、 $\|x - y\| \leq 1/k$ における密度を $\rho_k(x - y)$ とすれば、この中に閉じ込められる場は、

$$\phi_k(x) = \int d^d y \sqrt{g(y)} \rho_k(x - y) \phi(y), \quad (\text{B.25})$$

と表される。 $d^d y \sqrt{g(y)}$ は時空の体積素で、ユークリッド化された時空を考えており、 $\phi_k(x)$ は平均場と言われる。この様な定在する平均場を用いて、経路積分の手法から、有効作用を表すことができ、

$$\exp[-\Gamma_k[\Phi]] = \int (d\phi) \delta(\phi_k - \Phi) \exp[-S[\phi]], \quad (\text{B.26})$$

と書かれて、このとき大域的に表した Φ は平均場 ϕ_k によって表され、その物理的な観測範囲は切断エネルギースケール k の次元解析によって、

$$l \simeq k^{-1} \quad (\text{B.27})$$

である。よって $\Gamma_k[\Phi]$ はこの範囲で与えられる有効作用で、これは平均有効作用と言われる。この様に平均有効作用を解釈すると大変簡単に有効作用が解釈できる。現代では切断関数を取り入れた平均有効作用の議論が在るが、これは少し専門的になるのでここでは置いておく。詳しくは [6] を参照されたい。一方、平均有効作用 Γ_k は途中で飛びが無く連続的な k によって与えられるものならば、赤外領域から紫外領域まで相互作用現象が記述できる。 $p^2 > k^2$ の量子揺らぎは積分されるが、 $p^2 < k^2$ の揺らぎは定在場において領域外となって除かれる。この理由が表す事は、平均有効作用 Γ_k は様々な理論に置いて、切断運動量 k に依存するもので、それは繰り込み理論から導かれた有効現象を扱う事である。ループ現象を考えて、その繰り込み理論を扱う事も平均有効作用を用いる。実際には紫外領域における Γ_Λ から赤外領域 Γ_{k_0} にかけて作用 S を積分して、その発散を結合定数に押し付けたり、質量に相当する個所を調整したり、もしくは次元の変更によって運動量依存性を変更したりする方法で、これはウィルソン繰り込み群と言われる。

現代の繰り込み群の方法は、上記に述べた方法よりも更に発展させた方法であり、その方法は重力理論の繰り込みを考えた場合でも用いる事ができる。 d 次元のアインシュタイン重力の量子論を考えて、その繰り込みを行うわけであるが、その切断運動量スケールに依存した平均有効作用 $\Gamma_k[g_{\mu\nu}]$ は目的の一つであり、これは厳密 (もしくは汎関数) 繰り込み群方

程式によって導かれる事が知られている。現代の最も進んだ方法は、アインシュタイン重力 $\sqrt{g}R$ の摂動展開 $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ を用いて、重力波 $h_{\mu\nu}$ の摂動論を考えて、ゲージ自由度を固定し、破れたゲージ対称性を復帰させるためにゴースト項を導入し、経路積分で量子化したそのような系を考えて、重力のループ現象に対する繰り込み理論を評価する事である。厳密繰り込み群方程式の詳しい議論は行わず、ここでは一つの結果を用いて重力の繰り込みの計算を追ってみよう。はじめに、ゲージ固定した $\Gamma_k[h, \bar{g}]$ を書き下す事から始める。

$$\Gamma_k[h, \bar{g}] = \frac{1}{16\pi G(k)} \int d^d x \sqrt{g} (-R(g) + 2\Lambda(k)) + S_{gf}[h, \bar{g}]. \quad (\text{B.28})$$

ここで、 $G(k)$ は走るニュートン結合定数であり、 $\Lambda(k)$ は宇宙項である。切断エネルギー k に依存するこれらの結合定数は、後々方程式の発散を吸収するために k 依存性を持つ。これらの結合定数の表し方は幾つか代表的な表記が在る。ここで、 $S_{gf}[h, \bar{g}]$ は背景場を時空素にして二次の重力波 $h_{\mu\nu}$ を用いて書かれる項である。計量の摂動展開を用いて二次の重力波によって繰り込み理論の計算を行うわけであるが、上記の $\Gamma_k[h, \bar{g}]$ が繰り込んだ重力に対応するためには、ループ現象による発散を評価する $\Gamma_k[h, \bar{g}]$ が満たすべき方程式が必要である。それは厳密繰り込み群方程式、

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k[h, \bar{g}] = & \frac{1}{2} \text{Tr}[(\kappa^{-2} \Gamma_k^{(2)}[h, \bar{g}] + R_k^{grav}[\bar{g}])^{-1} \partial_t R_k^{grav}[\bar{g}]] \\ & - \text{Tr}[(-\mu[h, \bar{g}] + R_k^{gh}[\bar{g}])^{-1} \partial_t R_k^{gh}[\bar{g}]], \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

である。ここでパラメータ t は切断運動量スケール k を用いて定義される：

$$t = \log k. \quad (\text{B.30})$$

ここで、厳密繰り込み群方程式に現れる幾つかの汎関数の物理的な意味を述べる。 $\Gamma_k^{(2)}[h, \bar{g}]$ は、アインシュタイン重力の二次の摂動展開と、ゲージ固定によって表される $h_{\mu\nu}$ の双一次な有効作用である。また、第二項に現れる $\mu[h, \bar{g}]$ はゲージ自由度を破ったために、それを回復するために取り入れられたゴースト作用で奇ガウス場 C_μ, \bar{C}_μ によって表される項であり、その経路積分を実行するとプファフィアンである。そして、 R_k^{grav}, R_k^{gh} は切断関数と言われ、少し詳しく考察してみよう。まず、 $R(k) = k^2 \bar{R}(\text{momentum scale}^2/k^2)$ となる無次元の切断関数を定義する。ここで $\text{momentum scale}^2 = z$ と言う固有値を置くと、これはラプラス演算子の固有値であり、切断関数は $z/k^2 \ll 1$ で $\bar{R}(y \rightarrow 0) = 1$ となり、 $\bar{R}(y \rightarrow \infty) = 0$ となるスムーズな関数を選ばなければならない。ここで、 $y = z/k^2$ とした。切断関数は代表的なものは三つ在るが、ここでは指数的切断関数、

$$\bar{R}(y) = \frac{y}{\exp y - 1} \quad (\text{B.31})$$

を用いる。ここで、慣例的に無次元の結合定数の書き方を示しておく：

$$g(k) = \tilde{G}(k) = k^{d-2} G(k), \quad \lambda(k) = \tilde{\Lambda}(k) = \Lambda/k^2. \quad (\text{B.32})$$

厳密線り込み群方程式を1ループで計算するためには、様々な方法があるが、代表的な現代の方法は、局所的熱核展開を用いる方法である。この点は技術的な計算を伴って、尚且つ機械的な長い計算があるので、厳密線り込み群から与えられる一つの結果、

$$\partial_t g = [d - 2 + \eta_N]g, \quad (\text{B.33})$$

$$\begin{aligned} \partial_t \lambda &= -(2 - \eta_N)\lambda + \frac{g}{2(4\pi)^{d/2-1}}[2d(d+1)\Phi_{d/2}^1(-2\lambda) \\ &\quad - 8d\Phi_{d/2}^1(0) - d(d+1)\eta_N\tilde{\Phi}_{d/2}^1(-2\lambda)], \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

より始める。ここで、異常次元 η_N は次のように表される。

$$\eta_N(g, \lambda) = \frac{gB_1(\lambda)}{1 - gB_2(\lambda)}. \quad (\text{B.35})$$

この様な異常次元は、重力と宇宙項の無次元ベータ関数の振る舞いに寄与する。そして、異常次元を決める $B_1(\lambda), B_2(\lambda)$ は以下のように、

$$\begin{aligned} B_1(\lambda) &= \frac{1}{3(4\pi)^{d/2-1}}[d(d+1)\Phi_{d/2-1}^1(-2\lambda) \\ &\quad - 6d(d-1)\Phi_{d/2}^2(-2\lambda) - 4d\Phi_{d/2-1}^1(0) - 24\Phi_{d/2}^2(0)], \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

$$\begin{aligned} B_2(\lambda) &= \frac{-1}{6(4\pi)^{d/2-1}}[d(d+1)\tilde{\Phi}_{d/2-1}^1(-2\lambda) \\ &\quad - 6d(d-1)\tilde{\Phi}_{d/2}^2(-2\lambda)], \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

と与えられる。 $p = 1, 2, 3, \dots$ となる離散値を用いて、

$$\Phi_n^p(w) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dy y^{n-1} \frac{\bar{R}(y) - y\bar{R}'(y)}{[y + \bar{R}(y) + w]^p}, \quad (\text{B.38})$$

$$\tilde{\Phi}_n^p(w) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dy y^{n-1} \frac{\bar{R}(y)}{[y + \bar{R}(y) + w]^p}, \quad (\text{B.39})$$

である。この結果を用いると、結合定数が満たすベータ関数が、 p モードと次元 d に依存した形式で具体的に決める事ができる。

ここから、具体的に $d = 4$ の場合を考える。ここで、宇宙項 Λ は我々の目的に重要な役割を果たさない。また、 $\lambda \ll k^2$ と考えて $\lambda \simeq 0$ となるように考えても、与える重力のニュートン結合定数の形式は変更されない。そこで $\lambda = \epsilon^+ \ll 1$ がゼロに行く近似を仮定しておく、結局、走るニュートン結合定数は、

$$\frac{dg(k)}{dt} = [2 + \eta_N]g(t) = \beta(g(t)), \quad (\text{B.40})$$

となる。異常次元は宇宙項の寄与が無くなるので、

$$\eta_N(g) = \frac{B_1 g}{1 - B_2 g}, \quad (\text{B.41})$$

と表せて、ベータ関数は、

$$\beta(g) = 2g \frac{1 - \omega'g}{1 - B_2g}, \quad (\text{B.42})$$

である。以下で ω' の意味を説明する。初めに、本結果に必要な B_1, B_2 を表すと、

$$B_1 = B_1(0) = -\frac{1}{3\pi} [24\Phi_2^2(0) - \Phi_1^1(0)], \quad (\text{B.43})$$

$$B_2 = B_2(0) = \frac{1}{6\pi} [18\tilde{\Phi}_2^2(0) - 5\tilde{\Phi}_1^1(0)], \quad (\text{B.44})$$

となる。よって以下のように定数を置く。

$$\omega = -\frac{1}{2}B_1, \quad \omega' = \omega = B_2. \quad (\text{B.45})$$

(B.38) と (B.39) で表される積分を実直に計算すると、

$$\begin{aligned} \Phi_1^1(0) &= \frac{\pi^2}{6}, \quad \Phi_2^2(0) = 1, \\ \tilde{\Phi}_1^1(0) &= 1, \quad \tilde{\Phi}_2^2(0) = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

となるので、係数 ω, ω' は次のように決まる。

$$\omega = \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{\pi^2}{144}\right), \quad B_2 = \frac{2}{3\pi}. \quad (\text{B.47})$$

(B.33) と (B.34) で表されるベータ関数がゼロとなる時、そこには二つの固定点がある。赤外領域では $g_*^{IR} = 0$ で在る場合と、紫外領域の、

$$g_*^{UV} = \frac{1}{\omega'}, \quad (\text{B.48})$$

が在る。赤外固定点はニュートン定数のような高々定数の場合である。よって結合定数が切断エネルギー k に依存する状況において重要なのは紫外固定点 g_*^{UV} である。ここで重力の固定点について、赤外固定点 g_*^{IR} と紫外固定点 g_*^{UV} を考えた上で、走る結合定数 g の振る舞いについてまとめる。

(i): 切断運動量 k において、 $g(k) < 0$ となる可能性については、赤外で結合定数がゼロとなるように決まるので g_*^{IR} に行く。

(ii): 切断運動量 k において、 $g(k) > g_*^{UV}$ となる場合は、 $k \rightarrow \infty$ に対して赤外固定点 g_*^{UV} を考えておけばよい。

(iii): $g[0, g_*^{UV}]$ の範囲では、赤外領域 $k \rightarrow 0$ で $g_*^{IR} = 0$ であり、紫外領域 $k \rightarrow \infty$ において g_*^{UV} となる。

この様な主張を基に重力の結合定数の振る舞いを決める。

以上の結合定数の設定に関する状況は、無次元の走るニュートン結合定数が常に正となる事が想定される。そして主張 (iii) によると、在る値の切断運動量 k において走るニュートン

定数は、赤外固定点と紫外固定点の間のフローと考えられる。ゆえに、ベータ関数 (B.40) と (B.42) を用いて、そのベータ関数を積分すると、

$$\frac{g}{(1 - \omega'g)^{\omega/\omega'}} = \frac{g(k_0)}{[1 - \omega'g(k_0)]^{\omega/\omega'}} \cdot \left(\frac{k}{k_0}\right)^2, \quad (\text{B.49})$$

となる。ここで切断関数の積分範囲は k_0 から k までとした。導き出されたこの関係式は $g(k)$ について解くのは難しいが、 $g(k)$ の振る舞いを見るには十分で、赤外領域 $k \rightarrow 0$ で k^2 に比例し、紫外領域 $k \rightarrow \infty$ で紫外固定点 $g(k \rightarrow \infty) = 1/\omega'$ となる。ゆえに、実際に無次元のニュートン結合定数は、前述された三つの要請 (i)~(iii) を正しく満足する。

ここから、無次元のニュートン定数を実際に解ける形にして、走るニュートン定数 $G(k)$ を見つけよう。ここで、 ω'/ω の割合については、実際に次のようなパラメータ $\omega \simeq 1.2, \omega' \simeq 1.4, B_2 \simeq 0.21$ を満たすので、紫外固定点は $g_*^{UV} \simeq 0.71$ 程度となって、割合は $\omega'/\omega = 1.18$ である。ゆえに実際の計算結果では $\omega \simeq \omega'$ となるだけでなく、熱核展開を用いた厳密繰り込み群方程式の展開では $\omega'/\omega \rightarrow 1$ で在る事が分かる。これらの証拠を用いて、 $\omega'/\omega = 1$ とすれば、

$$g(k) = \frac{g(k_0)k^2}{\omega g(k_0)k^2 + [1 - \omega g(k_0)]k_0^2}, \quad (\text{B.50})$$

である。更に $\omega'/\omega = 1$ は異常次元を簡単にする $\eta_N = -2\omega g + \mathcal{O}(g^2)$ 。第一項は摂動一次であるから、異常次元は以下のように書ける:

$$\eta_N = -2\omega g \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (B_2 g)^n \right]. \quad (\text{B.51})$$

結果 (B.50) から分かるが $B_2 g(k)$ の冪はとても小さいので、異常次元は $\eta_N = -2\omega g$ で十分で、この結果は文献 [6] の異常次元の表式からも導ける。ゆえに設定 $\omega'/\omega \rightarrow 1$ は我々の解析を簡単にしてくれる。

次元がある走るニュートン結合定数 $G(k) = g(k)/k^2$ は次のように、

$$G(k) = \frac{G(k_0)}{1 + \omega G(k_0)[k^2 - k_0^2]}, \quad (\text{B.52})$$

である。このニュートン定数は $k \rightarrow k_0$ で $G(k_0)$ と定数になるので、赤外領域まで拡張して $k_0 \rightarrow 0$ においてニュートン定数が観測的になるように $G(k_0 \rightarrow 0) = G_0$ とする。この様な k_0 に対する観測条件を置くと、走るニュートン結合定数は次の通りである。

$$G(k) = \frac{G_0}{1 + \omega G_0 k^2}. \quad (\text{B.53})$$

この結合定数は赤外領域と紫外領域で漸近的な振る舞いが決まる。赤外領域では $k \rightarrow 0$ において、走るニュートン結合定数は以下の結果となり、

$$G(k) = G_0 - \omega G_0^2 k^2 + \mathcal{O}(k^4), \quad (\text{B.54})$$

であり、紫外領域 $k \rightarrow \infty$ では、

$$G(k) \simeq \frac{1}{\omega k^2}, \quad (\text{B.55})$$

となる。このニュートン結合定数は $k[0, \infty]$ の切断エネルギーの範囲上のフローであるが、単調減少関数で、紫外領域で漸近的にゼロに近づく。この様に、赤外で有限で紫外で収束する結合定数は、漸近安全な走る結合定数と言われる。言い換えると、結合定数が漸近安全ならば、ループ現象によって引き起こされた理論の発散は、この結合定数で抑えられたので、与えられる有効平均作用の方程式寄与は既に繰り込まれた状況となる。

厳密繰り込み群方程式を用いたニュートン結合定数の決定方法は、現在も研究が進行中であるが、アインシュタイン重力に2次の曲率項までを加えた理論については、切断運動量スケール k で走るニュートン結合定数は漸近安全に振る舞う事が分かっている。重力の固定点に関して、赤外固定点は十分ゼロに近く、紫外固定点は有限で、特に $g_*^{UV} < 1$ 程度が妥当な結果と考えられている。

アインシュタイン重力を拡張した一般の修正重力理論に関して、漸近安全理論を考える事は興味深い。例えば、4次元の重力系で、 $f(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu})$ 等とした修正重力モデルを選択して、厳密繰り込み群方程式を評価し、ニュートン結合定数を決め、その漸近安全自由性を評価する事が成されている。

参考文献

- [1] A. Ishibashi, N. Ohta and D. Yamaguchi, “Quantum improved charged black holes,” *Phys. Rev. D* **104** (2021), 066016 [arXiv:2106.05015 [hep-th]].
- [2] C.M. Chen, Yi Chen, A. Ishibashi, N. Ohta and D. Yamaguchi, “Running Newton Coupling, Scale Identification and Black Hole Thermodynamics,” *Phys. Rev D* **105** (2022), 106026 [arXiv: 2204.09892[hep-th]].
- [3] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large-Scale Structure of Space-Time*, Cambridge (1973)
- [4] M. Reuter, “Nonperturbative evolution equation for quantum gravity,” *Phys. Rev. D* **57** (1998), 971 [arXiv:hep-th/9605030 [hep-th]].
- [5] W. Souma, “Nontrivial ultraviolet fixed point in quantum gravity,” *Prog. Theor. Phys.* **102** (1999), 181 [arXiv:hep-th/9907027 [hep-th]].
- [6] R. Percacci, “An Introduction to Covariant Quantum Gravity and Asymptotic Safety,” *100 Years of General Relativity*. World Scientific Vol. 3 (World Scientific Publishing, Singapore, 2017).
- [7] A. Eichhorn, “An asymptotically safe guide to quantum gravity and matter,” *Front. Astron. Space Sci.* **5** (2019), 47 [arXiv:1810.07615 [hep-th]].
- [8] M. Reuter and F. Saueressig, “Quantum Gravity and the Functional Renormalization Group: The Road towards Asymptotic Safety” (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2019).
- [9] J. F. Donoghue, “A Critique of the Asymptotic Safety Program,” *Front. in Phys.* **8** (2020), 56 [arXiv:1911.02967 [hep-th]].
- [10] A. Bonanno and M. Reuter, “Renormalization group improved black hole space-times,” *Phys. Rev. D* **62**, 043008 (2000) [arXiv:hep-th/0002196 [hep-th]].
- [11] J.M. Bardeen, “Non-singular general relativistic gravitational collapse,” in *Proceedings of International Conference GR5 (Tbilisi, U.S.S.R., 1968)*.
- [12] A. Bonanno and M. Reuter, “Spacetime structure of an evaporating black hole in quantum gravity,” *Phys. Rev. D* **73**, 083005 (2006) [arXiv:hep-th/0602159 [hep-th]].
- [13] M. Reuter and E. Tuiran, “Quantum Gravity Effects in the Kerr Spacetime,” *Phys. Rev. D* **83**, 044041 (2011) [arXiv:1009.3528 [hep-th]].

- [14] J. M. Pawłowski and D. Stock, “Quantum-improved Schwarzschild-(A)dS and Kerr-(A)dS spacetimes,” *Phys. Rev. D* **98**, 106008 (2018) [arXiv:1807.10512 [hep-th]].
- [15] A. Platania, “Dynamical renormalization of black-hole spacetimes,” *Eur. Phys. J. C* **79**, 470 (2019) [arXiv:1903.10411 [gr-qc]].
- [16] A. Bonanno, R. Casadio and A. Platania, “Gravitational antiscreening in stellar interiors,” *JCAP* **01**, 022 (2020) [arXiv:1910.11393 [gr-qc]].
- [17] K. Falls, D. F. Litim and A. Raghuraman, “Black Holes and Asymptotically Safe Gravity,” *Int. J. Mod. Phys. A* **27** (2012), 1250019 [arXiv:1002.0260 [hep-th]].
- [18] B. Koch and F. Saueressig, “Structural aspects of asymptotically safe black holes,” *Class. Quant. Grav.* **31** (2014), 015006 [arXiv:1306.1546 [hep-th]].
- [19] B. Koch and F. Saueressig, “Black holes within Asymptotic Safety,” *Int. J. Mod. Phys. A* **29** (2014), 1430011 [arXiv:1401.4452 [hep-th]].
- [20] A. Bonanno, B. Koch and A. Platania, “Gravitational collapse in Quantum Einstein Gravity,” *Found. Phys.* **48** (2018), 1393 [arXiv:1710.10845 [gr-qc]].
- [21] A. Platania, “From renormalization group flows to cosmology,” *Front. in Phys.* **8** (2020), 188 [arXiv:2003.13656 [gr-qc]].
- [22] P. Donà, A. Eichhorn and R. Percacci, “Matter matters in asymptotically safe quantum gravity,” *Phys. Rev. D* **89**, 084035 (2014) [arXiv:1311.2898 [hep-th]].
- [23] J. Meibohm, J. M. Pawłowski and M. Reichert, “Asymptotic safety of gravity-matter systems,” *Phys. Rev. D* **93**, 084035 (2016) [arXiv:1510.07018 [hep-th]].
- [24] A. Eichhorn and S. Lippoldt, “Quantum gravity and Standard-Model-like fermions,” *Phys. Lett. B* **767**, 142 (2017) [arXiv:1611.05878 [gr-qc]].
- [25] J. Biemans, A. Platania and F. Saueressig, “Renormalization group fixed points of foliated gravity-matter systems,” *JHEP* **05**, 093 (2017) [arXiv:1702.06539 [hep-th]].
- [26] M. Reuter and H. Weyer, “Running Newton constant, improved gravitational actions, and galaxy rotation curves,” *Phys. Rev. D* **70** (2004), 124028.
- [27] N. Christiansen and A. Eichhorn, “An asymptotically safe solution to the U(1) triviality problem,” *Phys. Lett. B* **770**, 154 (2017) [arXiv:1702.07724 [hep-th]].

- [28] A. Eichhorn and F. Versteegen, “Upper bound on the Abelian gauge coupling from asymptotic safety,” JHEP **01**, 030 (2018) [arXiv:1709.07252 [hep-th]].
- [29] U. Harst and M. Reuter, “QED coupled to QEG,” JHEP **05**, 119 (2011) [arXiv:1101.6007 [hep-th]].
- [30] A. Eichhorn and A. Held, “From a locality-principle for new physics to image features of regular spinning black holes with disks,” JCAP **05** (2021), 073 [arXiv:2103.13163 [gr-qc]].
- [31] A. Bonanno, A. Eichhorn, H. Gies, J. M. Pawłowski, R. Percacci, M. Reuter, F. Saueressig and G. P. Vacca, “Critical reflections on asymptotically safe gravity,” Front. in Phys. **8**, 269 (2020) [arXiv:2004.06810 [gr-qc]].
- [32] C. Wetterich, Phys. Lett. **B 301**, 90 (1993).
- [33] T.R. Morris, Phys. Lett. **B 329** 241 (1994), “Derivative expansion of the exact renormalization group,” [arXiv:9403340[hep-th]].
- [34] *Handbook of Mathematical Functions*, (Dover, New York, 1965) edited by M. Abramowitz, and I.A. Stegun.
- [35] E. Poisson and W. Israel, “Inner-horizon instability and mass inflation in black holes,” Phys. Rev. Lett. **63**, 1663 (1989)
- [36] E. Poisson and W. Israel, “Internal structure of black holes,” Phys. Rev. D **41**, 1796 (1990)
- [37] A. Held, “Invariant Renormalization-Group improvement,” [2105.11458 [gr-qc]]
- [38] G. T. Horowitz and R. Myers, “The Value of Singularities,” Gen. Rel. Grav., **27**, 915 (1995) [arXiv:gr-qc/9503062 [gr-qc]]
- [39] S. de Alwis, A. Eichhorn, A. Held, J. M. Pawłowski, M. Schiffer and F. Versteegen, “Asymptotic safety, string theory and the weak gravity conjecture,” Phys. Lett. B **798**, 134991 (2019) [arXiv:1907.07894 [hep-th]].
- [40] R. C. Myers and M. J. Perry, “Black Holes in Higher Dimensional Space-Times,” Annals Phys. **172** (1986), 304.
- [41] D. Kastor and J. Traschen, “Stresses and Strains in the First Law for Kaluza-Klein Black Holes,” JHEP **09** (2006), 022 [arXiv:hep-th/0607051 [hep-th]].

- [42] T. Harmark, V. Niarchos and N. A. Obers, “Instabilities of black strings and branes,” *Class. Quant. Grav.* **24** (2007), R1 [arXiv:hep-th/0701022 [hep-th]].
- [43] J. D. Bekenstein, “Black holes and entropy,” *Phys. Rev. D* **7** (1973), 2333.
- [44] S. W. Hawking, “Particle Creation by Black Holes,” *Commun. Math. Phys.* **43** (1975), 199 [erratum: *Commun. Math. Phys.* **46** (1976), 206].
- [45] R. K. Kaul and P. Majumdar, “Logarithmic correction to the Bekenstein-Hawking entropy,” *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000), 5255 [arXiv:gr-qc/0002040 [gr-qc]].
- [46] K. A. Meissner, “Black hole entropy in loop quantum gravity,” *Class. Quant. Grav.* **21** (2004), 5245 [arXiv:gr-qc/0407052 [gr-qc]].
- [47] S. A. Hayward, “Formation and evaporation of regular black holes,” *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006), 031103 [arXiv:gr-qc/0506126 [gr-qc]].
- [48] M. Reuter and F. Saueressig, “Quantum Gravity and the Functional Renormalization Group: The Road towards Asymptotic Safety,” Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2019, doi:10.1017/9781316227596.
- [49] J. L. Lehners and K. S. Stelle, “A Safe Beginning for the Universe?,” *Phys. Rev. D* **100**, 083540 (2019) [arXiv:1909.01169 [hep-th]].
- [50] J. N. Borissova and A. Eichhorn, “Towards black-hole singularity-resolution in the Lorentzian gravitational path integral,” *Universe* **7**, 48 (2021) [arXiv:2012.08570 [gr-qc]].
- [51] J. Chojnacki and J. Kwapisz, “Finite Action Principle and Horava-Lifshitz Gravity: early universe, black holes and wormholes,” [arXiv:2102.13556 [gr-qc]]
- [52] C. Jonas, J. L. Lehners and J. Quintin, “Cosmological consequences of a principle of finite amplitudes,” *Phys. Rev. D* **103**, 103525 (2021) [arXiv:2102.05550 [hep-th]]
- [53] C. Gonzalez and B. Koch, “Improved ReissnerNordstrm(A)dS black hole in asymptotic safety,” *Int. J. Mod. Phys. A* **31** 1650141 (2016) [arXiv:1508.01502 [hep-th]]
- [54] K. Falls and D. F. Litim, “Black hole thermodynamics under the microscope,” *Phys. Rev. D* **89** (2014), 084002 [arXiv:1212.1821 [gr-qc]].
- [55] D. F. Litim and K. Nikolakopoulos, “Quantum gravity effects in Myers-Perry spacetimes,” *JHEP* **04** (2014), 021 [arXiv:1308.5630 [hep-th]].

- [56] O. Ruiz and E. Tuiran, “Non-Perturbative Quantum Correction to the Reissner-Nordström spacetime with Running Newton’s Constant,” [arXiv:2112.12519 [gr-qc]].
- [57] E. Poisson, “A Relativist’s Toolkit The Mathematics of Black-Hole Mechanics,” Cambridge (2004).
- [58] S.Carroll, “SPACETIME AND GEOMETRY An Introduction to General Relativity,” Pearson Education (2004).