様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　６ 月 １２ 日現在

機関番号：３４４１９
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2018～2022
課題番号：１８Ｋ０３３５０

研究課題名（和文）Gromov-Witten不変量に関連する可積分階層

研究課題名（英文）Integrable hierarchies related to Gromov-Witten invariants

研究代表者
高崎　金久（TAKASAKI, Kanehisa）

近畿大学・理工学部・教授

研究者番号：４０１７１４３３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,800,000円

研究成果の概要（和文）：グロモフ-ウィッテン不変量は可積分階層の研究の豊かな源である．その主要な成果はDubrovin-Zhang理論とGivental理論によってもたらされてきた．今回の研究では格子KP階層や戸田階層とそれらのさまざまな簡約系に関係する場合に焦点を絞った．具体的には，リーマン球面のフルヴィッツ数・グロモフ-ウィッテン不変量ならびに安定曲線のモジュライ空間上のホッジ積分を考察し，その可積分構造として，ヴォルテラ型可積分系，同変戸田階層，格子ゲルファント-ディキー階層，一般化ILW階層が現れることを見出した．これらの可積分階層が従来の可積分階層にないさまざまな特徴を見せることもわかった．

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究は代数解析的な可積分系研究の一環である．その要となるのはτ函数の概念であり，無限次元グラスマン多様体，無限次元リー群とその表現，自由フェルミ場とそのフォック空間などを駆使してτ函数の構造や性質を記述する．グロモフ-ウィッテン不変量に関するDubrovin-Zhang理論やGivental理論もτ函数の概念を共有しているが，方法論的には代数解析的方法とかなり異質である．本研究はDubrovin-Zhang理論やGivental理論をヒントにして代数解析的な可積分階層の理論の拡張を試みたことに学術的意義がある．この試みはまだ道半ばであり，今後も継続して行く価値がある．

研究成果の概要（英文）：The Gromov-Witten invariants are a rich source of studies on integrable hierarchies. Major progress therein has been achieved by the Dubrovin-Zhang theory and the Givental theory. The present research is focused on the cases that are related to the lattice P and Toda hierarchies and various reductions thereof. To be more precise, we have considered the Hurwitz numbers and the Gromov-Witten invariants of the Riemann sphere and the Hodge integrals on the moduli space of stable curves, and found that the Volterra-type hierarchies, the equivariant Toda hierarchy, the lattice Gelfand-Dickey hierarchy and the generalized ILW hierarchy show up as the integrable structures of these geometric objects. Moreover, these integrable hierarchies urn out to possess many novel features.

研究分野：代数解析，数理物理

キーワード：グロモフ-ウィッテン不変量　可積分階層　Dubrovin-Zhang理論　Givental理論　格子KP階層　戸田階層　フルヴィッツ数　ホッジ積分

様 式 Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

1990 年頃，E.Witten は 2 次元量子重力理論の変種として位相的重力理論を導入した．これは数学的には安定曲線と呼ばれる複素代数曲線のモジュライ空間の交叉理論とみなせる．Witten はこのモジュライ空間上の特別なコホモロジー類の交叉数の母函数が KdV 階層のτ函数であることを予想した．この予想は M.Kontsevich によって解決された．

Witten-Kontsevich の位相的重力理論は標的多様体が 1 点の場合の位相的弦理論ともみなせる．一般の標的多様体 X に対する位相的弦理論はグロモフ-ウィッテン理論として定式化されている．これは安定曲線 C から X への安定写像と呼ばれる写像のモジュライ空間の交叉理論である．グロモフ-ウィッテン不変量はこの交叉理論において X のコホモロジー類と安定曲線のモジュライ空間の特殊なコホモロジー類を組み合わせて得られる交叉数であり，C の種数によって類別される．全種数のグロモフ-ウィッテン不変量の母函数は Witten-Kontsevich τ函数の一般化であり，何らかの可積分階層との関係が期待される．

X がリーマン球面の場合には，1990 年代前半に物理学者によってグロモフ-ウィッテン不変量と戸田階層との関連が見出された．このことはその後 E.Getzler，B.Dubrovin，Y.Zhang, A.Okounkov, R.Pandharipande, T.Milanov によってそれぞれ異なる方法で数学的に証明された．Dubrovin と Zhang は彼らが開発したハミルトン形式の位相的可積分階層の理論とヴィラソロ条件を用いた．Okounkov と Pandharipande は Hurwitz 数を援用してグロモフ-ウィッテン不変量のフェルミオン表示を導いた．Milanov は A. Givental によって提案された全種数グロモフ-ウィッテン不変量の表示公式（一種のボゾン表示）を用いた．

グロモフ-ウィッテン不変量に対する Dubrovin-Zhang のアプローチと Givental のアプローチはリーマン球面に限らず，一般的な標的多様体を視野に入れた形で定式化されている．これらのアプローチは見かけが異なるが，2012～2014 年頃には，A.Buryak，H.Posthuma，S.Shadrin らの研究によって，それらの密接な関係や B.Eynard と N. Orintin の位相的漸化式との関係が明らかになった．

２．研究の目的

グロモフ-ウィッテン不変量やその一般化であるコホモロジー的場の理論は可積分系研究の観点から見てもきわめて興味深い研究対象である．Dubrovin-Zhang 理論と Givental 理論はこれらの不変量を統一的に扱う枠組みとして発展してきた．本研究では，依然として神秘的な部分が多く残るこれらの理論をより深く理解するとともに，これらの一般論を興味ある事例に適用して新たな知見を得ることをめざす．

本研究は代数解析学の方法によってこれらの課題に取り組む．1980 年代における可積分系の代数解析的研究は KP 階層・戸田階層などの普遍的可積分階層の理論を生み出した．Dubrovin-Zhang 理論や Givental 理論はそれらとはかなり異質に見えるが，τ函 数の概念が存在することは共通の特徴である．その意味で，τ函数の無限次元変換群などを駆使する代数解析的方法は有用な指針となることが期待される．

３．研究の方法

本研究の第 1 段階では，リーマン球面のグロモフ-ウィッテン不変量，Witten-Kontsevich 理論の r-スピン拡張，ホッジ積分や位相的頂点の母函数など，ラックス表示や双線形表示をもつ従来型の可積分階層と関係することが知られている場合を題材に選び，Givental 理論に対する理解を深める．これらの場合については，Eynard と Orantin の位相的漸化式に基づく研究も含めて，多くの先行研究がある．それらを学びながら，新たなアプローチを試みる．

第 2 段階では，安定写像のモジュライ空間の交叉理論におけるトートロジー的関係式，Givental 理論の背景にあるシンプレクティック幾何学の諸概念，ミラー対称性の定式化に用いられる圏論的諸概念などを学ぶ．これらは直接に可積分系と関わるものではないが，Dubrovin-Zhang 理論や Givental 理論をより深く理解するためには欠かせない知識である．特に，Givental がグロモフ-ウィッテン不変量を捉えるために用いたアイディアは大変に興味深い．

第 3 段階では，2 次元以上の複素射影空間や複素グラスマン多様体，旗多様体などの場合について，ミラー対称性に基づく先行研究を参考にしながら，Dubrovin-Zhang 理論が間接的な形で与えている可積分階層をより直接的に記述することをめざす．ミラー対称性に関する先行研究に鑑みれば，これらの標的多様体に対応する可積分階層はラックス表示や双線形表示をもつ従来型の可積分階層とは考えられない．他方，1 次元複素射影空間すなわちリーマン球面にはよく知られた戸田階層が関係する．また，2 次元複素射影空間のグロモフ-ウィッテン不変量の種数

0 部分は VI 型パンルヴェ方程式と関係する．このような意味で，これらの特殊な標的多様体には特別な可積分階層が付随していると期待される．

これらの研究と平行して，従来型の各種の可積分系の研究も進める．特に重要な研究対象としては q-差分可積分系，パンルヴェ方程式，パンルヴェ-共形場対応，C 型 KP 階層などがある．C 型 KP 階層は KP 階層の変種であるが，その τ 函数が Givental のグロモフ-ウィッテン不変量の表示公式と同様にボゾンを用いて表示されることは示唆的である．

４．研究成果

代数解析的方法が確立している KP 階層や戸田階層などの可積分階層に関連して，以下に述べるような一連の成果が得られた．

(1)リーマン球面フルヴィッツ数の母函数がヴォルテラ型可積分階層と関係していることを見出した.この可積分階層はボゴヤフレンスキー-伊藤-成田階層と呼ばれる格子型可積分階層の連続極限であるが，フルヴィッツ数との関係はこれまでまったく予想されていなかった．また，このことを示す際に，戸田階層のラックス作用素の対数が重要な役割を演じる．
(2) リーマン球面のグロモフ-ウィッテン不変量の母函数を溶解結晶模型の分配函数の極限として実現することにより，この母函数が１次元戸田階層の τ 函数であることを示した．これはよく知られた事実の再確認ではあるが，今回は戸田階層のフェイ型双線形方程式と呼ばれるものを用いる新たな方法を示した．フェイ型双線形方程式は位相的漸化式との関係でも重要である．
(3) 2 個の整数分割に依存する 3 次ホッジ積分の母函数がそのパラメータの一連の特殊値においてボゴヤフレンスキー-伊藤-成田階層と関係していることを見出した．これは Dubrovin と D.Yang の先行研究に示唆を得て行った研究である．Dubrovin らはある特別な場合に 3 次ホッジ積分とヴォルテラ型可積分階層との関係を証明したが，一般の場合は予想にとどまっていた．今回の研究ではこの予想が一般的に正しいことを確認した.ここで用いた方法は Dubrovin らの方法とは全く異なるもので，溶解結晶模型や位相的頂点の研究において開発した道具や考え方を利用している．
(4)中津了勇との共同研究で，3 個の整数分割に依存する 3 次ホッジ積分を考察し， K.F.Liu らが 2000 年代半ばに位相的頂点の組合せ論的表示に関して立てた予想を証明した．なお，この予想に関しては，Liu らの提案の後かなり早い段階で，Okounkov と Pandharipande が幾何学的証明を与えていた．今回の研究では，ホッジ積分のフェルミオン表示とそこに内在する量子トーラス代数の性質を用いて，この予想を純粋に組合せ論的な方法で証明した．さらに，この証明の副産物として，ホッジ積分のパラメータが特別な値を取るとき，可積分構造として KdV 階層やその一般化であるゲルファント-ディキー階層が現れることを見出した．
(5) 3 次 Hodge 積分にゲルファント-ディキー階層が現れる現象を 2 個の整数分割に依存する設定において見直して，ヴォルテラ型可積分階層とゲルファント-ディキー階層がホッジ積分のパラメータの異なる値域で現れることを見出した．さらに，そこで用いた技法を援用して，戸田階層の超幾何型 τ 函数の特殊化から，ヴォルテラ型可積分階層のさまざまな変種が現れることを示した．
(6) Okounkov と Pandharipande は 2006 年頃の研究において，リーマン球面の同変グロモフ-ウィッテン不変量が同変戸田階層の解であることを示した．この研究を見直して，同変戸田階層の由来を新たな観点から考察した．Okounkov らは同変グロモフ-ウィッテン不変量の母函数をフェルミオン表示し，フォック空間上の dressing operator と呼ぶものを用いて，母函数が同変戸田階層の τ 函数であることを示した．今回の研究では，この作用素をラックス形式における差分作用素として再構成し，同変戸田階層の由来をラックス形式の言葉で説明することができた．その後，この結果を「高スピン」の場合に拡張する手がかりも得られた．
(7) A.Buryak と P.Rossi が 2018 年に安定曲線のモジュライ空間の r-スピン理論に関して行った研究を取り上げた．Buryak らは そこで格子 KdV 階層の拡張を提案したが，その構成は具体的ではなかった．本研究では，格子ゲルファント-ディキー階層への一般化も含めて，拡張された可積分階層をラックス形式で定式化することができた．その結果として，この可積分階層は格子 KdV 階層や格子ゲルファント-ディキー階層をいわゆる「対数的時間発展」によって拡張したものであることが明らかになった．対数的時間発展は戸田格子については知られていたが，格子 KdV 階層や格子ゲルファント-ディキー階層に対して構成されたのはこれが初めてである．
(8) Buryak と Rossi は 2018 年に球面のフルヴィッツ数に関連して中間長波（Intermediate long wave）と呼ばれる非線形波動の高次時間発展の階層（ILW 階層）を構成した．今回の研究ではその一般化を考察し，差分作用素の因子分解による一般解の記述，特殊解の構成，格子ゲルファント-ディキー階層への極限移行などを論じた．特に，特殊解の考察からは，Okounkov らの球面の同変グロモフ-ウィッテン不変量の研究との思いがけない接点が明らかになった．また，格子ゲルファント-ディキー階層への極限移行において，一般化 ILW 階層の時間発展の一部が格子ゲルファント-ディキー階層の対数的時間発展に転化することがわかった．このような対数的時間発展の起源の説明は従来知られていなかった．

これらの研究と並行して，A.Alexandrov が近年行っている Kontsevich 型行列模型やホッジ積分の可積分構造の研究も検討した．Alexandrov は KP 階層の無限次元対称性の一部であるハイゼンベルグ-ヴィラソロ群を用いてさまざまな行列模型やホッジ積分を扱った．また，ある種のコホモロジー的場の理論の場合も含めて，いわゆる cut-and-join 作用素の構成も行った．本研究では Alexandrov の方法を格子 KP 階層や 2 次元戸田階層の枠組みで見直して新たな知見を得ることを試みたが，まだ十分な成果を得ていない．

Givental 理論を理解するために，グロモフ-ウィッテン不変量の同変局所化による計算法を学び，Givental と Millanov による広田型双線形方程式の導出法や Buryaku，Shadrin，Postuma らによるさまざまな先行研究の解読にも取り組んだ．しかしこれらは技術的に煩雑で消化が容易でなく．そこから先に進むこともできていない．その意味で，現状は「研究の方法」で述べた研究の第 1 段階から第 2 段階の途中にとどまっている．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計8件（うち査読付論文　7件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　2件）

１．著者名 Takasaki Kanehisa	４．巻 51
２．論文標題 Hurwitz numbers and integrable hierarchy of Volterra type	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	６．最初と最後の頁 43LT01～43LT01
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1751-8121/aae10b	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Takasaki Kanehisa	４．巻 137
２．論文標題 4D limit of melting crystal model and its integrable structure	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Journal of Geometry and Physics	６．最初と最後の頁 184～203
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.geomphys.2018.12.012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Nakatsu Toshio、Takasaki Kanehisa	４．巻 376
２．論文標題 Three-Partition Hodge Integrals and the Topological Vertex	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Communications in Mathematical Physics	６．最初と最後の頁 201～234
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00220-019-03648-5	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Kanehisa Takasaki	４．巻 103
２．論文標題 Cubic Hodge integrals and integrable hierarchies of Volterra type	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Proceedings of Symposia in Pure Mathematics	６．最初と最後の頁 481～502
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Takasaki Kanehisa	４．巻 54
２．論文標題 Dressing operators in equivariant Gromov-Witten theory of CP1	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	６．最初と最後の頁 35LT02～35LT02
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1751-8121/ac1828	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Kanehisa Takasaki	４．巻 B87
２．論文標題 Integrable structures of specialized hypergeometric tau functions	５．発行年 2021年
３．雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	６．最初と最後の頁 57-78
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Takasaki Kanehisa	４．巻 55
２．論文標題 Extended lattice Gelfand-Dickey hierarchy	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	６．最初と最後の頁 305203～305203
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1751-8121/ac7ca2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Takasaki Kanehisa	４．巻 56
２．論文標題 Generalized ILW hierarchy: solutions and limit to extended lattice GD hierarchy	５．発行年 2023年
３．雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	６．最初と最後の頁 165201～165201
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1751-8121/acc495	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計8件（うち招待講演　7件／うち国際学会　4件）

1．発表者名 Kanehisa Takasaki	
2．発表標題 Hurwitz numbers and integrable hierarchy of Volterra type	
3．学会等名 AIMS Conferencer 2018, Taipei, Taiwan, July 5-9, 2018（招待講演）（国際学会）	
4．発表年 2018年	

1．発表者名 Kanehisa Takasaki	
2．発表標題 Toda and q-Toda equations for Nekrasov partition functions	
3．学会等名 SIDE13, JR博多シティ2018年11月12日ー16日（招待講演）（国際学会）	
4．発表年 2018年	

1．発表者名 Kanehisa Takasaki	
2．発表標題 Integrable structures of cubic Hodge integrals	
3．学会等名 2nd IBS-CGP Workshop on integrable systems and applications（招待講演）（国際学会）	
4．発表年 2019年	

1．発表者名 Kanehisa Takasaki	
2．発表標題 Volterra-type hierarchies for specialized hypergeometric tau functions	
3．学会等名 China-Japan Joint Workshop on Integrable Systems 2019（招待講演）（国際学会）	
4．発表年 2019年	

１．発表者名
高崎金久

２．発表標題
3次ホッジ積分の可積分構造

３．学会等名
数理解析研究所共同研究「可積分系数理の進化と展望」（招待講演）

４．発表年
2019年

１．発表者名
高崎金久

２．発表標題
位相的弦理論の量子ミラー曲線

３．学会等名
第72回Encounter with Mathematics, 中央大学2019年1月11日～12日（招待講演）

４．発表年
2019年

１．発表者名
高崎金久

２．発表標題
CP1の同変Gromov-Witten理論と同変戸田階層

３．学会等名
日本数学会2020年度年会

４．発表年
2020年

１．発表者名
高崎金久

２．発表標題
弦理論・ゲージ理論における戸田階層

３．学会等名
Quantum Geometry in Gauge Theory and Strings, オンライン開催（招待講演）

４．発表年
2020年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	中津　了勇 (Nakatsu Toshio) (10281502)	摂南大学・理工学部・教授 (34428)	
研究協力者	中屋敷　厚 (Nakayashiki Atsushi) (10237456)	津田塾大学・学芸学部・教授 (32642)	
研究協力者	池田　岳 (Ikeda Takashi) (40309539)	早稲田大学・基幹理工学部・教授 (32689)	

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関