

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 12 日現在

機関番号：34419

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2017

課題番号：25400111

研究課題名 (和文) 数理解物理と組合せ論における可積分構造

研究課題名 (英文) Integrable structures in mathematical physics and combinatorics

研究代表者

高崎 金久 (TAKASAKI, Kanehisa)

近畿大学・理工学部・教授

研究者番号：40171433

交付決定額 (研究期間全体) : (直接経費) 3,600,000 円

研究成果の概要 (和文) : 溶解結晶模型, 4次元や5次元の超対称ゲージ理論, 局所トーリックカラビ・ヤウ多様体上の位相的弦理論はいずれも分配関数がヤング図形の言葉によって定式化されるという共通の特徴をもつ. 本研究はこれらの数理解物理の模型やその変種の中にKP階層, 戸田階層やそれらの簡約系が内在することを明らかにした. この研究の過程で量子トーラス代数や量子ダイログ関数に基づく新たな計算技法も開発された. さらに, そのような可積分構造からこれらの模型に付随する量子ミラー曲線 (あるいは量子スペクトル曲線) を導出し, それらが可積分階層の理論で以前から知られていたカツ・シュワルツ作用素の類似物であることを指摘した.

研究成果の概要 (英文) : The melting crystal model, 4D and 5D supersymmetric gauge theory and topological string theory on local toric Calabi-Yau manifolds have a common feature that the partition functions can be formulated in the language of Young diagrams. We found that the KP hierarchy, the Toda hierarchy and their reductions underlie these models of mathematical physics and their variants. In the course of this research, new computational techniques based on the quantum torus algebra and the quantum dilogarithmic functions were also developed. Moreover, we derived the quantum mirror (or spectral) curves associated with these models from the integrable structures, and pointed out that they are analogues of the Kac-Schwarz operators that have been known in the theory of integrable hierarchies.

研究分野：代数解析学, 数理解物理学, 可積分系

キーワード：melting crystal model gauge theory topological string Young diagram quantum torus algebra
quantum dilogarithm quantum curve integrable hierarchy

1. 研究開始当初の背景

2000 年に入ってから数理物理学の分野で、ヤング図形や 3 次元ヤング図形に関わるさまざまな統計力学的模型が関心を集めるようになった。それらの統計力学的模型 (ランダム分割模型) はそれ自体が興味深いだけでなく、超対称ゲージ理論や位相的弦理論などとも関係することが明らかになった。数学的には、ヤング図形は整数分割で表現され、組合せ論、表現論、可積分系理論で広く用いられている。その 3 次元版である 3 次元ヤング図形も組合せ論的に興味深い題材を提供してきた。研究代表者は 10 年以上前から溶解結晶模型と呼ばれる 3 次元ヤング図形の統計力学的模型に関心を持ち、物理学者と協力しながら、そこに内在する可積分系の構造や超対称ゲージ理論・位相的弦理論との関わりを研究してきた。

2. 研究の目的

(1) 溶解結晶模型の可積分構造の研究をさらに発展させる。それまで研究してきた溶解結晶模型は、5 次元時空の $U(1)$ 超対称ヤン・ミルズ理論という、ゲージ理論としてはきわめて特殊な設定に対応する。この場合の可積分構造の研究を $SU(N)$ ゲージ理論や簾ゲージ理論などへ拡張することめざす。

(2) 3 次元局所トーリックカラビ・ヤウ多様体上の位相的弦理論において、位相的頂点の方法で得られる分配関数や振幅関数に対して、可積分系の観点から考察する。位相的頂点はシュア関数の特殊値から構成され、特別な場合には KP 階層や戸田階層との関係がある程度わかっている。

(3) 4 次元の極大 ($N=4$) 超対称性をもつゲージ理論における可積分系の役割を解明する。この可積分構造は古典可積分系と量子可積分系の両方に関わり、可積分系研究固有の観点から見ても興味深い。

(4) ヤング図形に関わる諸概念や数え上げ問題などの中に数理物理学や可積分系の新たな研究課題を探る。

3. 研究の方法

(1) 溶解結晶模型の可積分構造の研究では、分配関数をフェルミオン表示して、そこに内在する量子トール代数とその元の間で成立する特殊な関係 (シフト対称性) を利用する。さらに、このフェルミオン表示を無限行列の言葉に翻訳し、ラックス行列の初期値を詳しく調べることによって、可積分構造が戸田階層のどのような簡約系に対応するかを考察する。

(2) 3 次元局所トーリックカラビ・ヤウ多様体上の位相的弦理論の研究においても、分配関数・振幅関数をフェルミオン表示して考察する。strip 幾何学と呼ばれるカラビ・ヤウ多様体の場合にはそのようなフェルミオン表示が従来から知られており、そこから KP 階層や戸田階層との関係もわかる。このフェルミオン表示を strip 幾何学以外へ拡張して、新たな知見を得ることを試みる。

(3) 5 次元超対称ゲージ理論とその 4 次元への次元簡約である $N=2$ 超対称ゲージ理論の分配関数はゲージ群が $SU(N)$ の場合にもフェルミオン表示をもち、溶解結晶模型の研究の方法がそのまま適用できると期待される。4 次元 $N=4$ 超対称ゲージ理論はそれらとはまったく異なるもので、新たなアイデアが必要だが、従来から量子可積分系、ツイスター理論、クラスター代数などの関連が指摘されているので、その方向からのアプローチを試みる。

4. 研究成果

(1) 一般化コニフォールドは 3 次元局所トーリックカラビ・ヤウ多様体の一種であり、ウェブ図形の両端に非自明な分割が与えられた場合の開弦振幅は 2 次元複素自由フェルミ場のフォック空間上の作用素の行列要素として表せる。この行列要素をシュア関数によって母函数化したものは戸田階層の τ 関数になり、戸田階層の特殊解を定める。この特殊解のラックス作用素を調べたところ、ラックス作用素は 2 個の有限階差分作用素の商として表せる、ということがわかった。これは本来のコニフォールド上の位相的弦理論から得られる戸田階層の特殊解 (溶解結晶模型の変種とも関係する) の特徴を自然に一般化したものになっている。このことから、この特殊解が一般化されたアプロビッツ・ラディック階層の解とみせることがわかる。こうして、一般化コニフォールド上の位相的弦理論と一般化アプロビッツ・ラディック階層の関係が明らかになった。また、その過程で量子トール代数や量子ダイログ関数が一定の役割を果たした。

(2) オービフォールド型溶解結晶模型は通常の溶解結晶模型の一般化であり、2 個の正整数パラメータ a, b をもち、局所 CP^1 幾何学と呼ばれる 3 次元トーリックカラビ・ヤウ多様体の $Z_0 \times Z_b$ オービフォールドに関連している。通常の溶解結晶模型のボルツマン重みは無変数シュア関数の特殊値から構成されるが、オービフォールド型模型ではこの特殊値の選び方が変わる。本研究によって、従来の溶解結晶模型と同様に、この模型も戸田階層のある種の簡約系の特殊解に対応していることがわかった。これは Brini らがフロベニウス構造の観点から行った研究を別の方向

からより一般的に説明するものである。

(3) closed topological vertex と呼ばれる形のウェブ図形をもつ 3 次元局所トーリックカラビ・ヤウ多様体の位相的弦理論に対して、位相的頂点の方法を用いて、外線の 1 つが非自明な表現をもつ場合の開弦振幅を具体的に計算した。closed topological vertex では開弦振幅の計算は行われていたが、このような開弦振幅の計算ははじめての試みである。この計算では溶解結晶模型で用いられたフェルミオン、量子トーラス代数、量子ダイログ関数などの道具を再利用した。さらに、非自明な表現が横 1 行（あるいは縦 1 列）のヤング図形に相当する場合に開弦振幅の母関数を考察し、それが線形 q -差分方程式（今の場合の量子ミラー曲線と考えられる）を満たすことを見出した。他方、当初の期待に反して、この開弦振幅の計算法をより一般的な樹木状のウェブ図形に拡張することは困難であることもわかった。

(4) strip 幾何学と呼ばれる線状のウェブ図形をもつ 3 次元局所トーリックカラビ・ヤウ多様体の上の位相的弦理論について closed topological vertex の場合と同様に、ウェブ図形の任意の外線を 1 つ選び、そこに非自明な表現を置いて得られる母関数が満たす線形 q -差分方程式を考察した。これらの q -差分方程式は今の場合の量子ミラー曲線とみなせるが、異なる外線から得られる曲線は互いに正準変換によって結ばれて、全体として単一の曲線を定めることがわかった。

(5) strip 幾何学や closed topological vertex の量子ミラー曲線の研究を見直して、これらの量子曲線が KP 階層におけるカツ・シュワルツ作用素の言葉で統一的に理解できることを見出した。カツ・シュワルツ作用素は 1990 年代に 2 次元重力の研究の中で見出されたものだが、最近ではリーマン球面の各種のフルヴィッツ数の量子スペクトル曲線の研究にも利用されている。本研究では、位相的弦理論の開弦振幅の多変数母関数を KP 階層の τ 関数とみなして、カツ・シュワルツ作用素の観点から量子ミラー曲線を再導出した。これらの量子ミラー曲線は 2 次元重力やフルヴィッツ数の場合と違って q -差分方程式として定式化されるが、そのような q -差分方程式が現れる仕組みも明快になった。

(6) 5 次元 $U(1)$ 超対称ゲージ理論の溶解結晶模型に対して、位相的弦理論の量子ミラー曲線と同じ方法によって、量子スペクトル曲線（線形 q -差分方程式になる）を求めた。さらに、5 次元ゲージ理論から 4 次元ゲージ理論への移行に相当する極限操作によって、この量子スペクトル曲線からリーマン球面のグロモフ・ウィッテン不変量の量子スペク

トル曲線が再現されることを見出した。この量子スペクトル曲線は Dunin-Barkowski らによって組合せ論的な計算で導出されていたものと一致する。さらに、この考察の課程で、溶解結晶模型自体の 4 次元極限の処方箋（過去 10 年余りの懸案だった）も明らかになった。その副産物として、リーマン球面のグロモフ・ウィッテン不変量の母関数が KP 階層や戸田階層の τ 関数であること（従来は別の方法によって説明されていた）の別証明が得られた。

(7) ある種のホッジ積分やフルヴィッツ数の母関数の可積分構造について考察した。これらの母関数が戸田階層の τ 関数になることは以前から知られていたが、実際にはその背後にヴォルテラ型可積分階層が内在していることがわかった。このことは特別な場合には Dubrovin らによって証明されていたが、一般の場合は予想にとどまっていた。また、Dubrovin らの方法は可積分階層のハミルトン形式とヴィラソロ条件に基づく。本研究では、この問題を戸田階層のラックス形式の観点から考察し、ラックス作用素がヴォルテラ型可積分階層に対応する構造をもつことを示した。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

[雑誌論文] (計 6 件)

- ① Kanehisa Takasaki, Toda hierarchies and their applications, *J. Phys. A: Math. Theor.* vol. 51 (2018), 203001 (35 pages), 査読有, doi: 10.1088/1751-8121/aabc14
- ② Kanehisa Takasaki and Toshio Nakatsu, q -difference Kac-Schwarz operators in topological string theory, *SIGMA* vol. 13 (2017), 009 (28 pages), 査読有, doi:10.3842/SIGMA.2017.009
- ③ Kanehisa Takasaki and Toshio Nakatsu, Open string amplitudes of closed topological vertex, *J. Phys. A: Math. Theor.* Vol. 49 (2016), 025201 (28 pages), 査読有, doi:10.1088/1751-8113/49/2/025201
- ④ Kanehisa Takasaki, Orbifold melting crystal models and reductions of Toda hierarchy, *J. Phys. A: Math. Theor.* Vol. 48

(2015), 215201 (34 pages), 査読有,
doi:10.1088/1751-8113/48/21/215201

⑤ Kanehisa Takasaki, Modified melting crystal model and Ablowitz-Ladik hierarchy, J. Phys.: Conf. Ser. Vol. 482 (2014), 012041 (10 pages), 査読有,
doi:10.1088/1742-6596/482/1/012041

⑥ Kanehisa Takasaki, Generalized Ablowitz-Ladik hierarchy in topological string theory, J. Phys. A: Math. Theor. Vol. 47 (2014), 165201 (20 pages), 査読有,
doi:10.1088/1751-8113/47/16/165201

[学会発表] (計 15 件)

① 高崎金久, 3D Young diagrams and Gromov-Witten theory of CP^1 , 第 13 回代数・解析・幾何学セミナー, 鹿児島大学 2018 年 2 月

② 高崎金久, Melting crystal model and its 4D limit, "Physics and Mathematics of Nonlinear Phenomena", Gallipoli, Italy, 2017 年 6 月

③ 高崎金久, Quantum spectral curve of melting crystal model and its 4D limit, "Geometry, Analysis and Mathematical Physics", 京都大学 2017 年 2 月

④ 高崎金久, closed topological vertex の量子ミラー曲線と q -差分型 Kac-Schwarz 作用素, 日本数学会 2016 年度総合分科会, 2015 年 9 月

⑤ 高崎金久, Integrable hierarchies in melting crystal models and topological vertex, "Integrable Hierarchies and Beyond", 名古屋大学 2016 年 8 月

⑥ 高崎金久, Integrable hierarchies in melting crystal models and topological vertex, KIAS Workshop on integrable systems and related topics, KIAS, Seoul, Korea, 2016 年 6 月

⑦ 高崎金久, Topological vertex and quantum mirror curves, "Rikkyo MathPhys 2016", 立教大学 2016 年 1 月

⑧ 高崎金久, closed topological vertex の開弦振幅, 日本数学会 2015 年度総合分科会, 2015 年 9 月 1 月

⑨ 高崎金久, Integrable structure of various melting crystal models, "Recent Progress of Integrable Systems", National Taiwan University, Taiwan, 2015 年 4 月

⑩ 高崎金久, Integrable structure of various melting crystal models", "Curves, Moduli and Integrable Systems", 津田塾大学 2015 年 2 月

⑪ 高崎金久, 溶解結晶模型の可積分構造, 研究集会「非線形数理モデルの諸相: 連続, 離散, 超離散, その先」, 九州大学 2014 年 8 月

⑫ 高崎金久, 位相的弦理論における一般化された Ablowitz-Ladik 階層, 日本数学会 2014 年度年会, 2014 年 3 月

⑬ 高崎金久, Introduction to Sato's theory on soliton equation, "Around Sato's Theory on Soliton Equations", 津田塾大学 2013 年 12 月

⑭ 高崎金久, Melting crystal models and integrable hierarchies, Summer School on Integrability in Quantum and Statistical Systems, National Taiwan University, Taiwan, 2013 年 8 月

⑮ 高崎金久, Modified melting crystal model and Ablowitz-Ladik hierarchy, "Physics and Mathematics of Nonlinear Phenomena", Gallipoli, Italy, 2013 年 6 月

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:

国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：

発明者：

権利者：

種類：

番号：

取得年月日：

国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高崎 金久 (TAKASAKI, Kanehisa)

近畿大学・理工学部・教授

研究者番号：40171433

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし

(4) 研究協力者

中津 了勇 (NAKATSU, Toshio)