近畿大学短大論集
第50巻 第1号（2017年12月）
p.23～29

循環過程における周期について

内 上 誠

抄録

景気循環にはその原因によって4つの循環（GDP の循環）が存在すると考えられており、それぞれが異なる周期を持つことが観察されている。ところが現状では、周期の違いの理由についてはあまり論ぜられていない。明示的に分析しているものには Hicks［1950］があるが、その他は極少数の論文が文中で若干触れるに留まっている。本研究ノートでは三角関数を用い、何が原因でこの周期の差が生ずるのかを考える。とくに在庫循環と設備投資循環（主循環）を対象とする。

キーワード

周期、加速度因子、三角関数、循環、設備投資循環、在庫循環

Note on the Periods in Business Cycles

Uchigami, Makoto

Abstract

In this note, I consider the dfference between the periods in business cycles. A principal character of Major cycle is that it has a long, undamped oscillation as compared with Inventory one. In a word, Major cycle has a period shorter and amplitude longer than the other one. As a result, the reason for this difference between these two cycles depends on whether the cycle has accelerator or not. The exsistence of accelerator affects ecomomy powerfully through multiplier process. In consequence, it leads to Major cycle have a long period.

Key Words

period, accelerator, trigonometrical functions, oscillation, major cycle, inventory cycle

目　　次

近畿大学短期大学部教授
2017年9月15日受理

はじめに

景気循環における周期や振幅に関する研究は理論の分野ではほとんどない。しかし、長期波動が約50年、設備投資循環　（主循環）が約８年〜10年、在庫循環が３年〜４年の周期を持つことが観察され、また在庫循環が設備投資循環の過程において２〜３個の割合で現れていることも知られている。このように景気循環と言っても、その原因によって様々な周期を持つ循環が存在する。

本研究ノートではこの周期の違いについて考察する。とくに在庫循環と設備投資循環の周期の違いについて考える。けれども考察対象は限定される。経済学的には拡張過程が、天井へと到達する前に、収縮過程へと入る循環が対象である。そのため、分析手法として三角関数を利用することができる。つまり、根が複素数のケースのみを考察することになる。

１．循環についての経済学的認識

経済学では景気循環を連続的に起こる現象、たとえば三角関数のような機械的に繰り返し起こる現象として捉えることはあまり無い。拡張過程から収縮過程へと繋がる循環は、それで１つの完結した循環であり、それに引き続く循環は別物であると考えるのが一般的である。

多くの場合、拡張過程はやがて天井（上方転換点）へと到達し、それが反転原因となって収縮過程へと突入することになるが、天井へと到達する前に収縮過程へと進むケースもあり、われわれの考察対象はこのケースになる。いずれの場合にせよ、拡張過程が収縮過程へと向かう過程については、その理由に関して一般的に共通した認識を持たれている。しかし収縮過程へ入った経済がなぜ反転し、回復過程へと続くかは、その国の経済や経済環境によって異なるため、多くの異なる意見があり、一般的に認められた統一的な原因や説明はまだない。本研究ノートでは拡張過程が収縮過程に至る１循環、つまりある谷から次の谷までに至る過程を対象とするため、次の循環へと結びつく下方転換点については考察していない。

１-１．振動論における周期について

はじめに、周期、振幅や各名称等を確認しておく。そこで手掛かりとして、まず振動論に表れる単調振動を参考にする。先述の通り、天井へと到達しない循環を扱う場合には、三角関数の分析手法を用いることが有用となる。そのための準備として単調振動を確認しておく。なお、三角関数を用いる理由は、在庫投資循環に関するモデルも在庫循環モデルも同じタイムラグを持つ式によって分析されることが多く、両者の式を直接比較しても、周期や振幅についての差が明確ではないからである。

ある経済変数の均衡からの変位をｙとし、この変位が、例えば次の式にしたがって振動するものと仮定する。

$$y = A\cos(\omega t+\varepsilon) \tag{1}$$

ここで、t は時間、A は振幅、ω は角振動数、ε は位相定数、$\omega t+\varepsilon$ は位相をそれぞれ表す。循環の周期の長さは ω の部分によって決まる。つまり T を周期とすると、$T = 2\pi/\omega$ であるから、ω が大きければ大きいほど周期は短く、振動数は増加する。逆に小さいほど周期は長くなり、振動数は減少する。

(1)式の時間に関する１階微分は y の速さ（y がストックであるなら、フローを表す。）を表し、

$$\frac{dy}{dt} = -\omega A\sin(\omega t+\varepsilon)$$

であり、加速度（フローの変化率）は(1)の２階微分によって、

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t+\varepsilon)$$

となる。

2．2階微分方程式のケース

次のような2階微分方程式があるとする。y はある均衡からの変位である。

$$\ddot{y}+a\dot{y}+by=0 \tag{2}$$

根を λ として特性方程式を作ると、

$$\lambda^2+a\lambda+b=0$$

となる。判別式は $\Delta=a^2-4b$ である。この判別式によって根が実根、複素根や重根等を判定することになるが、以下では複素根のケースのみを扱うことになる。

2-1．$\Delta<0$ のケース(計算注1)

根が複素根（$\Delta<0$）の場合を考える。このケースは、経済学的に、拡張過程にある経済が天井へと衝突すること無く、収縮過程へと入ることを意味する。

(2)の一般解は、

$$y=Ce^{-\frac{b}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}-\varepsilon\right)$$

であることが知られている。ここで、振幅 C は次式で与えられる。

$$C=\sqrt{C_1^2+C_2^2}$$

C_1 と C_2 は任意定数であるので、C も任意定数である。C の値は、$t=0$ における、$y(0)$ の値と $\dot{y}(0)=0$ を与えないと求めることができない。そのため、第3章以降では経済的な側面から初期条件と振幅 C を考えることにする。

2-2．在庫循環の例

理論的には、在庫循環は意図された在庫投資が原因として起こる GDP の循環のことである。ただし、ここでは製品在庫を対象としている。多くの在庫循環モデルでは、意図された在庫投資はある最適在庫水準を維持するために行われる投資であり、将来の需要予測に基づいた、いわば積極的な（投機的な）在庫投資ではない。このような投資を考慮に入れたモデルとしては、拙著［2010］第7章がある。

GDP の変化によって最適在庫水準が変化するため、最適在庫水準を維持するための在庫投資（z_1）は GDP の変化に依存するものと考えるほうが正当あるが、投機的な在庫投資（z_2）については、GDP の変化ではなく、GDP の変化の加速度に依存するものと仮定することが適当であろう。それゆえ、

$$z_2=\eta\ddot{y}$$

と仮定しよう。η は投機的在庫投資の反応係数を表す。1期間のみを考察対象としているとき、需給が均衡していれば投機的な在庫投資は生まれないが、考察期間を多期間に延ばした場合には、将来予測が入るため、この種の在庫投資が発生する。したがって1期間内で均衡が達成されていても、z_2 は発生しうる。そこで、いま、簡単化のため $z_1=0$ とし、設備投資と貯蓄が等しいとすると、次式が成り立つ。

$$z_1+I>S$$

ただし、I は設備投資、S は貯蓄である。均衡式にするためにはマイナス貯蓄を $S_1(<0)$ とすると、

$$z_2=-S_1$$

となる。右辺は、需給均衡に不足する貯蓄（z_2

をカバーするために必要な貯蓄）を表している。さらに、s を貯蓄率（>0）、y を均衡 GDP からの変位（乖離）とすると、$S_1 = sy < 0$（$y < 0$）なので、

$$\eta\ddot{y} + sy = 0$$

となる。未知数は y であり、均衡からの乖離部分であるためマイナス値を取ってもかまわない。この式を先ほどの方法で解いて行くと、一般解は、

$$y = C_1 \cos\sqrt{s/\eta}\,t + C_2 \sin\sqrt{s/\eta}\,t$$

となる。これより、

$$y = C\cos\sqrt{s/\eta}\,t - \varepsilon$$

を得る。したがって、周期は角振動数 $\sqrt{s/\eta}$ によって決まる。一方振幅は、初期条件を、

$$y(0) = y_0,\ \dot{y}(0) = v_0$$

とすると、

$$C = y_0\sqrt{1+\left(\frac{v_0\eta}{sy_0}\right)^2}$$

となる。

この結果より、貯蓄率が高いほど角振動数は大きくなり、周期は短くなる。逆に投機的在庫投資の反応係数（η）が大きいほど周期は短くなる。また貯蓄率が大きいほど振幅は小さく、逆に、投機的在庫投資の反応係数が大きいほど振幅は大きくなることが分かる。次章以降では同様に方法によって設備投資循環と在庫循環を比較していく。

3．経済学への応用

主循環にせよ在庫循環にせよ、代表的なモデルはすべて差分方程式によって分析されている。けれども幸いなことに、微分方程式の場合とあまり変わらない結果を得る（計算注2）ことができる。

以下では設備投資循環として Hicks（ヒックス）モデル、在庫循環として Metzler（メッツラー）モデルを用いる。

3-1．Hicks モデル

設備投資循環の代表的なモデルとして Hicks［1950］がある。成長部分を取り除き、循環部分だけを表すなら次式となる。

$$y_t = C_t + I_t$$
$$C_t = cy_{t-1}$$
$$I_t = v(y_{t-1} - y_{t-2})$$

ここで、y は GDP、C は消費、I は設備投資、c は限界消費性向（$1 > c > 0$）、v は加速度因子（$v > 1$）である。上式より、

$$y_t - (c+v)y_{t-1} + vy_{t-2} = 0$$

を得る。根は、

$$\lambda_{1,2} = [(c+v) \pm \sqrt{(c+v)^2 - 4v}]/2$$

であるため、判別式は $\Delta = (c+v)^2 - 4v$ となるが、$\Delta < 0$ となるケースのみを研究対象とする[1]。

一般解は、

$$y_t^H = Hr_H^t \cos(\theta t - \varepsilon)$$

である。変数 y の上付と r の下付の H は Hicks を表す。計算注より r は、

$$r_H = \sqrt{v}.$$

となる。

振幅 H については初期条件を設定しないと求められないため、任意の定数としておく。

3-2．Metzler モデル

Metzler モデルは均衡からの乖離部分（循環部分）だけを取り出すと、次式となる。

$$y_1 - 2cy_{t-1} + cy_{t-1} = 0$$

変数と係数の意味は Hicks モデルと同じである。根は、

$$\lambda_{1,2} = c \pm \sqrt{c(c-1)}$$

となるから、仮定より $c < 1$ より必ず $\Delta < 0$ となる。一般解は、

$$y_t^M = Mr_M^t \cos(\rho t - \varepsilon)$$

であり、y の上付と r の下付の M は Metzler を表す。また、

$$r_M = \sqrt{c}$$

である。振幅はここでも初期条件を仮定していないため任意定数としておく。

3-3．比　較

現実の景気循環過程を観察すると、在庫循環に比べ、設備投資循環の振幅は大きく、周期も長いことが知られている。

安定性であるが、仮定より、

$$r_H = \sqrt{v} > 1,\ r_M = \sqrt{c} < 1$$

であるから、Hicks モデルは不安定的であり、Metzler モデルは安定的であることが分かる。そのため、Hicks モデルでは振幅が H をスタートとして時間と伴に拡張して行くことになる。逆に、Metzler モデルでは M をスタートとして次第に減衰して行く。

次に、周期に関わる角振動数 θ と ρ を考える。計算注(2)より、Hicks の場合は、

$$\cos\theta = (c+v)/2\sqrt{v}$$
$$\sin\theta = \sqrt{(c+v)^2 - 4v}/2\sqrt{v}$$

となり、Metzler の場合は、

$$\cos\rho = c/\sqrt{c} = \sqrt{c}$$
$$\sin\rho = \sqrt{c(c-1)}/\sqrt{c} = \sqrt{c-1}$$

となる。Hicks モデルと Metzler モデルの cos 部分を比較するため、$\cos\theta - \cos\rho$ を計算する。そのため、仮定（$0 < c < 1$）から $c = 0.9$、（$v > 1$）$v = 1.1$ によって計算すると、

$$[(c+v) - 2\sqrt{cv}]/2\sqrt{v} > 0$$

であることが分かる。$\cos\theta > \cos\rho$ なので、三角関数において Hicks モデルの方が、X 軸（横軸）の長さが長いことになる。また、$\sin\theta - \sin\rho$ を計算すると、

$$[\sqrt{(c+v)^2 - 4v} - \sqrt{4(c-1)v}]/2\sqrt{v} < 0$$

となることが分かる。三角関数において Hicks モデルの方が、Y 軸（縦軸）の長さが短いことになる。以上の結果、$\theta < \rho$ であると言いうるため、Metzler モデルのほうが、Hicks モデルより角振動数が大きく、周期が短いことが分かる。

最後に振幅についてであるが、初期条件をなん

ら仮定していないので、初期振幅の大きさが、たとえば、$H = M$ としても本稿の内容にはなんら相違は生じない。結局、Hicks モデルの方は振幅がHからスタートし、時間の経過とともに増加して行くことになり、逆に、Metzler モデルでは時間の経過と共に収縮して行くことになる。けれども経済学的な側面から H と M の大きさを推測するなら次のことが言い得るであろう。

GDP の振幅の幅は投資規模と乗数値によって決まる。貯蓄率が一定であれば、在庫循環であろうと設備投資循環であろうと乗数値は変わらない。しかし投資の規模が違えば、そこから派生する需要の規模（乗数倍）は大きく異なる。実際のデータから投資規模を比べるなら、在庫投資に比べ設備投資の規模は断然に大きい。このことよりわれわれは振幅の大きさに関して、スタート時点において、

$$H > M$$

と仮定することは妥当であると思われる。

4．結　語

本研究ノートでは在庫循環と設備投資循環の周期の違いについて考察した。考察対象は谷から谷までの１循環であり、かつ拡張過程が上限に達する前に収縮過程へと向かう循環のみである。

結果、設備投資循環の方が周期は長く（角振動数の値は小さい)、振幅も大きいことが分かった。一方、在庫循環のほうは周期が短く（角振動数が大きい)、振幅も小さい。そのため在庫循環に比べ、設備投資循環は、変動も大きく、周期の長い循環を描くことになる。これは実際の観察に合致する。その理由としては、３－３節から分かるように、加速度因子の存在が大きく働いている。周期の長さは、設備投資の計画・発注から実際に設置されるまでの懐妊期間が長いことが加速度因子に影響を与えているためと考えられる。振幅の大きさは設備投資の規模が大きく関わっており、設備投資の規模の大きさを反映していると言い得る。

ただ、今回のノートは考察対象が限定されており、設備投資循環から見た場合、研究対象として、拡張過程が天井（上昇限界線）に衝突した後で収縮過程へと進むケースを外したことは明らかに不満足である。今後の課題としたい。

（注）

⑴　Hicks モデルにおいて、c と v がどのような値を採る場合、$\Delta < 0$ となるか、については Samuelson, P. A.（サミュエルソン）により詳細に分析されている。たとえば Gandolfo［1997］p.74 を参照。

（計算注）

⑴　微分方程式の書籍には必ず記載されており、蛇足かもしれないが、あえて確認のためにも計算過程を記載しておく。

$\Delta < 0$、つまり根 λ が複素根である場合、

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \alpha \pm \beta$$

と置くことにする。ただし、

$$\alpha = -a/2,\ \ \beta = \sqrt{a^2 - 4b}/2$$

である。一般解は、

$$y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)t} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)t}$$

である。ただし、$i = \sqrt{-1}$ である。ここで、

$$e^{(\alpha \pm i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t \pm i \sin\beta t)$$

であるから、これを代入すると、

$$y = e^{\alpha t}[c_1(\cos\beta t + i \sin\beta t) + c_2(\cos\beta t - i \sin\beta t)]$$

となる。$c_1 + c_2 = C_1$, $(c_1 - c_2)i = C_2$ とすると、

$$y = e^{\alpha t}(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t) \quad (3)$$

を得る。さらに、

$$C\cos\varepsilon = C_1,\ C\sin\varepsilon = C_2$$

とすれば、(3)は、

$$C(\cos e\cos\beta t+\sin\varepsilon\sin\beta t)=C\cos(\beta t-\varepsilon)$$

となるため、

$$y=C\cos(\beta t-\varepsilon)$$

を得る。したがって一般解は、

$$y=Ce^{-\frac{b}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}-\varepsilon\right)$$

である。ところで、実数 e 、f を用いて、

$$c_1=e+if\text{、}c_2=e-if$$

とすると、

$$C_1=2e\text{、}C_2=-2f$$

となるので、ともに実数である。また振幅は、

$$C=\sqrt{C_1^2+C_2^2}=2\sqrt{e^2+f^2}$$

である。これにより C が実数であることが分かる。

(2) 差分方程式が、

$$y_t+a_1y+a_2y=0$$

であり、$\Delta<0$ であると、解は、

$$y_t=F'(\alpha+i\beta)^t+F''(\alpha-i\beta)^t$$

である。ここで、

$$\alpha\pm i\beta=r(\cos\omega\pm i\sin\omega) \qquad (1)$$

であり、また、

$$\alpha=r\cos\omega=-\alpha_1/2$$
$$\beta=r\sin\omega=\sqrt{a_1^2-4a_2}/2$$

である。
ここでド・モアブル（De Moivre）の定理

$$(\cos\omega\pm i\sin\omega)^n=\cos n\omega\pm i\sin n\omega$$

と(1)を用いると、

$$y_1=r^t(F_1\cos\omega t+F_2\sin\omega t)$$

を得る。ただし、

$$F'+F''=F_1,\ (F'-F'')_i=F_2$$

である。よって、一般解は、次式となる。

$$y_1=Gr^t\cos(\omega t-\varepsilon)$$

ただし、G は初期条件 $y(0)$、$y(1)$ を与えないと求まらない。また、

$$r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

である。

参考文献

(1) 有山正孝［1970］『振動・波動』基礎物理学選書 8 裳華房.
(2) 内上　誠［2010］『改訂版　景気循環論入門』晃洋書房.
(3) 高橋健人［1961］『差分方程式』（新数学シリーズ20），培風館.
(4) Gandolfo, Giancarlo［1997］*Economic Dynamics*, Study edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.
(5) Hicks, J. R.［1950］, *A Contribution to The Theory of Trade Cycle*, Oxford at the Clarendon Press.（古谷弘訳［1965］『景気循環論』岩波現代叢書）
(6) Metzler, L. A.［1973］, *Collected paper*, Cambridge Massachusetts, Harvard Univ. press.
(7) Ross, S. L.［1974］, *Differential Equations*, Second Ed.,John Wiley & Sons.