

ロール運動を考慮した自動車の平面運動モデル:第2報
(前後輪のコーナリングフォースの位相差の考慮)酒井 英樹^{*1}Automobile plane-motion model including roll motion: Second report
(Taking into consideration phase difference of cornering forces between front and rear wheels)Hideki SAKAI^{*1}^{*1}Kindai Univ. Dept. of Robotics Engineering
1 Umenobe, Takaya, Higashihiroshima-shi, Hiroshima 739-2116, Japan

Received 15 July 2016

Abstract

The roll motion of the vehicle has an effect on the yaw natural frequency. Because the yaw natural frequency formula considering this effect is the solution to a quartic equation, the expression of the formula is thought to be complex and incomprehensible. Accordingly, a seemingly comprehensible approximate formula was suggested in the former paper. In this approximation process, it was assumed that the cornering forces of the front and rear wheels are generated simultaneously. On the other hand, a later report have indicated that the yaw resonance when the vehicle drives at a certain speed has a cornering forces phase difference of 90 degrees between the front and rear wheels. Therefore this paper formulates the yaw natural frequency and yaw damping ratio assuming the phase difference to be 90 degrees. As results of that, qualitatively, the design variables that dominate the characteristic equation are appropriately included in the yaw natural frequency and yaw damping ratio formulas, and quantitatively, the approximation error is reduced. Consequently, these formulas are believed to be more appropriate than the previously proposed formulas. These formulas indicate that, when the load distribution ratio of the front wheels becomes larger, the yaw natural frequency decreases and the yaw damping ratio increases. In addition, this paper also indicates the scope of these approximate formulas quantitatively.

Key words : Automobile, Roll, Natural frequency, Damping ratio, Roll stiffness, Roll arm length

1. 緒 言

操舵に対する過渡応答のより高品質な性能設計のために、本論文は、前報で提案したロール運動が考慮されたヨー固有振動数やヨー減衰比の近似式(酒井, 佐藤, 1999)を、さらに妥当なものに改良する。

操縦安定性の諸性能のうち最も注目される性能は操舵に対する過渡応答性能であり、その基本的性質を表す指標はヨー固有振動数であると思われる。そこでヨー固有振動数に目標値を設定し、それを満たす設計パラメータを、ヨー固有振動数の文字式についての理解に基づいて設定する方法(入江, 芝端, 1985)が用いられる。

ただしヨー固有振動数は、車体のロールの影響を受ける。この影響が加味された固有振動数は、4次方程式の解であるために、その文字式は、複雑すぎて理解不能と思われる。そこで、理解可能と思われる近似解を前報で提案した。この近似の過程において、前後輪のコーナリングフォースが同時に発生することが仮定されたのに対し、後年、ある車速におけるヨー共振では、前後輪のコーナリングフォースには $\pi/2$ [rad] (90[deg])の位相差があることが指摘された(酒井, 2015a)。

そこで本論文は、それらの位相差を $\pi/2[\text{rad}]$ と仮定することによって、ヨー固有振動数や減衰比を定式化する。その結果、定性的には、運動方程式を支配していた設計変数が過不足なくヨー固有振動数やヨー減衰比の式に含まれるようになり、定量的には、近似誤差が減少するようになる。したがって、これらの式は、従来の式よりもさらに妥当であると思われる。また、この式によって、前輪荷重配分比が大きいほど、ヨー固有振動数が減少し、ヨー減衰比が増加することが、今回新たに見通せるようになる。さらに、この近似式の適用範囲にもついても定量的に示される。

2. ロール運動と平面 2 自由度運動との連成

2・1 仮定

車両のモデル化にあたり、前報と同様に、次の仮定をおく。

仮定 1) 旋回半径は、トレッドやホイールベースに比べて十分大きい。

仮定 2) ばね上質量に比べて、ばね下質量は十分小さい。

仮定 3) 車速は一定とする。

仮定 4) あらゆる角度は微小とする。

仮定 5) ヨー固有振動数よりもロール固有振動数は十分高い。

仮定 6) コーナリングフォースはスリップ角に比例する。

仮定 7) 静止時の車体の慣性主軸は水平面内および鉛直方向にあり、車体の慣性乗積は 0 とする。

仮定 8) ロール軸は水平とする。

2・2 座標系

前項の仮定 2 から、ばね下の質量を 0 と見なすと、ばね上の重心が車両の重心になる。そこで、ばね上の重心に原点 o を固定した直交座標系 $o-x-y-z$ を、図 1 に示すように定義する。ここで x 軸は水平面内車両前方に、 y 軸は水平面内車両左向きに、 z 軸は鉛直上向きにそれぞれ設定してある。

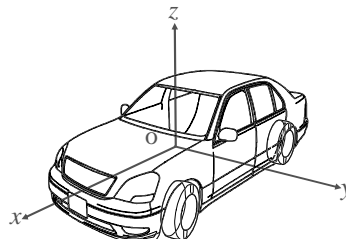


Fig.1 The coordinate system

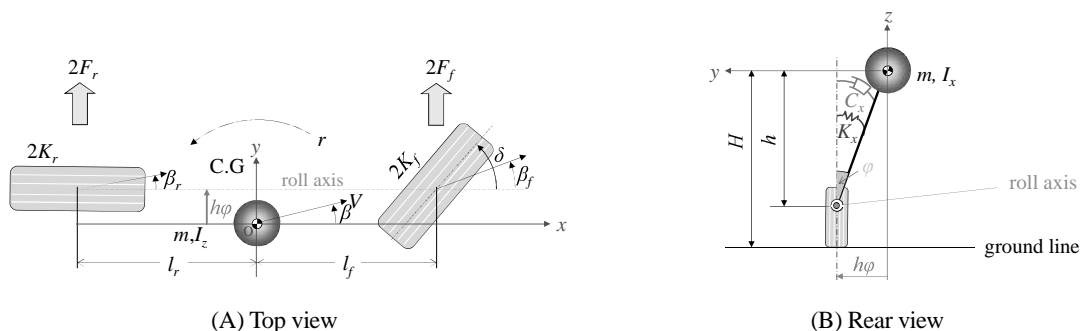


Fig.2 Vehicle model

2・3 モデルと記号

仮定 1) から、トレッドを 0 とした車両モデルを図 2 に示す. このモデルに用いられる記号は次の通りである.

C_x : ロール減衰モーメント係数

F_f : 前輪コーナリングフォース

F_r : 後輪コーナリングフォース

g : 重力加速度

H : 重心高

h : ロールアーム長 (ロール軸から重心までの距離)

I_x : ロール慣性モーメント

I_z : ヨー慣性モーメント

K_f : 前輪等価コーナリングパワ

K_r : 後輪等価コーナリングパワ

K'_x : ロール剛性

l : ホイルベース

l_f : 前輪～重心間距離

l_r : 重心～後輪間距離

m : 車両質量

r : ヨー角速度

V : 車速

β : 重心位置横すべり角

β_f : 前輪のばね下位置における横滑り角

β_r : 後輪のばね下位置における横滑り角

δ : 舵角

ϕ : ロール角

ここで、オーバーオールギヤ比は 1 とする. またタイヤは上下にも左右にも変形しないものとする. したがってロールは、サスペンションの左右逆相ストロークによってだけで生じるものとし、タイヤ縦変形によるロールは K'_x に含める. また、本論文では、ロールの影響だけに注目するため、タイヤの横方向の弾性変形は無視する. また前報同様、前後輪のロールアーム長は等しいとする.

2・4 運動方程式

図 2 に示されるモデルの、 y 軸方向および、 z 軸まわり、 x 軸まわりの運動方程式は、それぞれ次のように表される (藤岡, 山本, 2010).

$$mV(r + \dot{\beta}) = 2F_f + 2F_r \quad (1)$$

$$I_z \dot{r} = 2l_f F_f - 2l_r F_r \quad (2)$$

$$I_x \ddot{\phi} = -C_x \dot{\phi} - (K'_x - mhg)\phi + 2h(F_f + F_r) \quad (3)$$

ここで $2F_f$ と $2F_r$ は、それぞれ次のように表される.

$$2F_f = -2K_f(\beta_f - \delta) \quad (4)$$

$$2F_r = -2K_r\beta_r \quad (5)$$

また β_f と β_r は、以下のように表される.

$$\beta_f = \beta + \frac{l_f}{V} r + \frac{h}{V} \dot{\phi} \quad (6)$$

$$\beta_r = \beta - \frac{l_r}{V} r + \frac{h}{V} \dot{\phi} \quad (7)$$

式(6), (7)の右辺のそれぞれの第3項は, ロール運動と平面2自由度運動との連成項であり, 車体のロール角速度による接地点の横速度に起因する.

次に表記を次式のように簡略化する.

$$K_x \equiv K'_x - mhg \quad (8)$$

この簡略化によって, g の項が, 運動方程式から除去される.

次に, コーナリングパワは, コーナリング係数の形式で車両運動に影響するとされる (景山, 景山, 2001). ここでコーナリングパワをコーナリング係数に置換える. すなわち,

$$C_{*f} \equiv \frac{2K_f}{\frac{l_r}{l} mg} \quad (9)$$

$$C_{*r} \equiv \frac{2K_r}{\frac{l_f}{l} mg} \quad (10)$$

とする. ここで C_{*f} および C_{*r} がそれぞれ前後輪の等価コーナリング係数である. $2K_f$ と $2K_r$ の代わりに, C_{*f} と C_{*r} を用いることによって, 式(1)から m が消去される. しかし, 再び g の項が出現してしまう. そこで, それを避けるために, g が乗じられた等価コーナリング係数 (酒井, 2015b) C_f と C_r を, C_{*f} と C_{*r} それぞれの代わりに用いる. すなわち

$$C_f \equiv \frac{2K_f}{\frac{l_r}{l} m} = C_{*f} g \quad (11)$$

$$C_r \equiv \frac{2K_r}{\frac{l_f}{l} m} = C_{*r} g \quad (12)$$

とする. 本論文では, 以後 C_f と C_r を単に「等価コーナリング係数」と記す. なお等価コーナリング係数の目安は, 車両の軽重にかかわらず $C_f \doteq 100$, $C_r \doteq 200[\text{m/s}^2]$ とされ, C_f と C_r を用いると, スタビリティファクタ A は次式によって記述される (北浜, 酒井, 1999).

$$A = \frac{1}{l} \left(\frac{1}{C_f} - \frac{1}{C_r} \right) \quad (13)$$

次に解析を簡単にするため、 I_z と m との関係を次式のように仮定する.

$$\frac{I_z}{l_f l_r m} = 1 \quad (14)$$

この仮定により、式(2)から I_z と m が消去される. なお乗用車の実測値の分布(北浜, 酒井, 1999)は概ね $I_z/(l_f l_r m)=0.85 \sim 1.05$ [無次元]と指摘されるので、式(14)は現実の範囲内にある.

2・5 特性方程式

この運動方程式の特性方程式を求める. 式(1)~(12)および(14)において全ての初期条件を0としてラプラス変換を行い、 δ に対する r の伝達関数を求め、その式の分母が0と等しいと置くことによって、特性方程式として次式を得る.

$$\left(\frac{I_x}{K_x} s^2 + \frac{C_x}{K_x} s + 1 \right) \left\{ s^2 + \frac{C_f + C_r}{V} s + \left[\frac{C_r}{l} - \frac{C_f}{l} \left(1 - \frac{l C_r}{V^2} \right) \right] \right\} + \left(\frac{l_r C_f}{l V} + \frac{l_f C_r}{l V} \right) \frac{h^2 m}{K_x} s^3 + \frac{C_f C_r h^2 m}{V V K_x} s^2 = 0 \quad (15)$$

ここで s はラプラス演算子である.

式(15)の左辺第1()内が0と等しいとした式は、平面2自由度運動(r や β)と連成しないときのロール運動の特性方程式であり(酒井, 2015c), 式(3)において、 $2F_f = 2F_r = 0$ とすることによって求められる. また式(15)の{ }内が0と等しいとした式は、式(14)が成立し、かつ ϕ と連成しないときの平面2自由度運動の特性方程式であり(酒井, 2013a), 式(1), (2), (4)~(7), (11), (12), (14)において $\delta=0$ かつ $h=0$ とした式の特性方程式から求めることができる. 以上のことから、式(15)の最後の2項が平面2自由度運動とロール運動との連成項である. 連成項には、ロール系の影響は $h^2 m/K_x$ の形式で現れる. $h^2 m/K_x$ は、式(6), (7)それぞれの右辺第3項に由来するので、単位横加速度あたりの接地点横移動量(以後、単に「接地点横移動量」と記す)を意味する.

3. 既往研究

3・1 ロールを考慮しない場合のヨー固有振動数と減衰比

ロール運動が平面2自由度運動に及ぼす影響を考察するための基準として、ロール運動を考慮しない場合のヨー固有振動数と減衰比について述べる.

まずロールと非連成のときの平面2自由度運動の特性方程式は、式(15)において、 $h=0, C_x=0, I_x=0$ とすることによって、2・5節で述べたように、次の式が得られる.

$$s^2 + \frac{C_f + C_r}{V} s + \left[\frac{C_r}{l} - \frac{C_f}{l} \left(1 - \frac{l C_r}{V^2} \right) \right] = 0 \quad (16)$$

よって、式(16)における固有振動数(ヨー固有振動数)を ω_{n0} 、減衰比(ヨー減衰比)を ζ_0 とそれぞれ記すと、

$$\omega_{n0} = \sqrt{\frac{C_r}{l} - \frac{C_f}{l} \left(1 - \frac{l C_r}{V^2} \right)} \quad (17)$$

$$\zeta_0 \omega_{n0} = \frac{C_f + C_r}{2V} \quad (18)$$

となる. ω_{r0} と ζ_0 を基準にして, 本論文では, ロール運動が平面運動に及ぼす影響を表す.

3・2 前報におけるヨー固有振動数と減衰比

式(7)の直下で述べたように, 式(6), (7)における右辺第三項が, ロール運動と平面運動との連成項である. これらの項は定常円旋回では0のため, 等価コーナリング係数に加味できない. そこで, これらの項を複素コーナリングパワ(酒井, 佐藤, 1997)の時定数として表すことによって, ヨー固有振動数や減衰比が定式化されている. その方法を以下に述べる.

仮定5から, 横加速度 a_y に比例して ϕ が生じると仮定する. そこで ϕ を求めるために, 横加速度 a_y における定常円旋回を仮定すると, 式(1), (2)はそれぞれ

$$ma_y = 2F_f + 2F_r \quad (19)$$

$$0 = 2l_f F_f - 2l_r F_r \quad (20)$$

となる. これらの式を $2F_f$ と $2F_r$ について解くと

$$2F_f = \frac{l_r}{l} ma_y \quad (21)$$

$$2F_r = \frac{l_f}{l} ma_y \quad (22)$$

となる. 式(21), (22)を式(3)に代入すると, 定常円旋回ではロール角加速度もロール角速度も0だから, ϕ は

$$\phi = \frac{hm}{K_x} a_y \quad (23)$$

となる. よって, 前後輪それぞれの接地点横変位を共に y と記せば,

$$y = h\phi \quad (24)$$

$$= \frac{h^2 m}{K_x} a_y$$

となる.

次に, y と前輪のコーナリングフォースとの関係から, 前輪の等価ばね横定数(2輪あたり) $2k_f$ を次式のように定義する.

$$2k_f \equiv \frac{2F_f}{y}$$

$$= \frac{\frac{l_r}{l} m a_y}{\frac{h^2 m}{K_x} a_y}$$

$$= \frac{l_r K_x}{l h^2}$$
(25)

一方、タイヤの横変形自由度を有する車両の前輪のタイヤの横剛性（1輪あたり）を k_f^* と記すと、前輪のタイヤスリップ角 α_f に対する $2F_f$ の伝達関数は次のようになる（景山，景山，2001）。

$$\frac{2F_f(s)}{\alpha_f(s)} = -\frac{2K_f}{1 + \frac{2K_f}{2k_f^* V} s}$$
(26)

ここで $\alpha_f = \beta_f - \delta$ である。

次に、式(26)の $2k_f^*$ の代わりに式(25)の $2k_f$ を代入し、さらに分母の $2K_f$ に式(11)の関係を用いると

$$\frac{2F_f(s)}{\alpha_f(s)} = -\frac{2K_f}{1 + \frac{h^2 m C_f}{K_x V} s}$$
(27)

となる。これと同様に、後輪のタイヤスリップ角を α_r と記すと、後輪については、

$$\frac{2F_r(s)}{\alpha_r(s)} = -\frac{2K_r}{1 + \frac{h^2 m C_r}{K_x V} s}$$
(28)

となる。ここで $\alpha_r = \beta_r$ である。式(27)，(28)の右辺全体で、式(4)，(5)中の $-2K_f$ や $-2K_r$ とそれぞれ置換えると、全ての初期条件を0としてラプラス変換を行った形式の式(1)，(2)はそれぞれ

$$mV(r + \beta s) = -\frac{2K_f \left(\beta + \frac{l_f r}{V} - \delta \right)}{1 + \frac{h^2 m C_f}{K_x V} s} - \frac{2K_r \left(\beta - \frac{l_r r}{V} \right)}{1 + \frac{h^2 m C_r}{K_x V} s}$$
(29)

$$I_z r s = -\frac{2l_f K_f \left(\beta + \frac{l_f r}{V} - \delta \right)}{1 + \frac{h^2 m C_f}{K_x V} s} + \frac{2l_r K_r \left(\beta - \frac{l_r r}{V} \right)}{1 + \frac{h^2 m C_r}{K_x V} s}$$
(30)

と表される。式(1)，(2)は共に s の1次式であるのに対して、式(29)や式(30)を通分すると、それぞれ s の3次式になってしまう。そこで、式(29)と式(30)をそれぞれ s の1次式化する。そのために、式(27)および式(28)の時定数を、

どちらも十分小さいものと仮定し, $s=0$ のまわりで 1 次のテーラー展開をする (酒井, 佐藤, 1997) と, 式(27), (28)はそれぞれ

$$\frac{2F_f(s)}{\alpha_f(s)} \approx -2 \left(1 - \frac{h^2 m C_f}{K_x V} s \right) K_f \quad (31)$$

$$\frac{2F_r(s)}{\alpha_r(s)} \approx -2 \left(1 - \frac{h^2 m C_r}{K_x V} s \right) K_r \quad (32)$$

となる. これらの式の右辺全体で, 式(4), (5)中の $-2K_f$ や $-2K_r$ とそれぞれ置換えると, 全ての初期条件を 0 としてラプラス変換を行った形式の式(1), (2)はそれぞれ

$$mV(r + \beta s) \approx -2K_f \left(1 - \frac{h^2 m C_f}{K_x V} s \right) \left(\beta + \frac{l_f r}{V} - \delta \right) - 2K_r \left(1 - \frac{h^2 m C_r}{K_x V} s \right) \left(\beta - \frac{l_r r}{V} \right) \quad (33)$$

$$l_f l_r m r s \approx -2l_f K_f \left(1 - \frac{h^2 m C_f}{K_x V} s \right) \left(\beta + \frac{l_f r}{V} - \delta \right) + 2l_r K_r \left(1 - \frac{h^2 m C_r}{K_x V} s \right) \left(\beta - \frac{l_r r}{V} \right) \quad (34)$$

となり, それぞれ s の 1 次式のままになる. なお式(34)を導出する際, 式(14)を用いた.

式(33)と式(34)との特性方程式における固有振動数 (ヨ一固有振動数) を $\omega_{previous}$, 減衰比 (ヨ一減衰比) を $\zeta_{previous}$ と記し, $\omega_{previous}$ と $\zeta_{previous}$ それぞれの微小項を無視したうえで, これらの $\omega_{previous}^2$ と $\zeta_{previous} \omega_{previous}$ を連成項の構成要素 $h^2 m / K_x$ について 0 のまわりで 1 次のテーラー展開をすると, それぞれ次の式が得られる.

$$\omega_{previous} \approx \sqrt{1 + \left[\left(\frac{C_f}{V} \right)^2 + \left(\frac{C_r}{V} \right)^2 \right] \frac{h^2 m}{K_x}} \omega_{n0} \quad (35)$$

$$\zeta_{previous} \omega_{previous} \approx \zeta_0 \omega_{n0} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{C_f^2}{V^2} + \frac{C_f}{l} \right) \frac{C_f}{V} + \left(\frac{C_r^2}{V^2} - \frac{C_r}{l} \right) \frac{C_r}{V} \right] \frac{h^2 m}{K_x} \quad (36)$$

式(35), (36)における()の項の単位は共に rad/s^2 である. また $h^2 m / K_x$ の単位は $1/(\text{rad/s}^2)$ と等価である. そのため, 前者と後者との積は無次元である. また, 前報において式(35), (36)に相当する式には微小項が省略されてないため, 式(35), (36)よりも項の数が多い.

4. 前後輪のコーナリングフォースの位相差が加味されたヨ一固有振動数と減衰比

4・1 前後輪のコーナリングフォースの位相差

この節では, ロール自由度を持たない車両モデルにおいて, ω_{n0} に C_f が影響を及ぼさない車速におけるヨ一共振現象 (酒井, 2015a) について述べる. そのため, この節では $\phi=0$ かつ $h=0$ とする.

まず, ω_{n0} に C_f が影響を及ぼさない条件は, 式(17)から

$$1 - \frac{lC_r}{V^2} = 0 \quad (37)$$

である。したがって、この式が成立する正の V を $V_{\beta_f=0}$ と記すと、

$$V_{\beta_f=0} = \sqrt{lC_r} \quad (38)$$

である。 $V=V_{\beta_f=0}$ のときの ω_{n0} を $\omega_{n\beta_f=0}$ と記すと、式(38),(17)から

$$\omega_{n\beta_f=0} = \sqrt{\frac{C_r}{l}} \quad (39)$$

となる。

一方、 $2F_f$ に対する $2F_r$ の伝達関数を求めると

$$\frac{2F_r}{2F_f} = \frac{l_f}{l_r} \frac{1}{\frac{l}{C_r}s^2 + \frac{l}{V}s + 1} \quad (40)$$

となる (酒井, 1998)。この式に、 $V=V_{\beta_f=0}$ と $s=j\omega_{n\beta_f=0}$ を代入し、さらに $2F_f$ と $2F_r$ を、それぞれ前後輪の垂直荷重で除すると

$$\frac{\left(\frac{2F_r}{\frac{l_f}{l}mg} \right)}{\left(\frac{2F_f}{\frac{l_r}{l}mg} \right)} = -j \quad (41)$$

となる。ここで j は虚数単位である。上式から、 $2F_r$ は $2F_f$ よりも位相が $\pi/2$ [rad] (90[deg]) 遅れて生じる。これが、 $V=V_{\beta_f=0}$ における前後輪のコーナリングフォースの位相差である。なお $V_{\beta_f=0}$ とは、定常円旋回において、 $\beta_f=0$ になる車速である (酒井, 2013b)。

4・2 前後輪のコーナリングフォースの位相差が加味された接地点横変位

式(24)を導出するにあたり、定常円旋回を想定したため、 $2F_f$ と $2F_r$ の発生タイミングは同時であることを仮定している。一方、ロール運動を加味しないときの $V_{\beta_f=0}$ におけるヨー共振周波数では、 $2F_r$ は $2F_f$ よりも位相が $\pi/2$ [rad] (90[deg]) 遅れて生じる。ヨーと減衰比を定式化するための仮定としては、前者よりも後者のほうが、より妥当だと思われる。なぜなら、少なくとも $V=V_{\beta_f=0}$ のときはヨー共振現象と一致するからである。そこで本論文では、ロール運動を加味したヨー固有振動数と減衰比を、 $V=V_{\beta_f=0}$ のまわりで定式化する。そのため、次の仮定をおく。

仮定 9) あらゆる V のヨー固有振動数において、 $2F_r$ は $2F_f$ よりも位相が $\pi/2$ [rad] (90[deg]) 遅れて生じる。

この仮定により、ロール角 ϕ は $2F_f$ 成分と $2F_r$ 成分とに直交分解できる。したがって ϕ の内、 $2F_f$ に起因する成分を ϕ_f 、 $2F_r$ に起因する成分を ϕ_r と記すと、 ϕ_f と ϕ_r とは互いに独立しており、さらに 2.1 節の仮定 5) から、 ϕ_f は $2F_f$

だけに比例して生じ、 ϕ_r は $2F_r$ だけに比例して生じる（仮定5の適用範囲は、5.3節で考察される）。そこで、前輪の等価横剛性を算出する際には $2F_f$ だけを、後輪の等価横剛性を算出する際には $2F_r$ だけを用いる。

まず、 $2F_f$ が最大の瞬間の前輪の接地点横変位 y_f を求める。仮定9)から、式(3)は、

$$0 = -K_x \phi_f + 2F_f h \quad (42)$$

となる。この式の $2F_f$ に式(21)を代入し、 ϕ_f について解くと

$$\phi_f = \frac{l_r}{l} \frac{hm}{K_x} a_y \quad (43)$$

となる。したがって、

$$y_f = h \phi_f \quad (44)$$

$$= \frac{l_r}{l} \frac{h^2 m}{K_x} a_y$$

となる。この式の右辺は、式(24)の右辺の l_r/l 倍（ <1 ）である。これが、 $2F_f$ と $2F_r$ との位相が $\pi/2$ [rad]であると仮定したことの影響である。

4・3 前後輪のコーナリングフォースの差を仮定したときの運動方程式

$2F_f$ に対する y_f の関係をばねとして扱おうと、式(44)が成立するための前輪の等価横剛性（2輪分） $2k'_f$ は

$$\begin{aligned} 2k'_f &= \frac{2F_f}{y_f} \\ &= \frac{\frac{l_r}{l} m a_y}{\frac{l_r}{l} \frac{h^2 m}{K_x} a_y} \\ &= \frac{K_x}{h^2} \end{aligned} \quad (45)$$

となり、 k'_f は k_f の l/l_r （ >1 ）倍になる。この $2k'_f$ で式(26)中の $2k^*_f$ を置換えると、式(27)に相当する式は

$$\frac{2F_f(s)}{\alpha_f(s)} = - \frac{2K_f}{1 + \frac{l_r}{l} \cdot \frac{h^2 m C_f}{K_x V} s} \quad (46)$$

となる。この式の時定数は、式(27)の時定数の l_r/l （ <1 ）倍である。

後輪についても、以上と同様に求めることによって、式(28)に相当する式は

$$\frac{2F_r(s)}{\alpha_r(s)} = -\frac{2K_r}{1 + \frac{l_f}{l} \cdot \frac{h^2 m C_r}{K_x V} s} \quad (47)$$

となる。この式の時定数は、式(28)の時定数の l_f/l (<1) 倍である。

次に、式(46), (47)の時定数は十分小さいと仮定して、式(46), (47)を $s=0$ のまわりで1次のテーラー展開をすると、それぞれ

$$\frac{2F_f(s)}{\alpha_f(s)} \approx -2 \left(1 - \frac{l_f}{l} \cdot \frac{h^2 m C_f}{K_x V} s \right) K_f \quad (48)$$

$$\frac{2F_r(s)}{\alpha_r(s)} \approx -2 \left(1 - \frac{l_f}{l} \cdot \frac{h^2 m C_r}{K_x V} s \right) K_r \quad (49)$$

となる。これらの式の右辺全体で、式(4), (5)中の $-2K_f$ や $-2K_r$ とそれぞれ置換えると、全ての初期条件を0としてラプラス変換を行った形式の式(1), (2)は、

$$mV(r + \beta s) \approx -2K_f \left(1 - \frac{l_f}{l} \cdot \frac{h^2 m C_f}{K_x V} s \right) \left(\beta + \frac{l_f r}{V} - \delta \right) - 2K_r \left(1 - \frac{l_f}{l} \cdot \frac{h^2 m C_r}{K_x V} s \right) \left(\beta - \frac{l_f r}{V} \right) \quad (50)$$

$$l_f l_r m r s \approx -2l_f K_f \left(1 - \frac{l_f}{l} \cdot \frac{h^2 m C_f}{K_x V} s \right) \left(\beta + \frac{l_f r}{V} - \delta \right) + 2l_r K_r \left(1 - \frac{l_f}{l} \cdot \frac{h^2 m C_r}{K_x V} s \right) \left(\beta - \frac{l_f r}{V} \right) \quad (51)$$

となる。これらの式の特方程式における固有振動数(ヨー固有振動数)を ω_n 、減衰比(ヨー減衰比)を ζ と記し、 ω_n や ζ における微小項を無視したうえで、 ω_n^2 と $\zeta \omega_n$ について連成項の構成要素 $h^2 m/K_x$ を0のまわりで1次のテーラー展開をすることによって、それぞれ次の関係式を得る。

$$\omega_n \approx \sqrt{1 + \left[\frac{l_r}{l} \left(\frac{C_f}{V} \right)^2 + \frac{l_f}{l} \left(\frac{C_r}{V} \right)^2 \right] \frac{h^2 m}{K_x}} \omega_{n0} \quad (52)$$

$$\zeta \omega_n \approx \zeta_0 \omega_{n0} + \frac{1}{2} \left[\frac{l_r}{l} \left(\frac{C_f^2}{V^2} + \frac{C_f}{l} \right) \frac{C_f}{V} + \frac{l_f}{l} \left(\frac{C_r^2}{V^2} - \frac{C_r}{l} \right) \frac{C_r}{V} \right] \frac{h^2 m}{K_x} \quad (53)$$

これらの式は、式(35), (36)における $(C_f/V)^n$ の項の一部に前輪荷重配分比 l_f/l が、 $(C_r/V)^n$ の項の一部に後輪荷重配分比 l_f/l が乗じられたものである ($n=1,2$)。なお、式(52), (53)それぞれの()の項の単位は共に $(\text{rad/s})^2$ であり、 $h^2 m/K_x$ の単位は $1/(\text{rad/s})^2$ と等価である。そのため、前者と後者との積は無次元である。

5. 考 察

5・1 記号解に含まれる変数の妥当性

ここでは、式(52), (53)の質的な妥当性を考察する。式(52), (53)から、ロール運動が ω_n や ζ に及ぼす影響は、① C_f/V や② C_r/V , ③ h^2m/K_x , ④ l_r/l (または l_f/l) の4つの設計変数によって支配されている。そして、この4つの設計変数によって式(15)の連成項も支配されている。したがって、式(52), (53)は必要十分な設計変数によって記述されている。一方、④ l_r/l (または l_f/l) は式(35), (36)には含まれていない。そのため、式(35), (36)よりも、式(52), (53)のほうが、より妥当な式であると思われる。

5・2 近似精度

ここでは、式(52), (53)の量的な妥当性を考察する。式(52), (53)の計算例を図3に示す。図3の計算諸元は、一般的なセダン ($H=0.55$ [m]) の近年のロール率($2.0[\text{deg}/4.98(\text{m/s}^2)]=0.00701[\text{rad}/(\text{m/s}^2)]$)およびロールアーム長 ($h=0.45$ [m]) を想定してある。また I_x は、 $I_x \doteq H^2m$ とされる近似式 (酒井, 山本, 2012) を用いて値を設定した。さらに、等価コーナリング係数は、その実測値の分布 (北浜, 酒井, 1999) から、平均的な値と思われる $C_f=100$, $C_r=200[\text{m/s}^2]$ を用いた。以上の計算諸元を用いることで、 m の大小に係らず、平均的な車両諸元が想定されていると思われる。また、図3以降に示される厳密解とは、式(15)に示される特性方程式を数値的に解いた固有振動数と減衰比である。

近似精度を比較すると、 ζ_{previous} よりも ζ のほうが有意に ζ_e により近い。また $13 < V < 25$ [m/s]の領域で ω_{previous} よりも ω_n のほうが有意に ω_e により近かく、これ以外の領域では両者に有意な差はない。したがって、式(52), (53)は、それぞれ式(35), (36)よりも近似精度が向上しているものと判断される。

次に、周波数応答を図4に、ステップ応答における時刻歴応答を図5にそれぞれ示す。ただし、 δ に対する r の応答は、 ω_n と ζ だけでは決定できないため、これらの図では、 ω_n や ζ の代わりに式(50), (51)を、 ω_{previous} や ζ_{previous} の代わりに式(33), (34)をそれぞれ用いて数値的に計算した。両図の応答においても、式(50), (51)は式(33), (34)よりも誤差が小さい。したがって、式(50), (51)の近似精度は式(33), (34)よりも向上していると思われる。

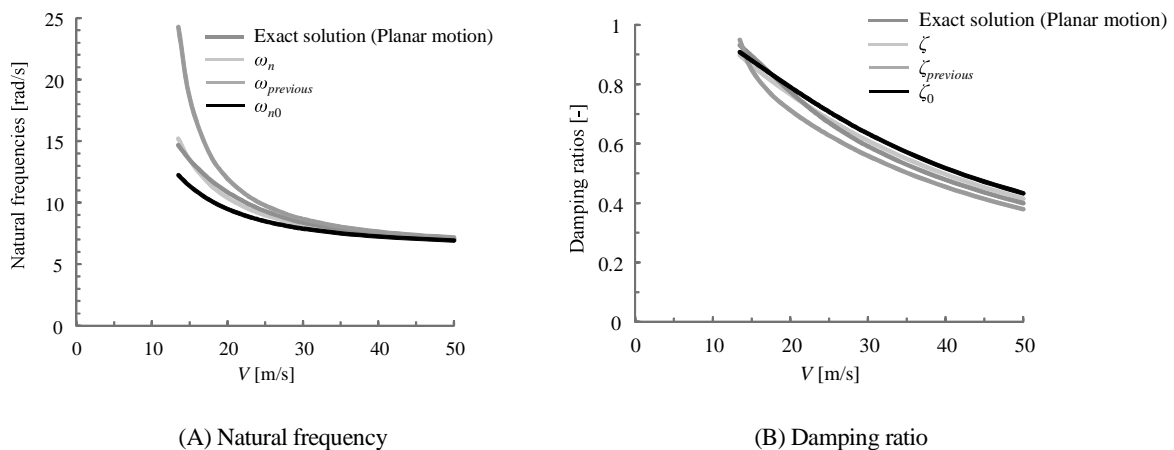


Fig. 3 Yawing natural frequency and damping ratio as a function of forward speed ($l_r/l=0.6$, $l=2.5$ [m], $C_f=100$, $C_r=200$ [(m/s²)/rad], $m=1500$ [kg], $h=0.45$ [m], $H=0.55$ [m], $I_x=H^2m$, $C_x=2000$ [Nm/(rad/s)], $K_x=96.3$ [kNm/rad])

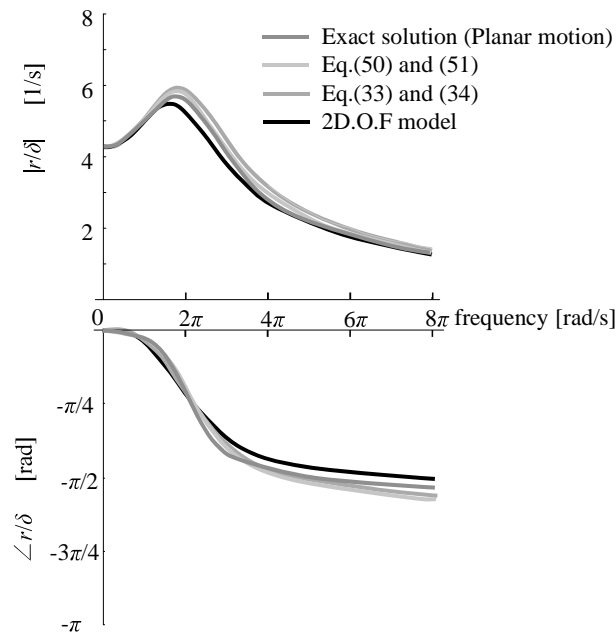


Fig. 4 Yaw velocity response in frequency domain ($l_r/l=0.6$, $l=2.5$ [m], $C_f=100$, $C_r=200$ [(m/s²)/rad], $m=1500$ [kg], $h=0.45$ [m], $H=0.55$ [m], $I_x=H^2m$, $C_x=2000$ [Nm/(rad/s)], $K_x=96.3$ [kNm/rad], $V=30$ [m/s])

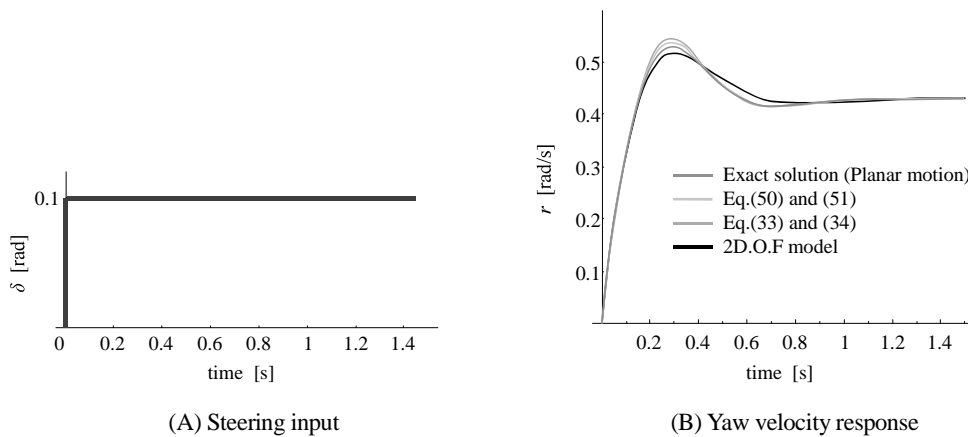


Fig. 5 Yaw velocity response in time domain ($l_r/l=0.6$, $l=2.5$ [m], $C_f=100$, $C_r=200$ [(m/s²)/rad], $m=1500$ [kg], $h=0.45$ [m], $H=0.55$ [m], $I_x=H^2m$, $C_x=2000$ [Nm/(rad/s)], $K_x=96.3$ [kNm/rad], $V=30$ [m/s])

5・3 近似解の適用範囲

まず、パラメータ変化に対する近似精度変化の大局を見通しやすいと思われる図示法について述べる。 C_f や C_r, K_x, I_x, I_z の値が変化すると、 ω_e も変化するが、 ω_e がどのような値を取ろうとも、 ω_{xCG}/ω_{n0} と ω_e/ω_{n0} との関係はほぼ一定であるとされる(山本, 藤岡, 2015)。ここで ω_e は、ヨー固有振動数の厳密解である。また ω_{xCG} は、平面運動と連成しないときの重心まわりロールモードの固有振動数であり

$$\omega_{xCG} = \sqrt{\frac{K_x}{I_x}} \tag{54}$$

と表される。したがって、横軸 ω_{xCG}/ω_{n0} 、縦軸 ω_e/ω_{n0} の図を用いると、 K_x だけを変化させて ω_e を計算すれば、 C_f や C_r, I_x, I_z も変化させたことにもなるので、大局を見通しやすくなるはずである。そこで、この図示法を用いて、適用範囲を考察する。

K_x を変化させて、 ω_n/ω_{n0} や ω_e/ω_{n0} 、 $\omega_{previous}/\omega_{n0}$ をそれぞれ計算した結果を図 6 (A) に示す。また、 K_x を変化させて、 $\zeta_{previous}/\zeta_0$ や ζ_e/ζ_0 、 ζ/ζ_0 をそれぞれ計算した結果を図 6(B) に示す。ここで ζ_e は数値的に求めたヨー減衰比の厳密解である。

図 6(B) において ζ_e/ζ_0 は $\omega_{xCG}/\omega_{n0} \approx 1.5$ 付近において極小値をとるのに対して、 ζ/ζ_0 は V に対して単調増加するので、式(52)は、 $\omega_{xCG}/\omega_{n0} < 1.5$ の領域の厳密解の性質を表せていない。したがって、式(52)、(53)は $\omega_{xCG}/\omega_{n0} < 1.5$ の領域には適用できないと判断される。また $\omega_{xCG}/\omega_{n0} > 1.5$ の領域では、 ω_{xCG}/ω_{n0} が大きいほど、近似精度が高い。なお、図 3 の計算諸元では、 $V=30$ [m/s] において $\omega_{xCG}/\omega_{n0}=1.85$ である。

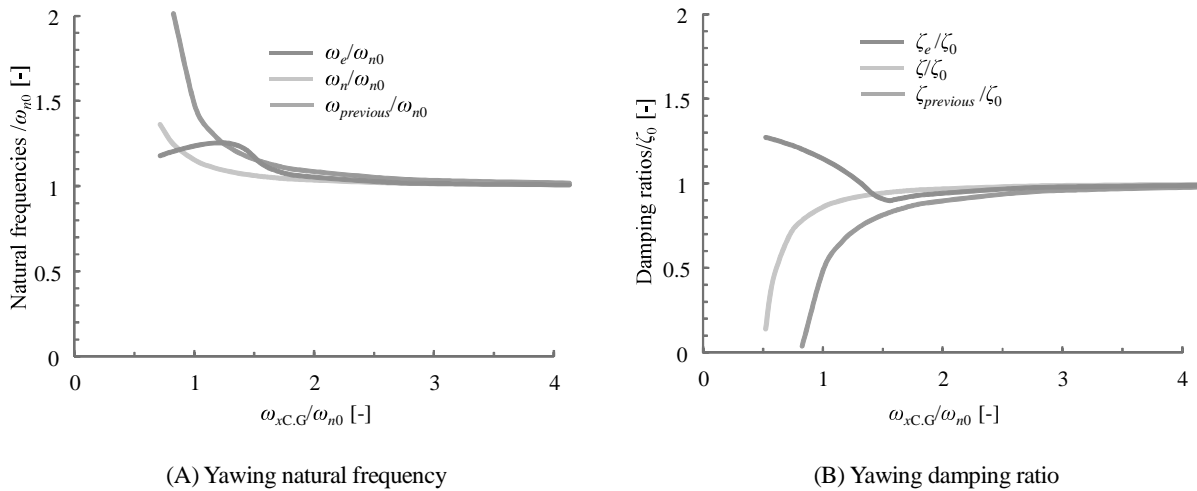


Fig.6 Prediction accuracy as a function of natural frequencies ratio ($l_r/l=0.6$, $l=2.5$ [m], $C_f=100$, $C_r=200$ [(m/s²)/rad], $m=1500$ [kg], $h=0.45$ [m], $H=0.55$ [m], $I_x=h^2m$, $C_x=2000$ [Nm/(rad/s)], $V=30$ [m/s])

5・4 l_r/l の影響

式(52)、(53)には、新たに前輪荷重配分比 l_r/l が含まれるようになった。そこで図 3 の諸元において、 l_r/l だけを変化させたときの ω_e と ζ_e を計算した結果を図 7、8 にそれぞれ示す。 l_r/l の分布は 0.353~0.673 との指摘がある(酒井, 2016) ので、これらの数字を丸めた 0.3~0.7 を l_r/l の変化範囲とした。

図 7 から、 l_r/l を増加させると、 ω_e が減少する。その理由は、式(52)によって説明できる。すなわち、アンダステアの車両ならば、式(13)から $C_r > C_f$ である。したがって C_r の係数である l_r/l が大きいほど、すなわち l_r/l が小さいほど、式(52)の根号内は大きくなる。また、 l_r/l や l_f/l の係数は V に反比例するので、 V が大きいほど、図 7 の傾きは小さくなる。

次に ζ について述べる。まず ζ_{ω_n} に l_r/l が影響しない条件を求める。式(53)に $l_f/l=1-l_r/l$ を代入した上で、 l_r/l で微分すると

$$\frac{\partial \zeta_{\omega_n}}{\partial (l_r/l)} = \frac{2}{l} \left[\left(\frac{C_f}{V} \right)^2 + \left(\frac{C_r}{V} \right)^2 \right] \frac{h^2 m}{K_x} + \frac{3}{V^4} \left[- \left(1 + \frac{V^2}{l C_f} \right) C_f^3 + \left(1 - \frac{V^2}{l C_r} \right) C_r^3 \right] \frac{h^2 m}{K_x} \quad (55)$$

となる。この式の値が 0 になる正の V を $V_{\zeta_{\omega_n}}$ と記すと、 $V_{\zeta_{\omega_n}}$ は

$$V_{\zeta_{\omega n}} = \sqrt{3l \frac{C_r^3 - C_f^3}{C_f^2 + C_r^2}} \tag{56}$$

となる。したがって $V_{\zeta_{\omega n}}$ では、 $\zeta_{\omega n}$ は l/l に影響されないので、 l/l の増加による ω_n の減少に反比例して ζ は増加する。また $V > V_{\zeta_{\omega n}}$ のとき、式(53)の l/l の係数よりも l/l の係数のほうが大きくなるため、 l/l が増加するほど $\zeta_{\omega n}$ も増加し、かつ ω_n は減少するので、 ζ は増加する。以上をまとめると、 $V \geq V_{\zeta_{\omega n}}$ は、 l/l が増加すると ζ も増加するための十分条件である。式(56)に図3の諸元 (V を除く) を代入すると、 $V_{\zeta_{\omega n}} = 17.2[\text{m/s}]$ である。なお、 l/l が増加すると ζ が増加する車速を、同計算諸元と式(52)~(53)とを用いて数値計算したところ $V \geq 12.7[\text{m/s}]$ であった。

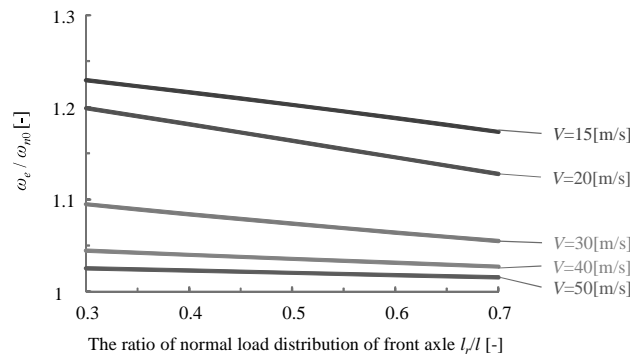


Fig. 7 Yawing natural frequency as a function of the ratio of normal load distribution of front axle ($l=2.5[\text{m}]$, $C_f=100$, $C_r=200[(\text{m/s}^2)/\text{rad}]$, $m=1500[\text{kg}]$, $h=0.45[\text{m}]$, $H=0.55[\text{m}]$, $I_x=H^2m$, $C_x=2000[\text{Nm}/(\text{rad/s})]$, $K_x=96.3[\text{kNm}/\text{rad}]$)

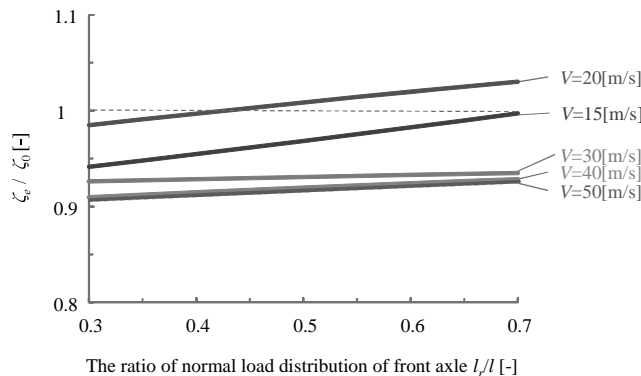


Fig. 8 Yawing damping ratio as a function of the ratio of normal load distribution of front axle ($l=2.5[\text{m}]$, $C_f=100$, $C_r=200[(\text{m/s}^2)/\text{rad}]$, $m=1500[\text{kg}]$, $h=0.45[\text{m}]$, $H=0.55[\text{m}]$, $I_x=H^2m$, $C_x=2000[\text{Nm}/(\text{rad/s})]$, $K_x=96.3[\text{kNm}/\text{rad}]$)

5・5 ロール固有振動数がヨ一固有振動数や減衰比に及ぼす影響

5.1 節で述べたように、ロール運動が ω_n や ζ に及ぼす影響は、① C_f/V や ② C_r/V , ③ h^2m/K_x , ④ l/l (または l/l) の4つの設計変数に支配される。ここで、ロール軸まわりのロール固有振動数 ω_{xRA} は

$$\omega_{xRA} = \sqrt{\frac{K_x}{I_x + h^2m}} \tag{57}$$

と表される (酒井, 20015c) ので、この式と式(54)とから、

$$\frac{h^2 m}{K_x} = \frac{1}{\omega_{xRA}^2} - \frac{1}{\omega_{xC.G}^2} \quad (58)$$

となる。したがって、おおまかに言えば、 ω_{xRA} と $\omega_{xC.G}$ との差が大きいほど、③ $h^2 m/K_x$ が大きくなりやすいから、ロール運動がヨー固有振動数やヨー減衰比に及ぼす影響も大きくなりがちであると思われる。

6. 結 言

本論文をまとめると、次のようになる。

- 1) ロール運動を考慮したヨー固有振動数と減衰比の従来の近似式の導出法に、近年指摘された前後輪のコーナリングフォースの位相差を加味し、従来の近似式を修正した。
 - 2) その結果、従来の式には含まれていなかった前輪荷重配分比が、ヨー固有振動数と減衰比に含まれるようになったため、特性方程式の連成項を支配する設計変数とヨー固有振動数や減衰比を支配する設計変数とが完全に一致するようになった。また、数値的にも、特に減衰比の式において近似精度が従来の式よりもさらに向上した。したがって、質量も従来の近似式よりも、より妥当になったと思われる。
 - 3) 前輪荷重配分比を増加させると、ヨー固有振動数は減少する。また、ある車速よりも高速側では、ヨー減衰比も増加する。これらのことが式によって見通せるようになった。
 - 4) 今回導出したヨー固有振動数と減衰比の近似式は、「重心まわりロール固有振動数/ヨー固有振動数（ロール非考慮）」の値が1.5未満の場合には適用できない。
 - 5) ロール軸まわりのロール固有振動数と重心まわりのロール固有振動数との差が大きいほど、ロール運動がヨー固有振動数やヨー減衰比に及ぼす影響が大きい傾向にあると思われる。
- 本論文の知見が、より高品質な操舵過渡応答の性能設計に役立てば幸いである。

謝 辞

近年の車両の諸元の相場値を、住友ゴム工業(株)永井潤一氏にご教示頂いた。お礼を申し上げます。

文 献

- 藤岡健彦, 山本真規, ばね下座標系による, 車体のロール運動を考慮に入れた, 自動車の運動方程式 - 「シーゲルの罫」を解く-, 自動車技術会学術講演会前刷集, No.91-10 (2010), pp.13-18.
- 入江南海雄, 芝端康二, リヤサスペンション特性が操縦安定に及ぼす影響, 自動車技術, Vol.39, No.3(1985), pp.275-285.
- 景山克三, 景山一郎, 自動車力学(2001), pp.167-168, 理工図書.
- 北浜謙一, 酒井英樹, 正規化したコーナリングパワーを用いた自動車の操舵応答性能の同定法, 機械学会論文集 C 編, Vol.65, No.633(1999), pp.1960-1965.
- 酒井英樹, 動的操舵による横滑り特性の理論的研究—力=モーメント法の周波数領域への拡張—, 自動車技術会論文集, Vol.29, No.2(1998), pp.133-138.
- 酒井英樹, 自動車の平面運動におけるヨー角速度進み時定数についての力学的考察, 機械学会論文集 C 編, Vol.79, No.801(2013a), pp.1681-1692.
- 酒井英樹, フォースコントロールにおける安定性とその指標, 自動車技術会論文集, Vol.44, No.2(2013b), pp.441-448.
- 酒井英樹, 自動車の内部運動モデル (ヨー共振周波数現象についての理論的考察), 日本機械学会 2015 年度年次大会予稿集, DVD(2015a), G1800301.

- 酒井英樹, フォースコントロール下の固有振動数についての一考察, 機械学会論文集, Vol.81, No.824(2015b), DOI : 10.1299/transjsme.14-00663.
- 酒井英樹, ロール固有振動数についての一考察, 自動車技術会論文集, Vol.46, No.2(2015c), pp.385-391.
- 酒井英樹, 制駆動中の旋回限界特性についての基礎的考察, 日本機械学会論文集, Vol.82, No.839(2016), DOI: 10.1299/transjsme.16-00019.
- 酒井英樹, 佐藤幸治, タイヤ動特性を考慮した自動車モデル, 機械学会論文集 C 編, Vol.63, No.608(1997), pp.1179-1183.
- 酒井英樹, 佐藤幸治, ロール運動を考慮した自動車の平面運動モデル, 機械学会論文集 C 編, Vol.65, No.633(1999), pp.1954-1959.
- 酒井英樹, 山本 泰, 過渡的な旋回感覚を強調する減衰力制御—カルマンフィルタを用いたロール・ピッチ同期化制御—, 自動車技術会論文集, Vol.45, No.3(2012), pp.709-716.
- 山本真規, 藤岡健彦, 車両パラメータのロール・平面連成運動への影響およびパラメータ間の相互関係, 自動車技術会論文集, Vol.46, No.5(2015), pp.911-917.

References

- Fujioka, T. and Yamamoto, M., Equations of motion of a vehicle, including roll motion by use of unsprung-mass coordinate systems -in order to release so-called Segel's trap of accompanying roll motion-, Proceedings of 2010 JSAE Annual congress(Spring)(2010), pp.13-18 (in Japanese).
- Irie, N. and Shibahata, Y., Improvement of vehicle controllability and stability by rear suspension, Journal of Society of Automotive Engineers of Japan, Vol.39, No.3(1985), pp.275-285 (in Japanese).
- Kageyama, K. and Kageyama, I., Jidousha rikigaku (2001), pp.167-168, Rikohtosho (in Japanese).
- Kitahama, K. and Sakai, H., Identification method of automobile response to steering input using normalized cornering stiffness, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, Vol.65, No. 633(1999), pp.1960-1965 (in Japanese).
- Sakai, H., Theoretical study on skid tendency to steering input -Extension of the force and moment method into frequency domain-, Transactions of Society of Automotive Engineers of Japan, Vol.29, No.2 (1998), pp.133-138 (in Japanese).
- Sakai, H., A physical interpretation of lead time constant of yaw angular velocity in planar motion of automobile, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, Vol.79, No. 801(2013a), pp.1681-1692 (in Japanese).
- Sakai, H., Stability under force control and its index, Transactions of Society of Automotive Engineers of Japan, Vol.44, No.2 (2013b), pp.441-448 (in Japanese).
- Sakai, H., Inner model of automobile (Theoretical consideration to yaw resonance phenomenon), Proceedings of Mechanical Engineering Congress, 2015 Japan, DVD (2015a), G1800301 (in Japanese).
- Sakai, H., A consideration to natural frequencies under force control, Transactions of the JSME (in Japanese), Vol.81, No. 824(2015b), DOI : 10.1299/transjsme.14-00663.
- Sakai, H., A Study on change of roll natural frequency, Transactions of Society of Automotive Engineers of Japan, Vol.46, No.2 (2015c), pp.385-391 (in Japanese).
- Sakai, H., Fundamental study of cornering limit characteristics during braking and driving, Transactions of the JSME (in Japanese), Vol.82, No. 839(2016), DOI: 10.1299/transjsme.16-00019.
- Sakai, H. and Satoh, Y., Automobile model taking into account of a tire dynamic property, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, Vol.63, No. 608(1997), pp.1179-1183 (in Japanese).
- Sakai, H. and Satoh, Y., Automobile plane-motion model including roll motion, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, Vol.65, No. 633(1999), pp.1954-1959 (in Japanese).
- Sakai, H. and Yamamoto, Y., Damping control to enhance transient cornering feel - Control to synchronize pitching with rolling utilized Kalman filter -, Transactions of Society of Automotive Engineers of Japan, Vol.43, No.3 (2012), pp.709-716 (in Japanese).
- Yamamoto, M. and Fujioka, T., Effects of vehicle parameters and their interactions on coupled dynamics in roll and plane motions, Transactions of Society of Automotive Engineers of Japan, Vol.46, No.5 (2015), pp.911-917 (in Japanese).