

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 8 日現在

機関番号：34419

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2013～2015

課題番号：25400003

研究課題名(和文)有限群と代数の表現論のカテゴリー論的研究

研究課題名(英文)Categorical study of representation theory of finite groups and algebras

研究代表者

小田 文仁 (ODA, Fumihito)

近畿大学・理工学部・准教授

研究者番号：00332007

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：対称群のヤング部分群に関する一般バーンサイド環のユニット元と被約レフシェッツ加群，トム・ディエック準同型との間に関係があることを示した。より詳しく述べるならば、我々は、対称群のヤング部分群に関する一般バーンサイド環の非自明な単元をトム・ディエック準同型の言葉を用いて特徴付けたということになる。結果として、その環の単元群はトム・ディエック準同型による準同型像に含まれるという事実を得た。その結果に関する論文を学術雑誌に投稿した。

二面体群のパラボリック部分群に関する一般バーンサイド環の単元群の階数が2であることを証明した。その結果に関する論文を学術雑誌に投稿した。

研究成果の概要(英文)：We showed that there is a relation between the unit element of the generalized Burnside ring of a symmetric group relative to the Young subgroups, the reduced Lefschetz module and the tom Dieck homomorphism. More precisely, we characterized a non-identity unit of the generalized Burnside ring of a symmetric group relative to the Young subgroups in terms of the tom Dieck homomorphism. Consequently, we have shown that the unit group of the ring is included in the image by the tom Dieck homomorphism. We have submitted a paper of the result to a journal of mathematics.

We showed that the rank of the unit group of the generalized Burnside ring of a dihedral group relative to the parabolic subgroups is two. We have submitted a paper of the result to a journal of mathematics.

研究分野：有限群の表現論

キーワード：バイセット関手 バーンサイド環 一般バーンサイド環 対称群 二面体群 単元群

1. 研究開始当初の背景

マッキー関手、グリーン関手、丹原関手等、有限群の同変理論における研究対象で最も基本的であり重要な研究対象のひとつに、有限群 G のバーンサイド環 (G) がある ([Bouc-Biset], [Bouc], [Dr86], [GP00] 参照)。1960年代に、L. Solomon が有限群の誘導定理に関連する事実を証明する際に導入した ([So67]参照)。20世紀初頭のバーンサイドによる「有限群論」で紹介されたテーブル・オブ・マークスに由来する ([Bu1910])。それは、有限 G -集合の圏の直和に関するグロタンディーク群に、直積を線形に拡張することにより定まる積を与えた可換環として定義される。以下のように、有限群のあるクラスの特徴づけを (G) の言葉を用いて与えられるという Dress の定理はこの分野の研究の最も顕著な結果と言えるであろう。

定理 (Dress)

G を有限群とする。このとき G が可解群であるための必要十分条件は、 (G) の単位元が原始的であることである。

(G) の係数を有理数体 Q に拡大した環を $Q(G)$ と書く。 $Q(G)$ のべき等元のうち、2倍して (G) に含まれるもの全体の集合と (G) の単元群との間には全単射が存在する。従って上の定理を用いることにより、 (G) のユニット群の構造は G の可解性と関連があることがわかる。 G の可解性に関連した様々な研究結果がある。特に「 G の位数が奇数なら可解である」といういわゆるファイト・トンプソンの定理と「 (G) のユニット群の位数が2である」という命題が同値であることがトム・ディエックにより指摘されたことから、ユニット群の重要性は飛躍的に高まった ([to79])。

(G) は、有理整数環の直積に成分ごとの積で与えられる環 (ゴースト環) への単射環準同型を用いて実現可能であるから、その単元群は基本可換 2-群であることがわかる ([Bo07], [BP07], [Ma82], [to79], [Yo90a]参照)。計算機を用いることで、小さな有限群 G の (G) の単元群の基本可換 2-群の階数は計算できる ([BO07]参照)。しかし、その構造を究明するための一般論が十分には存在していなかった。そこで、 (G) の単元群の究明のために、その部分環で単元群の構造が比較的容易であるようなものの決定を行うことには十分意味があるように思われた。

バーンサイドが考案したテーブル・オブ・マークスと呼ばれる正方行列は、のちに、有限 G -集合の圏、既約な対象の間の射の集合の要素の個数として理解できることがわかってきた。1990年に吉田はマッキー関手や

グリーン関手の一つの一般化を目指し、一般バーンサイド環を定義し、その性質を研究した ([Yo90b]参照)。 G を有限群とする。 G の部分群の族 X は、条件「 H が X の元ならば gHg^{-1} も X の元である」を満たすものとする。さらに条件 (I) 「 H と K が X の元ならば H と K の共通部分も X の元である。」

と

条件 (G) 「 X は G を含む。」

を満たすと仮定する。このとき、有限 G -集合 S は、その任意の元の安定部分群がすべて X の元であるならば、 (G, X) -集合と呼ばれる。 (G, X) -集合と G -写像からなる有限 G -集合の圏の部分圏を (G, X) -集合の圏と呼ぶ。 (G, X) -集合の圏には余積が存在する。 (G, X) -集合の圏の余積で得られるグロタンディーク群に、マーク準同型を用いて定義される積を用いて、一般バーンサイド環 (G, X) が定まる。条件 (I) と (G) により (G, X) は (G) の部分環であることが示される。一般に、 (G, X) は (G) よりも小さな階数となるため、その取り扱いも容易になることが期待出来る。 (G) の構造を詳細に調べる際に有益な環である。一般バーンサイド環に関するいくつかの研究結果がある ([BBTH92], [Ta06], [Od08], [OS09], [OS11]参照)。しかし、一般バーンサイド環の単元群に関する研究結果は、自明な場合 (自己正規化部分群の族に関するもの ([OS09], [OS11]参照)) を除き、一つも存在していなかった。そこで、一般バーンサイド環の単元群に関する一般論を展開してゆくために、まず、典型的な例に対して、その単元群を究明することが急務であるように思われた。特に、 G を対称群、 X をそのヤング部分群とした場合の (G, X) は、 G の指標環 $R(G)$ と環同型であることが知られていたため ([Dr86], [Yo90b]参照)、 $R(G)$ の単元群の構造決定の問題 ([Ya96]参照) に帰着できることが想起された。

2. 研究の目的

有限群 G のバーンサイド環 (G) の単元群の構造の研究は、ほとんど一般論が存在しない分野のひとつであると考えられる。そこで (G) の単元群の一般論を展開するために、対称群の場合の (G) の構造の究明を行う。そのために、 G が n 次対称群、 X が G のヤング部分群全体としたときの一般バーンサイド環 (G, X) の単元群を決定する問題を解決する。また、その他の一般バーンサイド環の単元群の構造を明らかにすること。 (G, X) は (G) の部分環であることから、バーンサイドマッキー関手、さらにはバーンサイド丹原関手、バーンサイドバイセット関手 ([Bouc-Biset]参照) の1点 G -集合の像とみなすことで、乗法的誘導写像等、圏論的研究手法を応用する。

3 . 研究の方法

上述のように、 G が n 次対称群、 X が G のヤング部分群全体としたときの一般バーンサイド環 (G, X) は、 G の指標環と同型であることが知られている。そこで、この同型を利用して、目的の単元群の構造を明らかにする。他の場合については、一般にはこのような都合の良い環同型が存在しないため、様々な G と X について、そのマーク行列を用いて直接単元を計算し、一般の場合を類推することで、目的の群の構造を明らかにする。

4 . 研究成果

G が n 次対称群、 X が G のヤング部分群全体としたときの一般バーンサイド環 (G, X) の単元群はクライン 4-群であることを得た ([I015], [OTY]参照)。さらに、その単元群はトム・ディエック準同型の像の部分群であることを得た。

【参考文献】

[BBTH92] Bergeron, F.; Bergeron, N.; Howlett, R.B.; Taylor, D.E.: A Decomposition of the Descent Algebra of a Finite Coxeter Group, *J. Algebraic Combinatorics* **1** (1992) 23-44.

[Bouc-Biset] Bouc, S.: Biset functors for finite groups, *Lecture Notes in Mathematics*, **1990**, Springer-Verlag, Berlin (2010).

[Bouc] Bouc, S.: Green functors and G -sets, *Lecture Notes in Mathematics*, **1671**, Springer-Verlag, Berlin (1997).

[Bo07] Bouc, S.: The functor of units of Burnside rings for p -groups, *Comm. Math. Helv.* **82** (2007), 583-615.

[BP07] Boltje, R.; Pfeiffer, G.: An algorithm for the unit group of the Burnside ring of a finite group, In *Groups St. Andrews 2005. Vol. 1*. Cambridge: Cambridge Univ. Press (2007).

[Bu1910] Burnside, W.: *Theory of groups of finite order*, 1910.

[Dr86] Dress, A.W.M.: Congruence relations characterizing the representation ring of the symmetric group, *J. Algebra* **101**(1986) no. 1, 350-364.

[GP00] Geck, M.; Pfeiffer, G.: *Characters of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke algebras*, London Mathematical Society Monographs. New Series, **21**, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.

[I015] Idei, H.; Oda, F.: The table of marks, the Kostka matrix, and the character table of the symmetric group, *J. Algebra* **429** (2015), 318--323.

[Ma82] Matsuda, T.: On the unit groups of Burnside rings, *Japan. J. Math. (N. S.)*, **8** (1982), 71-93.

[Od08] Oda, F.: The generalized Burnside ring with respect to p -centric subgroups, *J. Algebra* **320** (2008), 3726--3732.

[OS09] Oda, F.; Sawabe, M.: A collection of subgroups for the generalized Burnside ring, *Adv. Math.* **222** (2009), 307--317.

[OS11] Oda, F.; Sawabe, M.: The generalized Burnside rings with respect to a collection of self-normalizing subgroups, *J. Algebra* **334** (2011), 219-231.

[OTY] Oda, F.; Takegahara, Y.; Yoshida, T.: The units of a partial Burnside ring relative to the Young subgroups of a symmetric group, to appear.

[So67] L. Solomon, The Burnside algebra of a finite group, *J. Combinatorial Theory* **2** (1967), 603-615.

[Ta06] Tambara, D.: A partial Burnside ring of $GL(n, q)$ relative to line stabilizers, *J. Algebra* **296** no. 1, (2006), 301-322.

[to79] tom Dieck, T.: *Transformation Groups and Representation Theory*, *Lecture Notes in Mathematics*, **766**, Springer, Berlin, 1979.

[Ya96] Yamauchi, K., On the Structure of the Character Ring of a Finite Group, PhD thesis, Kyushu University (1996).

[Yo90a] Yoshida, T.: On the unit groups of Burnside rings. *J. Math. Soc. Japan* **42** (1990) no. 1, 31--64.

[Yo90b] Yoshida, T.: The generalized Burnside ring of a finite group, *Hokkaido Math. J.* **19** (1990), 509-574.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計7件)

出井北斗、小田文仁、The table of marks, the Kostka matrix, and the character table of the symmetric group, 査読有、Journal of Algebra, 429(1), pp. 318-323, May 2015.

<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021869315000514>

小田文仁、中岡宏行、有限群に関連した圏論的構成、査読有、数学、67(1) pp. 55-81, 2015年1月.

出井北斗、小田文仁、The table of marks, the Kostka matrix, and the character table of the symmetric group, 査読無, 京都大学数理解析研究所講究録 1965, pp. 1-4, 2015年.

小田文仁、竹ヶ原裕元、吉田知行、対称群の一般バーンサイド環のユニット元, 査読無, 第60回代数学シンポジウム報告集, pp. 259-264, 2015年.

小田文仁、竹ヶ原裕元、吉田知行、The units of a partial Burnside ring relative to the Young subgroups of a symmetric group, 査読無, 第32回代数的組合せ論シンポジウム報告集, pp. 66-71, 2015年.

小田文仁、竹ヶ原裕元、吉田知行、グラフと有限群の再構成予想, 査読無, 第32回代数的組合せ論シンポジウム報告集, pp. 66-71, 2015年.

小田文仁、On multiplicative induction, 査読無, 京都大学数理解析研究所講究録 1872, pp. 151-157, 2014年.

[学会発表](計5件)

バーンサイド環の乗法的誘導写像、第25回有限群論草津セミナー、草津セミナーハウス、群馬県草津町, 2013年8月4日.

The generalized Burnside ring and the character ring of the symmetric group, 有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的組合せ論の研究(RIMS研究集会), 京都大学数理解析研究所, 京都府京都市, 2014年12月1日.

対称群のマーク行列, コストカ行列, 指標表, 2015日本数学会年会, 明治大学駿河台キャンパス, 東京都千代田区, 2015

年3月23日.

The units of a partial Burnside ring relative to the Young subgroups of a symmetric group, 第32回代数的組合せ論シンポジウム, 石川県文教会館 401・402(大会議室), 石川県金沢市, 2015年6月24日.

対称群の一般バーンサイド環のユニット元, 第60回代数学シンポジウム, 静岡大学, 静岡県静岡市, 2015年9月3日.

[図書](計0件)

[産業財産権]

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究代表者

小田 文仁 (ODA, Fumihito)

近畿大学・理工学・准教授

研究者番号: 00332007