

# フォースコントロール応答性に関する考察\*

-基礎的考察-

酒井 英樹<sup>1)</sup>

## A Study on Vehicle Response under Force Control -A Fundamental Study-

Hideki Sakai

To enable to design vehicle response under force control, this paper aims to obtain symbolic parameters dominating vehicle response. Factoring the characteristic equation under force control, which is described by a quartic equation of Laplace operator  $s$ , under some assumptions, this paper formulates the exact solutions. Considering these formulas, this paper obtains the symbolic parameters dominating vehicle response.

**KEY WORDS:** vehicle dynamics, steering system, driving stability, free control, force control (B1)

### 1. はじめに

#### 1.1. 操舵方式と車両運動理論との関係

##### (1) 操舵方式

ドライバは、トルクと角度の二つの情報を用いてステアリングホイールの運動を規定（以下「操舵」）するとともに、トルクと角度の二つを車両からの出力としても感じ取るので、ドライバの操舵は遠隔操作に用いられるマニピュレータに代表されるバイラテラル系として考えられている<sup>(1)(2)</sup>。すなわち操舵系のトルクや角度はドライバから車両に対する入力であるとともに、（ヨー角速度などと同様に）車両からドライバへの出力でもある。しかしドライバの操舵をバイラテラル系として扱えば、車両運動が複雑になる。そこでトルクだけで操舵をするものとみなした「フォースコントロール」(force control)と、角度だけで操舵するものとみなした「ポジションコントロール」(position control)の二種類の操舵方式が定義されている<sup>(3)</sup>。

##### (2) 運動性能についての研究動向

操舵法にはこの二種類があるものの、従来の車両運動理論やその研究の対象のほとんどがポジションコントロールである。例えば文献<sup>(4)</sup>の第3章「車両運動の基礎」では、「車両運動」をポジションコントロールに限定しており、フォースコントロールは5.3.2項において言及されているだけである。車両運動の性能設計についてもこれと同様である。すなわちポジションコントロールでは、一定半径の定常円旋回時の方向安定性を表すスタビリティファクタ $A^{(4)}$ や、固有振動数 $\omega_n$ 等の応答パラメータが定式化され、それらを用いたサスペン

ション設計<sup>(5)</sup>が行われている。一方フォースコントロールでは、ある特定の前輪荷重配分や慣性モーメントに限定した安定条件が定式化されていた<sup>(6)</sup>だけであつたため、操縦安定性についての性能設計を行いくつかなかった。

##### (3) フォースコントロールにおける方向安定性

安定性についての性能設計をおこないやすくするために、著者はフォースコントロール下におけるスタビリティファクタ $B$ を定義した。 $(B$ は、2.3節で述べるようにフォースコントロール下における安定性を示す無次元数である。操舵系が摩擦や減衰を有しない場合、図1に示すように $B < 2$ の領域では不安定になる車速が存在するが、 $B \geq 2$ の領域ではあらゆる車速域において安定である。)

その結果、 $B < 2$ の場合においては、 $B$ を用いることで、方向安定性の性能設計指針が得られたと思われる。しかし $B > 2$ の場合は安定性の観点からは性能設計が行いくつないため、操縦安定性能の性能設計のための指標として、固有振動数や減衰比などの応答パラメータが有効であるとの結論を得た<sup>(7)</sup>。

そこで著者は、フォールコントロールにおける操舵応答の設計の指針を得るために、 $B$ を変化させることにより、根軌跡の性質についての見通しを得た<sup>(8)</sup>。

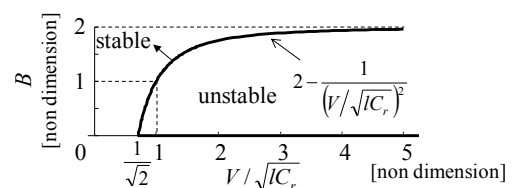


Fig.1 Unstable area with non-dimensional expression<sup>(7)</sup>

\*2011年5月18日自動車技術会春季学術講演会において発表。

2013年6月6日受理。

1) 近畿大学工学部 (739-2116 東広島市高屋うめの辺1)

1.2. 研究目的

しかし  $B$  は方向安定条件を記述するために導出された指標であり、応答性の指標ではない。したがって応答性に関する簡単な指標がわかれば、より簡単にフォースコントロール下の車両応答を性能設計できるはずである。

そこで本論文では、応答性を支配するパラメータを明らかにするために、固有振動数や減衰比などの応答パラメータについての定式化を行う。

しかしフォースコントロールにおける車両運動の特性方程式はラプラス演算子  $s$  の4次式になるため、特性方程式の解を求めることは容易ではない。

そこで求解について二つの方法が想定される。一つは、モデルを簡略化して厳密解を求める方法であり、もう一つは、モデルを簡略化せず近似解を求める方法である。前者の長所は解が正確であることであるが、その短所は考慮できるモデルのパラメータが少ないことである。この裏返しが後者の長所短所である。両者にはそれぞれ長所と短所とがあるため、互いに補完しあう関係にあるので、両方の方法を併用することが有効であると思われる。そこで文献(7)(8)の続報として、一般的な条件における固有振動数や減衰比の定式化を、数報に分けて段階的におこなう予定である。

まず本報では、前者の立場として、ある条件下における限定的な解を求める。その条件として、本論文が注目する現象は、「操舵系減衰が0かつ  $A=0$  かつ  $B \geq 2$  の条件下において、2根の実部が  $B$  に関わらず常に一定で、かつその値は互いに等しいように見えること」である。なぜなら、もしもこの観察が正しければ、2根の実部は簡単な項で表されるため、一般的な場合に比べると解が得やすいと思われるからである。

1.3. 本論文の構成

本論文は、まず第2章において、特性方程式の因数分解のための条件整備として、車両のモデル化と仮定について述べる。次に第3章では、その条件に基づいて特性方程式の因数分解を行う。最後に第4章では、因数分解された特性方程式について考察をおこない、応答性に関するパラメータを導出し、さらに数値解析では発見できなかった2根の関係についての指摘をおこなう。

2. モデル

2.1. 車両モデル

(1) 一般的なポジションコントロールモデル

フォースコントロール下における運動方程式の基礎となるポジションコントロール下の一般的なモデルは、図1に示す線形2自由度モデルである。本モデルにおいて本論文では、ステアリングギヤ比を1として扱う。その結果このモデルの運動方程式は次のようになる<sup>(4)</sup>。

$$mV(r + \dot{\beta}) = F_f + F_r \tag{1}$$

$$I_z \dot{r} = l_f F_f - l_r F_r \tag{2}$$

$$F_f = -2K_f(\beta_f - \delta) \tag{3}$$

$$F_r = -2K_r\beta_r \tag{4}$$

$$\beta_f = \beta + \frac{l_f}{V}r \tag{5}$$

$$\beta_r = \beta - \frac{l_r}{V}r \tag{6}$$

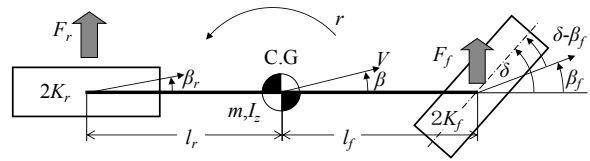


Fig. 2 Vehicle model

(2) 操舵系モデル

フォースコントロールでは、図2に示す操舵系モデルを図1のモデルの前輪に追加する<sup>(6)</sup>。ここで操舵系の慣性モーメントはステアリングホイールだけに存在するものと仮定し、さらにステアリングホイールの回転軸は水平面内にあるものとする。

ここで操舵トルクを  $T_h$ 、操舵系の慣性モーメントを  $I_h$ 、タイヤのニューマチックトレールおよび操舵系のトレール長の和を  $\xi$  ( $\xi > 0$ ) とすれば、操舵系の運動方程式は次のように記述できる。

$$I_h \ddot{\delta} = -\xi F_f + T_h \tag{7}$$

さらに操舵系単独の固有振動数  $\omega_s$  を

$$\omega_s^2 = \frac{2\xi K_f}{I_h} \tag{8}$$

として定義すれば、式(7)は

$$\ddot{\delta} = -\omega_s^2(\delta - \beta_f) + \omega_s^2 T_{hN} \tag{9}$$

と変形できる<sup>(6)</sup>。ここで  $T_{hN}$  は無次元化したトルクであり、

$$T_{hN} \equiv \frac{T_h}{2K_f \xi}$$

として定義される。

式(9)における項  $-\beta_f$  は操舵系と車両との連成項である<sup>(9)</sup>。式(1)~(6)および式(8)(9)がフォースコントロール下の運動方程式である。

なおステアリングホイールがドライバーの手や腕によって保持されることによって、 $\omega_s$  が増加する<sup>(4)</sup>が、この影響は本論文では考慮しない。また本論文では操舵系の回転剛性は無限大であるとして扱う。さらにパワーステアリングを有する操舵系においては、パワーアシストの影響によって操舵系の剛

性が変化<sup>(10)</sup>しないものとして扱う。

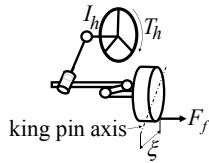


Fig. 3 Steering-system model

2.2. モデル表記の簡略化

フォースコントロールの運動方程式は、操舵系の運動方程式の分だけ、ポジションコントロールの運動方程式よりも複雑になる。そこで運動方程式を簡潔化するために、本節では車両のパラメータを簡略化する。

(1) ヨー慣性モーメント

ヨー慣性モーメント  $I_z = k^2 m$  なる関係を満たす慣動半径を  $k$  と記すと、 $k^2/l_r = 1$  のときに、舵角に対する  $r$  の応答が振動的になる车速が最も高くなる<sup>(4)</sup>。従って車両応答の面では、 $I_z$  よりも  $k^2/l_r$  なる無次元数に慣性モーメントの本質がある。そこで  $k^2/l_r$  のことを、「 $l_r$  によって無次元化された  $k^2$ 」と解釈して、 $k_N^2$  と表記することにする。従ってヨー慣性モーメント  $I_z$  は次のように表れる<sup>(4)</sup>。

$$\begin{aligned}
 I_z &\equiv k^2 m \\
 &= \left( \frac{k^2}{l_f l_r} \right) l_f l_r m \\
 &\equiv k_N^2 l_f l_r m
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

ここで  $k_N^2$  の測定結果は 0.85~1.1 であるとの報告がある<sup>(11)</sup>。そこで

$$k_N^2 = 1 \tag{11}$$

とみなす。

(2) 前輪荷重配分比

前輪荷重配分比 (以後「荷重配分」) を  $p$  と表記する。従って、

$$l_f = (1-p)l \tag{12}$$

$$l_r = pl \tag{13}$$

と記述できる。

(3) コーナリングバワ

本論文では次式のように荷重配分で重みをつけた質量で正規化した前輪コーナリングバワ  $C_f$  と、同後輪  $C_r$  を用いる。

$$\begin{aligned}
 C_f &\equiv \frac{2K_f}{pm} \\
 C_r &\equiv \frac{2K_r}{(1-p)m}
 \end{aligned}$$

乗用車の場合、車両の大きさによらず、 $C_f$  は 80~100 程度、 $C_r$  は 160~240 [m/s<sup>2</sup>] 程度である<sup>(11)</sup>。

なお、この表記を用いると操舵系単独の固有振動数  $\omega_s$  は

$$\omega_s^2 = \frac{pm\xi C_f}{I_h}$$

となる。

2.3. フォースコントロールのスタビリティファクタ  $B$ <sup>(7)</sup>

フォースコントロールのスタビリティファクタ  $B$  は次式によって定義される。

$$B \equiv \frac{\omega_s^2}{\omega_z^2}$$

ここで  $\omega_z$  は次式で定義される。

$$\omega_z^2 \equiv \frac{2l_f K_f + 2l_r K_r}{I_z} = \frac{C_f + C_r}{l}$$

上式において  $2l_f K_f + 2l_r K_r$  は重心まわりの復原モーメントの係数を、 $I_z$  は重心まわりの慣性モーメントを表すから、 $\omega_z$  は、重心廻りに車両が (並進運動をせずに) 回転運動だけをするときの固有振動数と解釈することができる<sup>(7)</sup>。

2.4. 仮定

ここでポジションコントロールにおける定常旋回特性を確認する。式(1)~(6)において、 $\dot{r}$  および  $\dot{\beta}$  を 0 とし、 $\delta$  に対する  $r$  の応答を求めると

$$\frac{r}{\delta} = \frac{1}{1 + AV^2} \frac{V}{l}$$

$$A \equiv \frac{1}{l} \left( \frac{1}{C_f} - \frac{1}{C_r} \right)$$

となる。ここで  $A$  が「ポジションコントロールのスタビリティファクタ」である。 $A=0$  かつ  $k_N^2=1$  のとき、フォースコントロールの根軌跡は、次の性質が示唆されている。(証明はされていない。)

性質 1. トルク入力  $\delta$  の 2 根の実部の和は、角度入力  $r$  の根の実部と等しい。

性質 2.  $B > 2$  の領域における二つの根の実部はそれぞれ常に等しく、また両者の値が等しい。

したがってもし上の二つの性質が事実であれば、 $A=0$  のとき特性方程式は単純化され、固有振動数や減衰比などの応答パラメータを導出しやすくなるものと思われる。そこで本論文では  $A=0$ , すなわち  $C_f = C_r = C$  とする。

3. 応答パラメータの定式化

3.1. 車両モデルの特性方程式

式(1)~(6)および式(8)(9)において、全ての初期条件が 0 であるとしてラプラス変換した上で、 $T_{hN}$  に対する  $r$  の伝達関数を求め、その分母が 0 に等しいとすることで特性方程式が導出される。この特性方程式は

$$s^4 + A_3s^3 + A_2s^2 + A_1s + A_0 = 0$$

where

$$A_3 = 2\frac{C}{V} \quad (14)$$

$$A_2 = \frac{pmC\xi}{I_h} + \left(\frac{C}{V}\right)^2$$

$$A_1 = \frac{pmC\xi}{I_h} \cdot \frac{C}{V}$$

$$A_0 = \frac{pmC\xi}{I_h} \cdot \frac{C}{l}$$

となる。

### 3.2. 特性方程式についての仮定

式(14)が

$$(s^2 + as + b)(s^2 + cs + d) = 0$$

と表されると仮定すると、この式を展開した特性方程式は

$$(s^2 + as + b)(s^2 + cs + d) = s^4 + B_3s^3 + B_2s^2 + B_1s + B_0 = 0 \quad (15)$$

where

$$B_3 = a + c$$

$$B_2 = b + d + ac$$

$$B_1 = bc + da$$

$$B_0 = bd$$

となる。

### 3.3. 特性方程式の因数分解

ここで式(14)と式(15)は互いに等しい。そこでまず式(14)および式(15)それぞれの $s^3$ の係数どうしを比較すると

$$a + c = 2\frac{C}{V} \quad (16)$$

なる関係が成立する。ここで2.3節における性質1(2根の実部の値は等しいように見えて)の知見から

$$a = c = \frac{C}{V} \quad (16)$$

と仮定して、式(16)を $B_2$ と $B_1$ それぞれに代入したものを、それぞれ $B'_2$ および $B'_1$ と記すと

$$B'_2 = b + d + \left(\frac{C}{V}\right)^2 \quad (17)$$

$$B'_1 = \left(\frac{C}{V}\right)(b + d)$$

となる。このように $b+d$ は二つの式に含まれるので、両者の整合性を確認する。

まず $B'_2$ と $A_2$ とを比較すると

$$b + d = \frac{pmC\xi}{I_h} = \omega_s^2$$

なる関係が成立する。

一方 $B'_1$ と $A_1$ とを比較しても

$$b + d = \frac{pmC\xi}{I_h} = \omega_s^2$$

なる関係が成立する。

したがって $b+d$ に関する二つの式は、互いに矛盾しない。したがって

$$b + d = \frac{pmC\xi}{I_h} = \omega_s^2$$

なる関係が成立する。このように $b$ と $d$ との和は上式に支配される。

一方 $b$ と $d$ との積は $B_0$ と $A_0$ とを比較することにより、

$$bd = B_0 = A_0 = \frac{pmC\xi}{I_h} \cdot \frac{C}{l}$$

なる関係が見いだせる。

以上の結果から、 $b$ と $d$ との和および積の関係が分かったので、これらの関係を利用して $b$ と $d$ を求める。

まず $b$ または $d$ の解を $\omega^2$ とおくと、

$$\omega^2 - b = 0$$

または

$$\omega^2 - d = 0$$

だから

$$(\omega^2 - b)(\omega^2 - d) = \omega^4 - (b + d)\omega^2 + bd = 0 \quad (18)$$

なる方程式が成立する。この式に $b$ と $d$ との和および、 $b$ と $d$ との積を代入すると

$$\omega^4 - \frac{pmC\xi}{I_h}\omega^2 + \frac{pmC\xi}{I_h} \cdot \frac{C}{l} = 0 \quad (19)$$

なる $\omega^2$ についての2次方程式が得られる。この方程式を解の公式を用いて解くと

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \frac{pmC\xi}{I_h} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{I_h}{pml\xi}} \right) \quad (20)$$

となる。したがって $b$ および $d$ として $\omega^2$ を、 $a$ および $c$ として式(16)において仮定した $C/V$ を用いると、式(14)は

$$\left[ s^2 + \frac{C}{V}s + \frac{1}{2} \frac{pmC\xi}{I_h} \left( 1 + \sqrt{1 - 4 \frac{I_h}{pml\xi}} \right) \right] \cdot \left[ s^2 + \frac{C}{V}s + \frac{1}{2} \frac{pmC\xi}{I_h} \left( 1 - \sqrt{1 - 4 \frac{I_h}{pml\xi}} \right) \right] = 0 \quad (21)$$

となる。もちろん、この式を展開すると式(14)に一致する。したがって上式は式(14)を因数分解したものである。

## 4. フォースコントロール応答性に関するパラメータ

### 4.1. 2組の根の分類

式(20)における $\omega^2$ についての2つの根を区別するために

$$\omega_1^2 \equiv \frac{1}{2} \frac{pmC\xi}{I_h} \left( 1 + \sqrt{1 - 4 \frac{I_h}{pml\xi}} \right)$$

$$\omega_2^2 \equiv \frac{1}{2} \frac{pmC\xi}{I_h} \left( 1 - \sqrt{1 - 4 \frac{I_h}{pml\xi}} \right)$$

と記す。次に  $\omega_1^2$  の性質を調べるために、 $I_h \rightarrow 0$  とすると

$$\lim_{I_h \rightarrow 0} \frac{\omega_1^2}{\omega_s^2} = 1$$

となる。したがって  $\omega_1^2$  は、主に操舵系のふるまいを表す根であると思われる。

一方  $\omega_2^2$  については

$$\lim_{I_h \rightarrow 0} \omega_2^2 = \frac{C}{l}$$

となる。ここで  $l$  は車体の諸元であるから、 $\omega_2^2$  は、主に車体系のふるまいを表す根であると思われる。そこでこの検証をおこなう。式(7)から、 $I_h \rightarrow 0$  のとき  $T_h \rightarrow \xi F_f$  であるから、 $I_h = 0$  のときのフォースコントロールでは、車両に対する入力は  $F_f$  に比例した入力であるとみなすことができる。そこで式(1)、(2)、(4)~(6)において、車両に対する入力を  $F_f$  として、その特性方程式を求めると

$$s^2 + \frac{C}{V} s + \frac{C}{l} = 0$$

となる。この特性方程式における固有振動数は、 $I_h \rightarrow 0$  のときの  $\omega_2^2$  と一致する。したがって  $\omega_2^2$  は主に車体系のふるまいを表す根であることが確認できる。

#### 4.2. $\omega$ を支配するパラメータ

式(21)の ( )内の項は  $4I_h/pml\xi$  に支配されるように見えるかもしれないが、 $4I_h/pml\xi$  と 1 との差や、さらに根号なども ( )内の項全体に関係している。そこで式(21)の ( )内の項についての最もふさわしい表現形式について考察する。

$I_h \rightarrow 0$  のとき、 $\omega_1^2$  は  $\omega_s^2$  に収束するので、 $\omega_1^2$  と  $\omega_s^2$  との関係を示すと、 $\omega_1^2$  は次のように表すことができる。

$$\omega_1^2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4 \frac{I_h}{pml\xi}}}{2} \omega_s^2$$

一方  $I_h \rightarrow 0$  のとき  $\omega_2^2$  は、 $C/l$  に収束するので、この関係を陽に示すと、 $\omega_2^2$  は次のように表すことができる。

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2} \frac{pml\xi}{I_h} \left( 1 - \sqrt{1 - 4 \frac{I_h}{pml\xi}} \right) \frac{C}{l}$$

これらの式において  $I_h/pml\xi \ll 1/4$  として近似すると

$$\omega_1^2 \approx \left( 1 - \frac{I_h}{pml\xi} \right) \omega_s^2 \quad (22)$$

$$\omega_2^2 \approx \left( 1 + \frac{I_h}{pml\xi} \right) \frac{C}{l}$$

となる。したがって式(21)の根号内の項から、 $4I_h/pml\xi$  と 1 との差や、さらに根号の影響を除去すると  $I_h/pml\xi$  なる形式であることが分かる。そこで本論文では式(21)の ( )内の項の代表として  $I_h/pml\xi$  なる表記を用いる。

以上のことから、 $\omega_1^2$  は  $\omega_s^2$  と  $I_h/pml\xi$  とによって、 $\omega_2^2$  は  $C/l$  と  $I_h/pml\xi$  とによって支配されていると考えることにする。

このうち  $\omega_s^2$  については本論文で定義したパラメータなので、その物理的意味は明らかである。そこで次節以降では、 $I_h/pml\xi$  と  $C/l$  について考察をおこなう。

#### 4.3. $I_h/pml\xi$ についての解釈

$I_h/pml\xi$  について、少なくとも次の三つの解釈が成立すると思われる。

##### (1) 連成の強さ<sup>(7)</sup>

$I_h \rightarrow 0$  のとき、 $\omega_1^2$  は  $\omega_s^2$  に収束し、 $\omega_2^2$  は、 $C/l$  に収束する。ここで  $\omega_s^2$  は、操舵系単体の特性値であり、一方  $C/l$  は車体系だけのパラメータによって構成されている。したがって  $I_h = 0$  のときは、操舵系の運動と車体系の運動とは、互いに独立している。そのため  $\omega_1^2$  と  $\omega_2^2$  とは独立している。逆に、 $I_h > 0$  のときは、 $\omega_1^2$  と  $\omega_2^2$  は独立していない。例えば  $I_h/pml\xi = 4$  のとき、 $\omega_1^2 = \omega_2^2$  となる。したがって  $I_h > 0$  のとき、 $\omega_1^2$  と  $\omega_2^2$  とは連成している。そして連成の程度は  $I_h/pml\xi$  によって支配されていると考えることができる。

次に直進中の車両に対して、時刻  $t=0$  において瞬間的に車体の横滑り角として  $\beta_f = -\beta_r = 1$  [rad] なるインパルス状の横滑り角度強制外乱が付与された瞬間 (以後「条件A」) に限定した車体と操舵系の運動について考察する<sup>(7)</sup>。なお  $\beta_f = -\beta_r = 1$  [rad] なる条件を  $r$  と  $\beta$  とで表すと次式のようなになる。

$$r = \frac{2V}{l} \quad \text{かつ} \quad \beta = \frac{l_r - l_f}{l}$$

よって条件Aとは、上式に表された  $r$  と  $\beta$  の、それぞれ角速度強制インパルス入力および角度強制インパルス入力と等価である。

条件Aすなわち  $t=0$  の瞬間に、前輪横力によって発生する操舵系の回転角加速度 (舵角角加速度) は

$$\ddot{\delta} = \frac{2\xi K_f \beta_f}{I_h} = \frac{2\xi K_f}{I_h} = \frac{pm\xi C}{I_h}$$

となる。また前後輪の横力によって生じる重心まわりの回転角加速度 (ヨー角加速度) は

$$\dot{r} = \frac{-2l_f K_f \beta_f + 2l_r K_r \beta_r}{I_z} = -\frac{2l_f K_f + 2l_r K_r}{ml_f l_r} = -\frac{C_f + C_r}{l} = -\frac{2C}{l}$$

となる。従って条件Aにおいて

$$\frac{\dot{r}}{\ddot{\delta}} = -2 \frac{I_h}{pm\xi l}$$

となり、 $I_h/(pm\xi l)$  は条件Aの瞬間だけにおける、舵角加速度と車体のヨー角加速度との比を表す。(次の瞬間からはこの関係は成立しない。)

次に地上 (慣性系) に対する操舵系の運動を考える。ヨーは慣性系に対する運動であるが、舵角は車体との相対運動である。よって地上に対する前輪のヨー角を  $\delta_i$  と記すと、

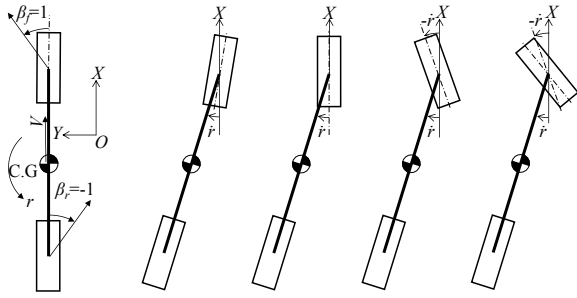
$$\delta_i = \delta + r$$

となる。従って  $I_h/pml\xi=1/2$  のとき  $\delta=-r$  だから  $\delta_i=0$  となるの

$$\frac{I_h}{pml\xi} = \frac{1}{2B}$$

で、条件Aにおいて外乱が作用しても前輪のヨー角は維持される。同様に  $I_h/pml\xi>1/2$  では前輪のヨー角は車体と同方向に回転し、 $I_h/pml\xi<1/2$  であれば車体と逆方向に回転する。特に  $I_h/pml\xi=1/4$  のとき前輪のヨー角は車体と逆向き・同量になる。

以上のように  $I_h(pml\xi)$  が小さいほど、車体の回転の割に操舵系が回転しやすいことを意味する<sup>(7)</sup>。



(A) disturbance (B)  $I_h/pml\xi>1/2$  (C)  $I_h/pml\xi=1/2$  (D)  $I_h/pml\xi=1/4$  (E)  $I_h/pml\xi<1/4$

Fig. 4 Relationship of yaw angle acceleration between front wheel and body at  $t=0$  under condition A (Every angle in figure 4 (B) through (E) represents angular acceleration)

(2) 操舵系と車両との比

$I_h/pml\xi$  を変形すると

$$\frac{I_h}{pml\xi} = \frac{I_h/l_f}{I_z/l_f}$$

となる。 $(I_h/l_f)/(I_z/l_f)$  の分子は、操舵系のパラメータだけで、同分母は車体系のパラメータだけで記述されている。これらのパラメータを、操舵系の代表パラメータと車体系の代表パラメータとみなせば、 $I_h/pml\xi$  は操舵系と車体系との比と解釈できる。

(3) 無次元化  $I_h$

$pml\xi$  は慣性モーメントの次元だから、 $I_h/pml\xi$  は無次元化された  $I_h$  とみることができる。そこで  $I_h/pml\xi$  を無次元化された操舵系慣動半径  $k_{hN}$  として次のように定義する。

$$k_{hN}^2 \equiv \frac{I_h}{k_N^2 pml\xi}$$

$k_{hN}$  は、車両諸元が互いに異なる車両どうしの  $I_h$  の値を比較する場合などに適していると思われる。

(4) 1/2B

$A=0$  かつ  $k_{hN}^2=1$  のとき、 $B$  は、定義より

$$B = \frac{\omega_s^2}{\omega_z^2} = \frac{\left(\frac{pmC\xi}{I_h}\right)}{\left[\frac{pmCl_f + (1-p)mCl_r}{ml_f l_r}\right]} = \frac{pml\xi}{2I_h}$$

であるから

とも解釈できる。

4.4. C/I についての解釈

まず車体系の応答を意味するパラメータを考える。 $k_N=1$  の場合、2自由度車両運動を表す物理変数として  $\beta_f$  と  $\beta_r$  を用いると、 $\beta_f \rightarrow \beta_r$  の順に運動が生じるため、運動方程式が簡潔になる<sup>(12)</sup>。そこでこの運動方程式に含まれる項を確認する。まず式(1)~(6)を  $\beta_f$  と  $\beta_r$  について整理すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta}_f \\ \dot{\beta}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{C_f}{V} - \frac{V}{l} & \frac{V}{l} \\ -\frac{V}{l} & -\frac{C_r}{V} + \frac{V}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_f \\ \beta_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_f}{V} \\ 0 \end{bmatrix} \delta$$

ここで  $C_f=C_r=C$  とすると、上式は

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta}_f \\ \dot{\beta}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{C}{V} - \frac{V}{l} & \frac{V}{l} \\ -\frac{V}{l} & -\frac{C}{V} + \frac{V}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_f \\ \beta_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C}{V} \\ 0 \end{bmatrix} \delta$$

となる。したがって運動方程式に表れる項は  $C/V$  および  $V/l$  の二つだけである。両者の積が  $C/I$  になるので、 $C/I$  とは車体系の応答性を表すパラメータであると思われる。また4.1節において  $I_h \rightarrow 0$  のときの  $\omega_2$  が  $C/I$  によって記述される理由は、このような計算過程によるものと思われる。

5. 2根の関係

5.1. 固有振動数の2乗

$\omega_1^2$  と  $\omega_2^2$  との和を求めると

$$\begin{aligned} & \omega_1^2 + \omega_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{pmC\xi}{I_h} \left( 1 + \sqrt{1 - 4 \frac{I_h}{pml\xi}} \right) + \frac{1}{2} \frac{pmC\xi}{I_h} \left( 1 - \sqrt{1 - 4 \frac{I_h}{pml\xi}} \right) \\ &= \frac{pmC\xi}{I_h} \\ &= \omega_s^2 \end{aligned}$$

となる。したがって  $\omega_1^2$  と  $\omega_2^2$  との和は  $\omega_s^2$  である。(この関係は、今回初めて明らかになったものであり、例えばこの関係を著者は数値計算<sup>(8)</sup>では見抜くことができなかった。)

5.2. 実部

式(1)~(6)についての特性方程式を求めると

$$s^2 + 2\frac{C}{V}s + \left(\frac{C}{V}\right)^2 = 0$$

となる。したがってポジションコントロールにおける根の実部は  $2C/V$  である。一方フォースコントロールにおける2根の実部 ( $C/V$ ) の和は、 $2C/V$  である。したがってフォースコントロールにおける2根の実部の和は、ポジションコントロールにおける根の実部と等しいことが証明される。

5.3. 本章のまとめ

以上をまとめると、2根の実部の和はポジションコントロー

ルの実部に一致し、 $\omega_1^2$ と $\omega_2^2$ との和は $\omega_s^2$ に一致することが証明される。

### 6. 式の適用範囲

式(21)は $I_h/pml\xi \leq 1/4$ の範囲で成立する。一方

$$B = \frac{\omega_s^2}{\omega_z^2} = \frac{pml\xi}{2I_h}$$

だから、式(21)は

$$\left[ s^2 + \frac{C}{V}s + \frac{1}{2} \frac{pmlC\xi}{I_h} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{2}{B}} \right) \right] \cdot \left[ s^2 + \frac{C}{V}s + \frac{1}{2} \frac{pmlC\xi}{I_h} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2}{B}} \right) \right] = 0$$

とも表現できる。したがって特性方程式は $B \geq 2$ の全域で適用可能である。なお文献(8)において根軌跡が $B=2$ の付近で直角に変化する現象は、このように、根を記述する式が、この式から（もし存在するならば）未知の別の式に変化することに起因するものと思われる。

### 7. 性能設計

本章では、運動性能の設計パラメータとして $C$ および $\xi I_h$ の設定について考察する。なお $m$ や $l_p$ は、運動性能の設計段階以前に車両企画段階で決定されるものとして、扱わない。

#### 7.1. 操舵系

操舵系固有振動数 $\omega_1$ を大きくするためには、式(22)から $\omega_s$ 、すなわち $pCm\xi/I_h$ を大きくする必要がある。したがって性能設計の観点からは、 $C$ や $\xi$ を大きく、 $I_h$ を小さく設定することが望ましい。（その結果 $I_h/pml\xi$ も小さく設定することになり、このことも $\omega_1$ を増加させる側に働く。）

次に操舵系の減衰比を $\zeta_1$ と表すと式(21)から

$$\zeta_1 \omega_1 = \frac{C}{2V}$$

となる。したがって $\zeta_1 \omega_1$ を大きくするためには $C$ を大きく設定することが望ましい。

#### 7.2. 車体系

車体系固有振動数 $\omega_2$ を大きくするためには、式(22)から $C/l$ を大きくする必要がある。したがって性能設計の観点からは、 $C$ を大きく設定することが望ましい。

なお $I_h/pml\xi$ を大きくすると式(22)において $\omega_2$ が増加するが、同時に $\omega_1$ に正比例する $\omega_s$ が減少するため、 $\omega_1$ は小さくなる。したがって $I_h/pml\xi$ は、操舵系の応答の観点から小さく設定することが望ましいと思われる。

次に車体系の減衰比を $\zeta_2$ と表すと式(21)から

$$\zeta_2 \omega_2 = \frac{C}{2V}$$

となる。したがって $\zeta_2 \omega_2$ を大きくするためには $C$ を大きく設定することが望ましい。

### 7.3. 本章のまとめ

以上をまとめると、 $I_h$ を小さく、 $\xi$ や $C$ を大きく設定することが望ましい。

### 8. おわりに

本論文は、操舵応答に関するパラメータを明らかにするために、簡単なモデルについての厳密解を考察する方法として、 $k_N=1$ かつ $A=1$ の場合のフォースコントロール時の固有振動数について研究をおこなった。その内容をまとめると、次のようになる。

特性方程式を、因数分解することにより、二つの根を定式化した。この式が成立する範囲は $B \geq 2$ であり、逆に $B \geq 2$ の全領域における固有振動数は、この式によって求めることができる。

フォースコントロールにおける二つの固有振動数の2乗の和は、操舵系単体の固有振動数の2乗に等しく、フォースコントロールにおける2根の実部の和は、ポジションコントロールにおける実部に等しいことを証明した。

根の実部を支配するパラメータは $C/V$ である。固有振動数を支配するパラメータは、 $\omega_s$ と $C/l$ と $I_h/pml\xi$ である。このうち $\omega_s$ は操舵系単体の特性を、 $C/l$ は車体系単体の特性を、 $I_h/pml\xi$ は両者の連成の強さを表す。したがってこれらが応答に関するパラメータである。これらのパラメータに注目することで、フォースコントロールにおける応答性の性能設計がおこなえるものと思われる。

本論文において $C=C_f=C_r$ かつ $k_N^2=1$ と仮定したため、一般的なアンダステア( $C_f < C_r$ )や一般的なヨー慣性モーメントについてのさらなる詳細な性能設計をおこなうためには、 $C_f \neq C_r$ や $k_N^2 \neq 1$ の場合についても応答パラメータの定式化が望まれる。この場合の定式化を続報にておこなう予定であるが、その際は、本論文のような厳密な定式化ではなく、近似的な解法にならざるを得ない。その近似解において $C_f=C_r$ かつ $k_N^2=1$ としたときの解と、本論文の解とを比較することによって、その近似式の妥当性や近似精度、近似解の成立範囲などを明らかにしたい。

### 記号および計算諸元

- $m$  車両質量
- $l$  ホイルベース
- $I_z$  ヨー慣性モーメント
- $k$  ヨー慣性半径
- $K_f$  前輪コーナリングパワ
- $K_r$  後輪コーナリングパワ
- $I_h$  操舵系慣性モーメント
- $\xi$  トレール長 ( $\xi > 0$ )
- $p$  前輪荷重配分
- $\omega_s$  操舵系単体固有振動数 ( $\omega_s^2 = 2K_f \xi / I_h$ )

$r$	ヨー角速度[rad/s]	(初期条件は0とする)
$\beta$	重心位置車体横滑り角[rad]	(初期条件は0とする)
$\beta_f$	前輪位置車体横滑り角[rad]	(初期条件は0とする)
$\beta_r$	後輪位置車体横滑り角[rad]	(初期条件は0とする)
$\delta$	舵角[rad]	(初期条件は0とする)
$T_h$	操舵トルク[Nm]	(初期条件は0とする)
$T_{hN}$	無次元化操舵トルク	(初期条件は0とする)
$F_f(F_r)$	前輪(後輪)コーナリングフォース[N]	(初期条件は0とする)
$V$	車速[m/s]	
$s$	ラプラス演算子	

### 参 考 文 献

- (1) 岩本貞雄ほか：ステアリング系のバイラテラル・モデル (I)，自動車技術会論文集, No.15, p.89-86(1978)
- (2) 岩本貞雄ほか：ステアリング系のバイラテラル・モデル—第2報 パワーステアリング—，自動車技術会論文集, No.18, p.95-102(1979)
- (3) 自動車技術ハンドブック編集委員会編：自動車技術ハンドブック (第1分冊) 基礎・理論編，第7章 操縦安定性の基礎・理論，p.264(2011).
- (4) 安部正人：自動車の運動と制御, 東京, 山海堂, 1992, 247p.
- (5) 入江南海雄ほか：リヤサスペンション特性が操縦安定に及ぼす影響，自動車技術，Vol.39, No.3, p.275-285 (1985)
- (6) 坂下和夫ほか：操舵系の特性を考慮した自動車の操縦安定性に関する線形理論，自動車技術，Vol.18, No.4, p.268-273 (1964)
- (7) 酒井英樹：フォースコントロールにおける安定性とその指標，自動車技術会論文集, Vol.44, No.2, p.441-448(2013)
- (8) 酒井英樹：フォースコントロール下の操舵系と車体系の運動特性の数値的研究，自動車技術会論文集, Vol.44, No.3, (2013)
- (9) 毛利宏ほか：過渡的な操舵力アシスト特性が車両運動に及ぼす影響，自動車技術会論文集, Vol.37, No.1, p. 155-160 (2006)
- (10) 野崎博路：パワーステアリング付車のステアリング系剛性とステア特性について，自動車技術会論文集，No.30, p. 76-81 (1985)
- (11) 北浜謙一ほか：正規化したコーナリングパワーを用いた自動車の操舵応答性能の同定法，日本機械学会論文集 (C編) 65巻 633号, p.1960-1965 (1999)
- (12) 酒井英樹：自動車の平面運動におけるヨー角速度進み時定数についての力学的考察，日本機械学会論文集 (C編), Vol.79, No.801, p.1681-1692(2013)