

前輪と後輪との横運動の関係についての基礎的考察

Fundamental Consideration to the Relationship between Frontend lateral motion and Rear

研究代表者 工学部知能機械工学科 准教授 酒井 英樹
Hideki Sakai

This paper formulates the relationship between attitude angle at rear wheel and transient steering torque against steering angle input. The torque contains the element from attitude angle velocity at rear wheel. Thus drivers can sense the velocity by steering wheel. Furthermore this paper formulates yawing natural frequency and its damping ratio under steering torque input. They are independent from front cornering stiffness. For verifications, an actual vehicle experiment is conducted, which employs electric power steering unit that can control the transient steering torque. This system was developed, being on market.

Key Words: vehicle dynamics, stability, steering system, transient response

1. はじめに

自動車の車両運動力学は、当然ながら力学に立脚している。その力学の基本的手法は、まず大局的に現象を見極めることから始まるものであると思われる。例えば、高等学校における物理の授業では、放物運動において空気抵抗を無視することで、その水平運動は等速直線運動として、その鉛直運動は等加速度運動として、放物運動を大局的に理解した。

そして車両運動力学においても、重心の運動については車両運動を大局的に見通してきた。すなわち、実際の複雑な車両を、線形2自由度モデルに単純化したことにより、スタビリティファクタやヨー固有振動数などの応答公式⁽¹⁾が導出され、運動性能の性能設計⁽²⁾が可能になった。

しかし車両重心の運動以外については、まだ大局的な見通しを有していないこともあると思われる。その一つの事例は、ある自動車会社の評価専門ドライバが『操舵初期には、後輪を軸に前輪が（ヨー方向に）回転する』と発言したことについて、運動学的には肯定も否定もできなかったことである。なぜなら従来の線形2自由度モデルでは、後述のように、操舵と同時に、ヨー角加速度と重心位置の横滑り角速度とが発生するからである。

『操舵初期には、後輪を軸に前輪が回転する』

とは、素朴な官能表現ではあるが、その真偽に関らず、車両運動の発生のかたに、車両運動力学上の課題が存在することを暗示しているものと思われる。そこで、本論文では『操舵初期には、後輪を軸に前輪が（ヨー方向に）回転する』という仮説に対して、その真偽を明らかにすることによって、車両運動の発生のかたについて大局的な見通しを得ようとするものである。

2. 運動伝達モデルの導出

2.1. 従来の車両モデル

図1に示す一般的な平面・線形2自由度モデルを用いる⁽¹⁾。このモデルはヨーと横すべり運動の基本的な性質を理解するのに適した簡素なモデルであり、次の仮説において、実車をモデル化したものである。

仮定1 横加速度は、最大横加速度に比べて十分小さい。

仮定2 旋回半径は、トレッドに比べて十分大きい。

仮定3 δ や β などの、あらゆる角度はほぼ0であり、角度を θ とすると $\sin \theta = \tan \theta = \theta$ とみなすことができる。

仮定4 前進速度 V は一定。

仮定5 タイヤ横力はタイヤスリップ角に比例して発生する。

仮定6 オーバーオールステアリングギヤ比は1である。

仮定1から、車体のロール角は小さいとみなして、ロール自由度を無視してある。また仮定2から左右輪のスリップ角は等しいものとして、タイヤは車両中心面内にあるものとしている。

このモデルの運動方程式を導く。まず、重心の横方向の並進運動に関する運動方程式は

$$mV(r + \dot{\beta}) = F_f + F_r \quad (1)$$

となる。左辺カッコ内第1項は、車両に固定した座標系の横方向に沿って運動したときの加速度であり、同括弧内第2項は座標系が前進速度 V 一定で移動しながら、鉛直軸まわりの角速度（ヨー角速度 r ）の運動をするために生じる慣性力である。またタイヤ横力は、タイヤに垂直に発生するので、厳密には慣性力の方向には働かないが、仮定3を使って近似してある。

次に重心を通る鉛直軸まわりの回転についての運動方程式は

$$I_z \dot{r} = l_f F_f - l_r F_r \quad (2)$$

となる。この式の右辺では、式(1)の右辺と同様に、仮定3を用いている。次にタイヤ横力は、仮定5からタイヤのスリップ角に比例するものとすれば、

$$F_f = -2K_f(\beta_f - \delta) \quad (3)$$

$$F_r = -2K_r\beta_r \quad (4)$$

となる。最後に、前後輪それぞれの位置における横滑り角は

$$\beta_f = \beta + \frac{l_f}{V} r \quad (5)$$

$$\beta_r = \beta - \frac{l_r}{V} r \quad (6)$$

である。

式(1)～(6)をブロック線図で表現すると図2になる。これは、操舵によって、 \dot{r} と $\dot{\beta}$ が同時に発生するモデルであり、運動を理解しにくい。なお、本論文では文献(1)とは異なり、 β_f や β_r

は、それぞれ前輪位置、後輪位置における車体の横滑り角を意味する。

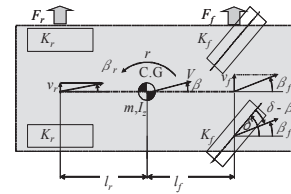


図1. 一般的な車両モデル

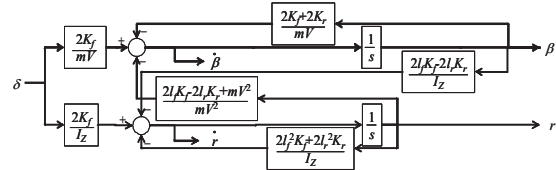


図2. 一般的な車両モデルのブロック線図

2.2 慣性モーメントの単純化

主に上下・ピッチ運動の考察に用いられる概念に『ダイナミックインデックス』⁽³⁾がある。これは平面運動においては $I_z / m l_f l_r$ として定義される無次元数である。 $I_z / m l_f l_r = 1$ のとき、前輪に衝撃力が加わると、衝撃の中心は後輪位置にあるので、後輪を中心に回転し、これとは逆に、後輪に衝撃力が加わると、前輪を中心に回転するという性質がある⁽⁴⁾。

そこで上下・ピッチ運動においてはダイナミックインデックスを1とみなして、前後輪の運動を非連成として扱う『1/4車体モデル』を用いる⁽⁵⁾。このモデルによって前輪（後輪）のばね上共振周波数という概念を用いることができる。したがって、ばね上（下）共振周波数という概念が成立するのは、ダイナミックインデックスを1とみなしているからであり、もしこれを1と見なさないならば、上下運動は前後輪の2自由度ではなく、バウンスとピッチとの2自由度でしか力学的に扱えない。もちろん実際のピッチのダイナミックインデックスは1とは限らないが、このような近似により、大局的な見通しを得ているわけである。

このように考えてくると、ヨー慣性モーメントにおいても $I_z / m l_f l_r$ の分布は0.85～1.1程度である⁽⁶⁾ので、ヨーイングのダイナミックインデックスを1とすることにより、大局的な見通しが得られ、1/4車体モデルと同程度の有用

さを持つはずである．そこで本論文では，力学的な見通しを得るために， $I_z/m_l l_f l_r=1$ としてモデルを簡潔に扱う．

$I_z/m_l l_f l_r=1$ のとき，車両は次のようにモデル化できる．

車両を表す m , I_z , l_f , l_r なる剛体を，質量 m_f なる前軸上の質点と，質量 m_r なる後軸上の質点として単純化し，この二質点が，質量0，剛性無限大の棒によって結合されていると考えよう．ここで m_f と m_r は，前後荷重配分から次式で規定される．

$$m_f = \frac{l_r}{l} m$$

および

$$m_r = \frac{l_f}{l} m$$

よって重心まわりの慣性モーメント I_z は次式のようになる．

$$I_z = m_f l_f^2 + m_r l_r^2 = \frac{(l_f + l_r) l_f l_r}{l} m = l_f l_r m \quad (7)$$

従ってこのモデルが $I_z/m_l l_f l_r=1$ の力学的意味を表している．

以上により，車両モデルは図3のように単純化される．勿論，角度や速度，力の定義は図1のままである．前（後）輪と前（後）部質点からなる系を，以後「前輪系」（「後輪系」と呼ぶ．前輪系の座標系は $O_f-x_f-y_f$ ，後輪系の座標系は $O_r-x_r-y_r$ である．これらの座標系で共通な物理量は， x 方向の速度（前進速度）や r だが，前後輪における車速 V の大きさも一定とみなす．

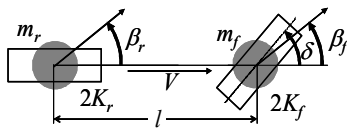


図3. 2質点車両モデル

2.3. 運動の分解

『操舵初期には，後輪を軸に前輪が回転する』との表現から，本論文では前輪系と後輪系の動きに注目する．そこで従来の r と β との組合せではなく， β_f と β_r との組合せで考察を行う．

この場合の運動は，式(1)～(6)および $I_z/m_l l_f$

$l_r=1$ から， r と β を， β_f と β_r とで置換えることで求めることができる．しかし，本論文では，項の由来を知るために，図3のモデルを使って，運動方程式を再度導出するものである．

2.4. 前輪系モデル

前輪系の横方向の並進運動についての運動方程式は， $O_f-x_f-y_f$ 座標系を用いると次のようになる．

$$m_f V(r + \dot{\beta}_f) = -2K_f(\beta_f - \delta)$$

したがって

$$r + \dot{\beta}_f = -\frac{2K_f}{m_f V}(\beta_f - \delta) \quad (8)$$

である．よってコーナリングパワは $2K_f/m_f$ の形式に意味がある．そこで以後，表記を簡単にするために $2K_f$ を m_f で正規化した，正規化コーナリングパワ C_f を用いることがある．すなわち

$$C_f \equiv \frac{2K_f}{m_f}$$

と定義する．

2.5. 後輪系モデル

後輪系の横方向の並進運動についての運動方程式は， $O_r-x_r-y_r$ 座標系を用いると次のようになる．

$$m_r V(r + \dot{\beta}_r) = -2K_r \beta_r$$

したがって

$$r + \dot{\beta}_r = -\frac{2K_r}{m_r V} \beta_r \quad (9)$$

となる．よってコーナリングパワは $2K_r/m_r$ の形式に意味がある．そこで以後，表記を簡単にするために $2K_r$ を m_r で正規化した，正規化コーナリングパワ C_r を用いることがある．すなわち

$$C_r \equiv \frac{2K_r}{m_r}$$

と定義する．

2.6. 前後輪系の連成運動方程式

β_f と β_r を主変数として運動を考えるために，前後の連成項 r を消去する． r は，式(5)(6)から次のように表現できる．

$$r = \frac{V}{l} \beta_f - \frac{V}{l} \beta_r \quad (10)$$

以後 V/l なる項が出現するが，その起源はこの

段階にある。

まず次元の観点から、この式における V/l の機能に注目しよう。 V/l は、角度次元の β_f や β_r を、角速度次元の r に変換している。従って次元を変換するという意味では、微分演算子 $j\omega$ と同様な機能を有する。しかも V/l の次元は、 $(\text{m/s})/\text{m}=\text{rad/s}$ と変換できるので、 V/l を角速度 ω とも解釈できる。

次に式(10)を運動学的に考察するために、車両の横滑り状態を図4(A)のように横速度 v_f , v_r で表現する。ここで $v_f=V\beta_f$, $v_r=V\beta_r$ である。図4(B)から、 r とは、 v_f-v_r を l で除したものであることが分かる。これを分解したものが式(10)であり、その右辺第1項は(c)に、右辺第2項は(d)に相当する。

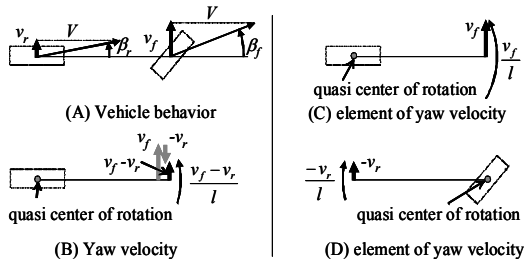


図4. ヨー角速度の成分分解

そこで式(10)の形式を使って、式(8), (9)中の r を β_f と β_r とによって置換えることで、次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta}_f \\ \dot{\beta}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{C_f}{V} - \frac{V}{l} & \frac{V}{l} \\ -\frac{V}{l} & -\frac{C_r}{V} + \frac{V}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_f \\ \beta_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_f}{V} \\ 0 \end{bmatrix} \delta \quad (11)$$

ここで上式を、現代制御理論に用いられる状態方程式形式で表示した理由は、両辺の入出力関係を明示するためである。

式(11), (12)を用いて、連成項である r を明示的に表したブロック線図が図5である。

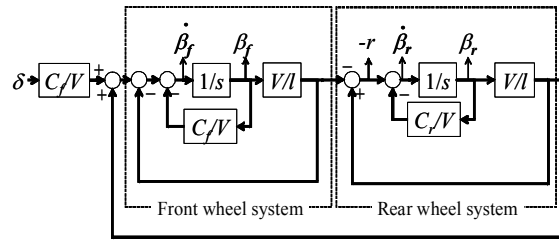


図5. 本モデルのブロック線図

なお、 $I_z/mI_f I_r=1$ としたときの式(1)~(6)を、全ての初期条件を0としてラプラス変換して、 δ に対する β_r の応答をもとめても、式(11)を用いて同様に求めても、どちらの場合でも、

$$\frac{\beta_r(s)}{\delta(s)} = \frac{\frac{C_f}{V}}{s^2 + \left(\frac{C_f}{V} + \frac{C_r}{V}\right)s + \left[\frac{C_r}{V} + \frac{C_f}{V} \left(\frac{C_r l}{V} - 1\right)\right] \frac{V}{l}}$$

となる。したがって、式(11)は当然ながら、 $I_z/mI_f I_r=1$ のときの式(1)~(6)と等価である。

3. 考察

3.1. 運動の発生順序

図5から、運動が発生する順番は $\dot{\beta}_f$, β_f , $\dot{\beta}_r$, β_r の順であることがわかる。すなわち操舵すると、まず前輪系が動いてから、次に後輪系が運動する。

3.2. 前輪系の運動

図5における前輪系の運動に注目しよう。ここで後輪系への入力、すなわち前輪系の出力は、 $V\beta_f/l$ だから、これは、図4(C)を意味するので、前輪系は、後輪系を中心に回転運動することがわかる。その一例として直進からの過渡操舵を考えよう。操舵によって $\dot{\beta}_r$ が発生した瞬間は、まだ $\beta_r=0$ だから、このとき前輪系は、後輪系を中心とした回転運動をするはずである。これを確かめたものが、図6である。この図は、 $t=0$ において $\delta=0.1[\text{rad}]$ のなるステップ操舵時の車両挙動を、地上固定座標系で記したものである。時刻 $t=0$ から $0.1[\text{s}]$ にかけての運動を車両上で観測すれば、後輪系を中心に回転していることがわかる。したがって『操舵初期には、後輪系を軸に前輪系が(ヨー方向に)回転する』との仮説は真である。

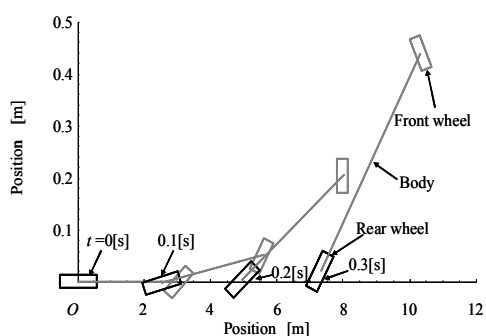


図 6. ステップ応答時の後輪系の応答
($\delta=0.1[\text{rad}]$ at $t=0$ [s])

3.3. 後輪系の運動

後輪系から前輪系へのフィードバック，すなわち後輪系の出力は $V\beta_f/I$ である．これは図 4 (D) を意味するから，後輪系は前輪系まわりに回転する．また，後輪系から前輪系にフィードバックする際，系各所の符号に留意すると，後輪系の運動は $\dot{\beta}_f$ を打消す側に働く．つまり，後輪系は前輪系の運動を復元させながら回転運動を行う．これを確認したのが図 7 である．図 7 は，時刻 $t=0$ において， $\delta=0$ を保ったまま $\beta_f=0.1[\text{rad}]$ なる初期条件で車両を運動させたものである．ほぼ直線運動する前輪系を中心に，後輪系が回転運動することがわかる．また，特に $t=0$ から $0.025[\text{s}]$ にかけて，後輪系の復元作用によって， β_f が減少していることがわかる．

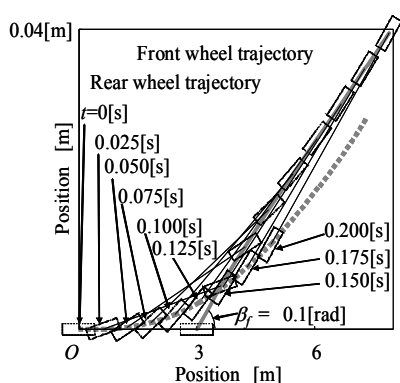


図 7. 自由振動
(初期条件: $\beta_f=0.1[\text{rad}]$ at $t=0$)

3.4. 操舵応答を表すパラメータ

操舵応答を表すパラメータは，式 (11) から， C_f/V と C_r/V と V/I との三つである．これらすべての次元は，時間の逆数なので，角速度と考えることもできる．したがって三つの ω ナンバで，この車両モデルを表すことができる．

4. おわりに

この論文をまとめると次のようになる．

操舵すると，まず前輪位置の車体が動き，ついで後輪位置の車体が動く．また前輪位置の車体は，後輪位置を中心に回転運動する．後輪位置の車体も，前輪位置を中心に回転運動しながら，前輪位置の車体の横滑りを復元する．

5. 記号および計算諸元

m	車両質量	(2 000 kg)
l	ホイールベース	(3.00 m)
I_z	ヨー慣性モーメント	(4 500 kgm ²)
K_f	前輪コーナリングパワ	(5.00 kN/rad)
K_r	後輪コーナリングパワ	(10.0 kN/rad)
r	ヨー角速度 (rad/s)	
β	重心位置車体横滑り角 (rad)	
β_f	前輪位置車体横滑り角 (rad)	
β_r	後輪位置車体横滑り角 (rad)	
δ	舵角 (rad)	(初期条件は 0 とする)
F_f	前輪横力 (N)	
F_r	後輪横力 (N)	
V	車速	(24.5 m/s)
s	ラプラス演算子	

参考文献

- (1) 安部正人, 自動車の運動と制御, 山海堂, 1992, pp. 84-100
- (2) 入江南海雄, 芝端康二, ”リヤサスペンション特性が操縦安定性に及ぼす影響”, 自動車技術, 39 巻 3 号 (1985-3), pp. 275-285
- (3) Barak, P., “Magic Numbers in Design of Suspensions for Passenger Cars”, SAE Paper, No. 911921
- (4) 小林明, 自動車振動学, 図書出版社, 1976,

pp. 67-68

(5) 安部正人, 大沢洋, *自動車の運動性能向上技術*, 1998, pp. 91-92

(6) 酒井英樹, 北浜謙一, ” ロール運動を考慮した自動車の平面運動モデル”, *機械学会論文集(C編)* 65 巻 633 号 (1999-10), pp. 1954-1965